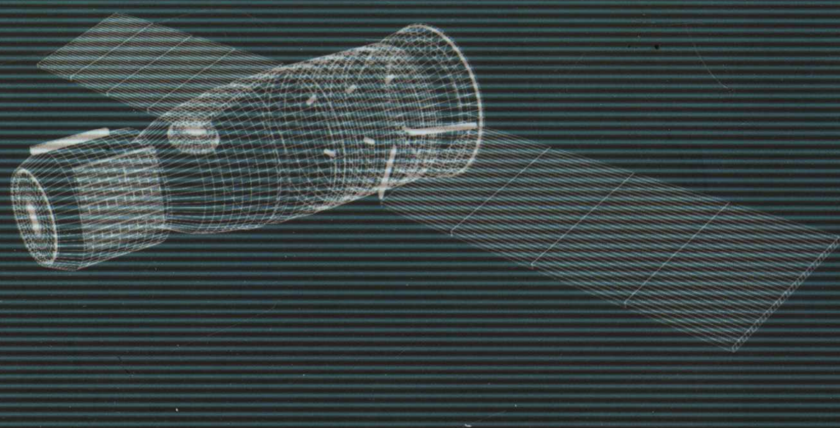
控制科学与工程

国防科工委『十五』规划

教材

现代鲁棒控制基础

●姜长生 吴庆宪 陈文华 王从庆 编著



哈尔滨工业大学出版社
北京航空航天大学出版社 北京理工大学出版社
西北工业大学出版社 哈尔滨工程大学出版社

国防科工委“十五”规划教材.控制科学与工程

现代鲁棒控制基础

姜长生　吴庆宪　陈文华　王从庆　编著

哈尔滨工业大学出版社
北京航空航天大学出版社　北京理工大学出版社
西北工业大学出版社　哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书比较全面系统地介绍了自20世纪80年代发展起来的鲁棒控制的基本理论,论述了系统时域中的鲁棒控制、时域中的H_∞控制、系统频域中的鲁棒控制、频域中的H_∞控制、非线性系统的鲁棒控制、矩阵方程和线性矩阵不等式的求解等。全书内容丰富、由浅入深、论述严谨、深入浅出,并配有与内容密切结合的例题和习题,便于读者理解和自学。

本书不仅融入了作者多年来从事研究生教学的经验和体会,也包含了作者近几年来的科研成果。

本书可作为信息与控制类各专业的研究生教材,也可供相关领域各专业研究生参考,还可供信息与控制类各专业及相关专业高等学校教师、广大科技工作者、工程技术人员和高年级学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代鲁棒控制基础/姜长生,吴庆宪,陈文华,王从庆编著.
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2005.9
ISBN 7-5603-2123-2

Ⅰ.现… Ⅱ.①姜…②吴…③陈…④王… Ⅲ.鲁棒控制-基本知识 Ⅳ.TP273

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第091142号

现代鲁棒控制基础

编 著 者 姜长生 吴庆宪 陈文华 王从庆
责任编辑 黄菊英 杜燕 甄淼淼
责任校对 周桂荣
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787×960 1/16 印张28.75 字数623千字
版 次 2005年9月第1版 2005年9月第1次印刷
书 号 ISBN 7-5603-2123-2/TP·210
印 数 1~3 000
定 价 39.80元

国防科工委“十五”规划教材编委会

（按姓氏笔画排序）

总 序

国防科技工业是国家战略性产业，是国防现代化的重要工业和技术基础，也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来，在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下，国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中，取得了举世瞩目的辉煌成就。研制、生产了大量武器装备，满足了我军由单一陆军，发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其它技术兵种在内的合成军队的需要，特别是在尖端技术方面，成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术，使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备，使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路，建立了专业门类基本齐全，科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系，奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础；掌握了大量新技术、新工艺，研制了许多新设备、新材料，以“两弹一星”、“神舟”号载人航天为代表的国防尖端技术，大大提高了国家的科技水平和竞争力，使中国在世界高科技领域占有了一席之地。十一届三中全会以来，伴随着改革开放的伟大实践，国防科技工业适时地实行战略转移，大量军工技术转向民用，为发展国民经济作出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业，国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。50多年来，国防科技工业培养和造就了一支以“两弹一星”元勋为代表的优秀的科技人才队伍，他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神，勇挑重担，敢于攻关，为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动，成为推动我国科技进步的重要力量。面向新世纪的机遇与挑战，高等院校在培养国防科技人才，生产和传播国防科技新知识、新思想，攻克国防基础科研和高技术研究难题当中，具有不可替

