

苏联十年制学校数学教材

# 几 何

6—8 年 级

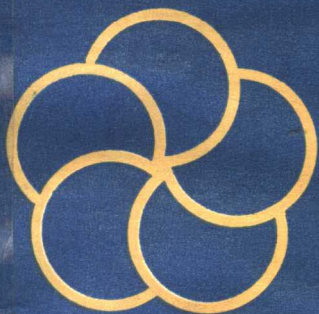


A·H·柯尔莫戈洛夫 主编

---

译 者

钟善基 刘远图 饶汉昌  
鲍 龙 陈宏伯 王正旭



人民教育出版社

苏联十年制学校数学教材

# 几 何

6—8 年级

A·H·柯尔莫戈洛夫 主编

钟善基 刘远图 饶汉昌 译  
鲍 龙 陈宏伯 王正旭

人民教育出版社

1981 年·北京

## 内 容 提 要

本书是根据苏联十年制学校数学教材《几何(6—8年级)》(A·H·柯尔莫戈洛夫主编)1979年版翻译的。全书共分十章:几何的基本概念,图形的合同和位移,平行和垂直,多边形,向量,相似,旋转和三角函数,三角形中的度量关系,内接和外切多边形,立体几何的初步知识。

本书是为研究国外中小学数学教学改革情况而出版的,可供中学数学教学研究人员、师范院校数学系师生以及中学数学教师参考。

苏联十年制学校数学教材

### 几 何

6—8 年级

A·H·柯尔莫戈洛夫 主编

钟善基 翻译

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 15 字数 310,000

1981年5月第1版 1981年10月第1次印刷

印数 1—4,000

书号 7012·0432 定价 1.10 元

(限国内发行)

## 翻 译 说 明

本书是根据苏联十年制学校数学教材《几何(6—8年级)》1979年版翻译的。原书是在1977年版的基础上经过修改和精简而成的。对于中学几何教材的体系和内容,同传统几何课本相比,本书作了较大的改革。本书所依据的公理体系是本书主编A·H·柯尔莫戈洛夫院士提出的(见本书附录“关于几何的逻辑结构”),而且使用了集合论的语言,增加了几何变换的思想和方法。由于使用集合论的语言,本书一开始就将几何图形定义为点集。这样处理的结果,使得图形的概念更加精确化了。例如,“圆”和“圆周”在本书中是两个完全不同的图形;而多边形被定义为简单折线和它的内部的并集。在证明方法方面,本书主要是以几何变换和向量作为证明几何事实的手段,这同传统几何也是不同的。此外,读者还可以从本书中发现其他许多特点。对于从事中学数学教学研究人员和中学教师来说,首先阅读本书附录“关于几何的逻辑结构”,然后再读正文,也许更容易了解本书的概貌。

本书第五至十章由钟善基翻译,第一章及附录由刘远图翻译,第二章由饶汉昌和鲍龙翻译,第三章由陈宏伯翻译,第四章由王正旭和刘远图翻译。全书经刘远图统一校阅。限于水平,译文一定有许多欠妥甚至错误的地方,欢迎读者批评指正。

译 者 1981年4月

# 目 录

## 六 年 级

<b>第一章 几何的基本概念</b> .....	1
1. 什么是几何图形 .....	1
2. 不给出定义的基本概念 .....	5
3. 量和数 .....	6
4. 距离的基本性质 .....	8
5. 直线上三点的位置关系, 三角形不等式 .....	13
6. 线段和射线 .....	16
7. 直线上的坐标 .....	20
8. 折线 .....	23
9. 平面, 平面几何 .....	28
10. 区域 .....	33
11. 多边形 .....	37
12. 半平面, 角 .....	41
13. 两个圆周的相互位置 .....	46
14▼. 几何学的历史简述 .....	49
第一章补充习题 .....	53
<b>第二章 图形的合同和位移</b> .....	58
§ 1. 合同 .....	58
15. 图形的映射 .....	58
16. 保持距离不变的映射 .....	64
17. 合同图形 .....	69
18. 角的度量 .....	73
§ 2. 位移 .....	79
19. 旋转 .....	79

20. 中心对称 .....	85
21. 轴对称 .....	90
22. 三角形的作图 .....	95
§ 3. 图形的对称 .....	102
23. 圆周的对称轴 .....	102
24. 线段的对称轴 .....	105
25. 角和等腰三角形的对称轴 .....	108
26. 点到直线的距离, 角的平分线的性质 .....	112
27▼. 对称图形 .....	117
§ 4. 圆周 .....	122
28. 圆周上弧的度数 .....	122
29. 直线和圆周的相关位置 .....	125
30. 作图问题 .....	128
第二章补充习题 .....	132

## 七 年 级

<b>第三章 平行和平移</b> .....	139
§ 1. 平行线 .....	139
31. 直线的平行和中心对称 .....	139
32. 平行公理 .....	142
33▼. 非欧几何, 几何和物理 .....	145
§ 2. 平移 .....	149
34. 等价关系 .