代的作用。国防科工委高度重视，积极探索，锐意改革，大力推进国防科技教育特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具，但受种种客观因素的影响，现有的教材与专著整体上已落后于当今国防科技的发展水平，不适应国防现代化的形势要求，对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影响。为尽快改变这种状况，建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系，国防科工委全额资助编写、出版200种国防特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量，在广泛动员全国相关专业领域的专家学者竞投编著工作的基础上，以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的100多位专家、学者，对经各单位精选的近550种教材和专著进行了严格的评审，评选出近200种教材和学术专著，覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与工程、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术、核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者，他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学、西安交通大学等，具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中，国防特色专业重点教材和专著的出版，将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出，进入二十一世纪，我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展阶段。全面建设小康社会的宏伟目标，对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展，提升国防实力，需要造就宏大的人才队伍，而教育是奠基的柱石。全面振

兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务，落实科教兴国和人才强国战略，推动国防科技工业走新型工业化道路，加快国防科技工业科技创新步伐。国防科技工业为有志青年展示才华，实现志向，提供了缤纷的舞台，希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识，树立正确的世界观、人生观、价值观，努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任，创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好，国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝

前　言

科教兴国的号角像春天的惊雷激励着中华民族的每一个炎黄子孙向着复兴民族、振兴中华的伟大目标奋勇前进，科教兴国战略必将成为21世纪世界历史上最伟大的壮举！我们南京航空航天大学自动化学院几位同志合作编著的这本《现代鲁棒控制基础》就是在这一历史背景下诞生的，是我们在这一号召激励之下的一点微薄努力和贡献。虽然这只是这个伟大潮流中一朵小小的浪花，但我们相信，千千万万朵飞舞的浪花必将汇合成排山倒海的大潮，将中华民族推向新世纪发展潮流的最前头！

本书是在《系统理论与鲁棒控制》(1998年航空工业出版社出版)一书有关鲁棒控制部分内容的基础上，进行增删、改写而成的，书中用了较大的篇幅论述了非线性系统的稳定与鲁棒控制问题。

本书全面系统地介绍了自20世纪80年代发展起来的鲁棒控制的基本理论，论述了包括 H_∞ 在内的频域和时域中各种鲁棒控制理论和方法、非线性系统的稳定与鲁棒控制问题，以及矩阵方程和线性矩阵不等式的求解。为了使理论和实际能密切结合，达到学术性和应用性的一致，在阐述主要理论和方法的同时，注重工程设计方法、算法的介绍。在撰写中，我们力求做到内容丰富、由浅入深、层次分明、论述严谨、深入浅出、语言流畅。书中配有与内容密切结合的例题和习题，以便理解和自学。读者只要具备矩阵理论和线性系统理论方面的知识就可读懂书中的大部分内容。对书中涉及的泛函分析和微分几何方面的知识，若读者较难理解，可以越过。

本书是作者在多年研究生教学和科研的基础上总结写成的，因此书中的内容不仅包含了作者多年研究生教学的经验与体会，也反映了作者有关的科研成果。

本书作为一本专著和培养高层次人才的教材，适合信息与控制领域以及其它相关领域各专业研究生学习使用，也可供高等学校相关专业教师、广大科技工作者和工程技术人员参考。

参加本书编著工作的有姜长生、吴庆宪、陈文华、王从庆；参与本书校对、绘图、打字工作的有陈谋、朱亮、方炜、王玉慧、武仪、黄国勇。

本书在撰写过程中，得到了中国科学院院士东南大学冯纯伯教授、中国科学院院士北京大学黄琳教授、北京航空航天大学程鹏教授、东南大学长江学者田玉平教授、东南大学费树岷教授等的指导和帮助，作者在此对他们表示衷心的感谢。

作者在撰写过程中，参阅了国内外的许多同类著作和相关文献，并引用了他们的成果和论述，在此向本书所引文献的作者们表示衷心的感谢。

本书成稿后，清华大学钟宜生教授、北京航空航天大学毛剑琴教授仔细地审阅了全部书稿，并提出了宝贵的修改意见，给予作者很大的帮助，在此深表谢意。

本书的出版得到了国防科学技术工业委员会出版基金和国家自然科学基金(60174045,90405011)的资助，在此深致谢意，同时还要感谢哈尔滨工业大学出版社的同志们，是他们的支持和辛勤劳动，使本书以很高的出版质量奉献给读者。

由于我们水平有限书中不足之处在所难免，热诚地欢迎各位同行专家和读者批评指正。

作　者

2005 年 7 月于南京

目　　录

第一章　系统时域中的鲁棒控制

(Robust Control of Systems in the Time Domain)

在实际系统分析、设计过程中最棘手的问题是如何处理系统中的不确定性(Uncertainty)。不确定性分为结构不确定性和参数不确定性。其中，主要包括受控对象模型和参数的不确定性、外干扰的多样性和复杂性、系统结构和参数的未知变化等。解决这类系统的稳定性和有效控制问题属于鲁棒控制问题。

1.1　摄动系统的鲁棒稳定性

(Robust Stability of Perturbed Systems)

一、具有参数不确定反馈系统的鲁棒稳定性(Robust Stability of Feedback Systems with Parametrical Uncertainty)

考虑如下具有参数不确定的多变量系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} + \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Du} + \Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) \end{cases} \tag{1.1}$$

设系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$完全可控、可观，且系统的参数不确定为范数有界，记

$$\begin{cases} \|\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\|_1 \leqslant \beta_A \|\boldsymbol{x}\|_1, \quad \|\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})\|_1 \leqslant \beta_B \|\boldsymbol{u}\|_1 \\ \|\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\|_1 \leqslant \beta_C \|\boldsymbol{x}\|_1, \quad \|\Delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\|_1 \leqslant \beta_D \|\boldsymbol{u}\|_1 \end{cases} \tag{1.2}$$

式中，$\|\cdot\|_1$表示绝对值和的范数。系统取动态反馈控制器构成如图1.1所示的闭环系统。动态反馈控制器的方程为

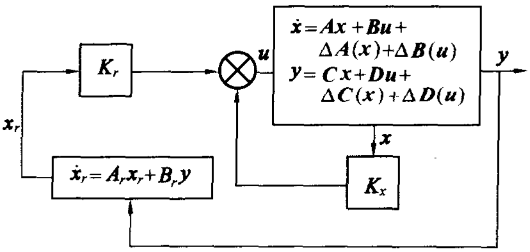


图1.1　具有参数不确定的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_r = \boldsymbol{A}_r\boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{B}_r\boldsymbol{y}, & \boldsymbol{x}_r(0) = \boldsymbol{x}_{r0}, \quad \boldsymbol{x}_r \in \mathbf{R}^{n_r\times 1} \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}_x\boldsymbol{x} + \boldsymbol{K}_r\boldsymbol{x}_r, & \boldsymbol{K}_x \in \mathbf{R}^{p\times n}, \quad \boldsymbol{K}_r \in \mathbf{R}^{p\times n_r} \end{cases} \tag{1.3}$$

设计控制器($\boldsymbol{A}_r,\boldsymbol{B}_r,\boldsymbol{K}_x,\boldsymbol{K}_r$)的目的是使闭环系统稳定。如果这样的控制器存在，并且能始终保持不确定系统稳定，则称此控制器是鲁棒稳定控制器，同时称该系统为鲁棒稳定控制系统(图1.1)。

根据图 1.1 和方程(1.1)、(1.3)，得闭环系统的动态方程，即

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{pr} = \boldsymbol{A}_{pr}\boldsymbol{x}_{pr} + \Delta\boldsymbol{A}_{pr}(\boldsymbol{x}_{pr}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_x & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_r \\ \boldsymbol{B}_r\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}_r\boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_x & \boldsymbol{A}_r + \boldsymbol{B}_r\boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_r \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_{pr} + \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{B}_r(\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_{pr}\boldsymbol{x}_{pr} + \Delta\boldsymbol{C}_{pr}(\boldsymbol{x}_{pr}) = [\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_x, \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_r]\boldsymbol{x}_{pr} + (\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})) \\ \boldsymbol{x}_{pr}(0) = [\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_{r0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_{pr0} \end{cases} \tag{1.4}$$

其中

$$\boldsymbol{x}_{pr} = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_r^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

由方程(1.4)知，闭环系统的状态转移矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}_{pr}(t-\tau) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{pr}(t-\tau)}$。假定下式成立，即

$$\| \boldsymbol{\Phi}_{pr}(t-\tau) \|_1 = \| \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{pr}(t-\tau)} \|_1 \leqslant m_0\mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.5}$$

将 $\Delta\boldsymbol{A}_{pr}(\boldsymbol{x}_{pr})$ 看成闭环系统的输入，则闭环系统的状态响应 $\boldsymbol{x}_{pr}(t)$ 为

$$\boldsymbol{x}_{pr}(t) = \boldsymbol{\Phi}_{pr}(t)\boldsymbol{x}_{pr0} + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}_{pr}(t-\tau)\Delta\boldsymbol{A}_{pr}(\boldsymbol{x}_{pr}(\tau))\mathrm{d}\tau$$

取上式的 1 - 范数，得

$$\| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \leqslant \| \boldsymbol{\Phi}_{pr} \|_1 \cdot \| \boldsymbol{x}_{pr0} \|_1 + \int_0^t \| \boldsymbol{\Phi}_{pr} \|_1 \cdot \| \Delta\boldsymbol{A}_{pr}(\boldsymbol{x}_{pr}(\tau)) \|_1 \mathrm{d}\tau \tag{1.6}$$

根据式(1.2)、(1.3) 和(1.4)，有

$$\begin{aligned} \| \Delta\boldsymbol{A}_{pr}(\boldsymbol{x}_{pr}) \|_1 \leqslant{} & \| \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) \|_1 + \| \boldsymbol{B}_r(\Delta\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{D}) \|_1 \leqslant \\ & \| \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \|_1 + \| \Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) \|_1 + \| \boldsymbol{B}_r \|_1(\| \Delta\boldsymbol{C} \|_1 + \| \Delta\boldsymbol{D} \|_1) \leqslant \\ & \beta_{\boldsymbol{A}} \| \boldsymbol{x} \|_1 + \beta_{\boldsymbol{B}} \| \boldsymbol{u} \|_1 + \| \boldsymbol{B}_r \|_1(\beta_{\boldsymbol{C}} \| \boldsymbol{x} \|_1 + \beta_{\boldsymbol{D}} \| \boldsymbol{u} \|_1) \leqslant \\ & [\beta_{\boldsymbol{A}} + (\beta_{\boldsymbol{B}} + \beta_{\boldsymbol{D}} \| \boldsymbol{B}_r \|_1) \| [\boldsymbol{K}_x, \boldsymbol{K}_r] \|_1 + \beta_{\boldsymbol{C}} \| \boldsymbol{B}_r \|_1] \cdot \| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \\ & \rho_{\boldsymbol{A}} \| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

类似地，有

$$\begin{aligned} \| \Delta\boldsymbol{C}_{pr}(\boldsymbol{x}_{pr}(\tau)) \|_1 ={} & \| \Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}(\tau)) + \Delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}(\tau)) \|_1 \leqslant (\beta_{\boldsymbol{C}} + \beta_{\boldsymbol{D}} \| [\boldsymbol{K}_x \quad \boldsymbol{K}_r] \|_1) \cdot \| \boldsymbol{x}_{pr}(\tau) \|_1 = \\ & \rho_{\boldsymbol{C}} \| \boldsymbol{x}_{pr}(\tau) \|_1 \end{aligned} \tag{1.8}$$

将式(1.5) 和式(1.7) 代入式(1.6)，得

$$\| \boldsymbol{x}_{pr}(t) \|_1 \leqslant m_0\mathrm{e}^{-\alpha t} \| \boldsymbol{x}_{pr0} \|_1 + \int_0^t m_0\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}\rho_{\boldsymbol{A}} \| \boldsymbol{x}_{pr}(\tau) \|_1 \mathrm{d}\tau$$

由此有

$$\| x_{pr}(t) \|_1 e^{\alpha t} \leqslant m_0 \| x_{pr0} \|_1 + \int_0^t m_0 \rho_A \| x_{pr}(\tau) \|_1 e^{\alpha\tau} d\tau \tag{1.9}$$

根据 Bellman-Gronwall 引理,设 $f(t)$, $x(t)$ 是$[t_0,\infty)$上的连续函数,而 C、N 为非负常数,若

$$| x(t) | \leqslant C + N\int_0^t | f(\tau) | \cdot | x(\tau) | d\tau, \quad \forall t \geqslant t_0$$

则有

$$| x(t) | \leqslant C e^{N\int_{t_0}^t | f(\tau) | d\tau} \quad \forall t \geqslant t_0$$

由式(1.9)得

$$\| x_{pr}(t) \|_1 e^{\alpha t} \leqslant m_0 \| x_{pr0} \|_1 e^{m_0 \rho_A \int_0^t d\tau} = m_0 \| x_{pr0} \|_1 e^{m_0 \rho_A t}$$

由此得

$$\| x_{pr}(t) \|_1 \leqslant m_0 \| x_{pr0} \|_1 e^{(m_0 \rho_A - \alpha)t} \tag{1.10}$$

由式(1.4)、(1.8)、(1.10)有

$$\| y(t) \|_1 \leqslant \| C_{pr} \|_1 \cdot \| x_{pr} \|_1 + \rho_C \| x_{pr} \|_1 \leqslant (\| C_{pr} \|_1 + \rho_C) m_0 \| x_{pr0} \|_1 e^{(m_0 \rho_A - \alpha)t} \tag{1.11}$$

由方程(1.4)和式(1.10)、(1.11)知,如果所设计的动态状态反馈控制器(A_r, B_r, K_x, K_r)满足

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda(A_{pr}) < 0 \\ \rho_A < \dfrac{\alpha}{m_0} \end{cases} \tag{1.12}$$

则闭环系统必定是鲁棒渐进稳定的。

对于上面所研究的问题,如果式(1.3)中的状态反馈控制律改为输出反馈控制律

$$u = K_y y + K_r x_r \tag{1.13}$$

则由式(1.1)和式(1.3)得闭环系统的动态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_{pr}(t) = A_{pr} x_{pr} + \Delta A_{pr}(x_{pr}) = \\ \qquad \begin{bmatrix} A + BK_y(I - DK_y)^{-1}C & BK_r + BK_y(I - DK_y)^{-1}DK \\ B_r(I - DK_y)^{-1}C & A_r + B_r(I - DK_y)^{-1}DK_r \end{bmatrix} x_{pr}(t) + \\ \qquad \begin{bmatrix} \Delta A(x) + \Delta B(u) + BK_y(I - DK_y)^{-1}(\Delta C(x) + \Delta D(u)) \\ B_r(I - DK_y)^{-1}(\Delta C(x) + \Delta D(u)) \end{bmatrix} \\ y(t) = C_{pr} x_{pr}(t) + \Delta C_{pr}(x_{pr}) = \\ \qquad [(I - DK_y)^{-1} C (I - DK_y)^{-1} DK_r] x_{pr}(t) + (I - DK_y)^{-1}(\Delta C(x) + \Delta D(u)) \\ x_{pr}(0) = [x_0^T, x_{r0}^T]^T \end{cases} \tag{1.14}$$

闭环系统(1.14)的鲁棒稳定性问题与闭环系统(1.4)的讨论类似，读者不难得出类似的结论。

二、具有结构不确定反馈系统的鲁棒稳定性(Robust Stability of Feedback Systems with Structural Uncertainty)

考虑如下具有结构不确定的多变量系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} + \Delta\boldsymbol{g}(t) * \boldsymbol{u}\end{cases} \tag{1.15}$$

式中，“$*$”表示卷积运算，函数 $\Delta\boldsymbol{g}(t)$ 为线性可变的有界函数，即

$$\| \Delta\boldsymbol{g}(t) \|_1 \leqslant m_g \mathrm{e}^{-\beta t} \tag{1.16}$$

系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$完全可控、可观，取动态反馈控制器构成如图1.2所示的闭环系统。动态反馈控制器的方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_r = \boldsymbol{A}_r\boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{B}_r\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}_r(0) = \boldsymbol{x}_{r0}, \quad \boldsymbol{x}_r \in \mathbf{R}^{n_r\times 1} \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}_x\boldsymbol{x} + \boldsymbol{K}_r\boldsymbol{x}_r, \quad \boldsymbol{K}_x \in \mathbf{R}^{p\times n}, \quad \boldsymbol{K}_r \in \mathbf{R}^{p\times n_r}\end{cases} \tag{1.17}$$

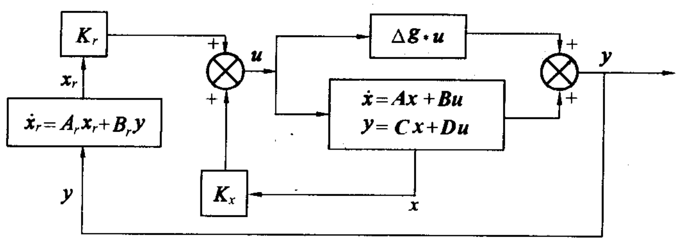


图 1.2 具有结构不确定的闭环系统

根据图1.2和方程(1.15)、(1.17)，可得闭环系统的动态方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_{pr} = \boldsymbol{A}_{pr}\boldsymbol{x}_{pr} + \Delta\boldsymbol{A}_{pr}(\boldsymbol{x}_{pr}) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_x & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_r \\ \boldsymbol{B}_r\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}_r\boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_x & \boldsymbol{A}_r+\boldsymbol{B}_r\boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_r\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_{pr} + \\ \qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_r\Delta\boldsymbol{g} * (\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{x} + \boldsymbol{K}_r\boldsymbol{x}_r)\end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_{pr}\boldsymbol{x}_{pr} + \Delta\boldsymbol{C}_{pr}(\boldsymbol{x}_{pr}) = [\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_x \quad \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_r]\boldsymbol{x}_{pr} + \Delta\boldsymbol{g} * (\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{x} + \boldsymbol{K}_r\boldsymbol{x}_r) \\ \boldsymbol{x}_{pr0} = [\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_{r0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{1.18}$$

由方程(1.18)可知，闭环系统的状态转移矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}_{pr}(t-\tau) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{pr}(t-\tau)}$。假定式

$$\| \boldsymbol{\Phi}_{pr}(t-\tau) \|_1 = \| \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_{pr}(t-\tau)} \|_1 \leqslant m_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.19}$$

成立。利用卷积表示方法，可得闭环系统的状态响应

$$\boldsymbol{x}_{pr} = \boldsymbol{\Phi}_{pr}\boldsymbol{x}_{pr0} + \boldsymbol{\Phi}_{pr}^{*}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_r\Delta\boldsymbol{g} * (\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{x} + \boldsymbol{K}_r\boldsymbol{x}_r)\end{bmatrix}$$

取上式的 1－范数，得

$$\| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \leqslant \| \boldsymbol{\Phi}_{pr} \|_1 \cdot \| \boldsymbol{x}_{pr0} \|_1 + \| \boldsymbol{\Phi}_{pr}^* \boldsymbol{B}_r \Delta \boldsymbol{g} * (\boldsymbol{K}_x \boldsymbol{x} + \boldsymbol{K}_r \boldsymbol{x}_r) \|_1$$

对上式在区间 $[0, \infty)$ 上积分，得

$$\int_0^\infty \| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^\infty \| \boldsymbol{\Phi}_{pr} \|_1 \cdot \| \boldsymbol{x}_{pr0} \|_1 \mathrm{d}t + \int_0^\infty \| \boldsymbol{\Phi}_{pr}^* \boldsymbol{B}_r \Delta \boldsymbol{g} * (\boldsymbol{K}_x \boldsymbol{x} + \boldsymbol{K}_r \boldsymbol{x}_r) \|_1 \mathrm{d}t \tag{1.20}$$

利用卷积的性质

$$\int_0^\infty \| a(t) * b(t) * c(t) \| \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^\infty \| a(t) \| \mathrm{d}t \right) \left(\int_0^\infty \| b(t) \| \mathrm{d}t \right) \left(\int_0^\infty \| c(t) \| \mathrm{d}t \right)$$

则式(1.20) 化为

$$\int_0^\infty \| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t \leqslant \| \boldsymbol{x}_{pr0} \|_1 \int_0^\infty \| \boldsymbol{\Phi}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t + \\ \| \boldsymbol{B}_r \|_1 \left(\int_0^\infty \| \boldsymbol{\Phi}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t \right) \left(\int_0^\infty \| \Delta \boldsymbol{g} \|_1 \mathrm{d}t \right) \left(\int_0^\infty \| (\boldsymbol{K}_x \boldsymbol{x} + \boldsymbol{K}_r \boldsymbol{x}_r) \|_1 \mathrm{d}t \right) \tag{1.21}$$

考虑到

$$\int_0^\infty \| \boldsymbol{\Phi}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t \leqslant m_0 / \alpha, \quad \int_0^\infty \| \Delta \boldsymbol{g} \|_1 \mathrm{d}t \leqslant m_g / \beta \tag{1.22}$$

则式(1.21) 化为

$$\int_0^\infty \| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t \leqslant \frac{m_0}{\alpha} \| \boldsymbol{x}_{pr0} \|_1 + \frac{m_0 m_g}{\alpha\beta} \| \boldsymbol{B}_r \|_1 \cdot \| [\boldsymbol{K}_x \quad \boldsymbol{K}_r] \|_1 \int_0^\infty \| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t$$

由此有

$$\int_0^\infty \| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t \leqslant \frac{\| \boldsymbol{x}_{pr0} \|_1 m_0 / \alpha}{1 - \dfrac{m_0 m_g}{\alpha\beta} \| \boldsymbol{B}_r \|_1 \cdot \| [\boldsymbol{K}_x \quad \boldsymbol{K}_r] \|_1} \tag{1.23}$$

预先假设

$$1 - \frac{m_0 m_g}{\alpha\beta} \| \boldsymbol{B}_r \|_1 \cdot \| [\boldsymbol{K}_x \quad \boldsymbol{K}_r] \|_1 > 0 \tag{1.24}$$

根据式(1.18) 和式(1.23)，有

$$\int_0^\infty \| \boldsymbol{y} \|_1 \mathrm{d}t \leqslant \| \boldsymbol{C}_{pr} \|_1 \cdot \int_0^\infty \| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t + \int_0^\infty \| \Delta \boldsymbol{g} \|_1 \| [\boldsymbol{K}_x \quad \boldsymbol{K}_r] \|_1 \| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t \leqslant \\ \| \boldsymbol{C}_{pr} \|_1 \cdot \int_0^\infty \| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t + \\ \left(\int_0^\infty \| \Delta \boldsymbol{g} \|_1 \mathrm{d}t \right) \left(\| [\boldsymbol{K}_x \quad \boldsymbol{K}_r] \|_1 \int_0^\infty \| \boldsymbol{x}_{pr} \|_1 \mathrm{d}t \right) \leqslant \\ \frac{\left[\| \boldsymbol{C}_{pr} \|_1 \dfrac{m_0}{\alpha} + \dfrac{m_0 m_g}{\alpha\beta} \| [\boldsymbol{K}_x \quad \boldsymbol{K}_r] \|_1 \right] \cdot \| \boldsymbol{x}_{pr0} \|_1}{1 - \dfrac{m_0 m_g}{\alpha\beta} \| [\boldsymbol{K}_x \quad \boldsymbol{K}_r] \|_1 \cdot \| \boldsymbol{B}_r \|_1} \tag{1.25}$$

其中，据式(1.18)可知，$\| \boldsymbol{C}_{pr} \|_1 = \| [\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_x \quad \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_r] \|_1$。

如果式(1.24)成立，则式(1.23)和式(1.25)不等号的右边均为正常数。这表明，系统动态反馈控制器的设计只要使

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\lambda(\boldsymbol{A}_{pr}) < 0 \\ \| [\boldsymbol{K}_x \quad \boldsymbol{K}_r] \|_1 < \dfrac{\alpha\beta}{m_0 m_g \| \boldsymbol{B}_r \|_1} \end{cases} \tag{1.26}$$

成立，就可保证具有结构不确定的闭环系统(1.18)具有鲁棒渐进稳定性。

例 1.1 考虑如下线性动态系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

假定该系统经非线性参数摄动后，变为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} -\sin(x_1) \\ 0.5\sqrt{|x_1 x_2|} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1\sin(u_1) \\ 0.1\sin(u_2) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

现按图 1.1 设计鲁棒控制器，使摄动系统稳定。

根据式(1.2)，有

$$\| \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \| \leqslant 1.5 \| \boldsymbol{x} \|, \quad \| \Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) \| \leqslant 0.2 \| \boldsymbol{u} \|$$

即

$$\beta_A = 1.5, \quad \beta_B = 0.2, \quad \beta_C = 0, \quad \beta_D = 0$$

根据式(1.3)，取动态控制器，即

$$\dot{\boldsymbol{x}}_r = \boldsymbol{A}_r\boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{B}_r\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_r + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}_r\boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{K}_x\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_r + \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

可得闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{pr} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_r & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_r \\ \boldsymbol{B}_r\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_r \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_{pr} + \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{B}_r\Delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -12 & 1 & -7 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_{pr} + \begin{bmatrix} -\sin(x_1) + 0.1\sin(u_1) \\ 0.5\sqrt{|x_1 x_2|} + 0.1\sin(u_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$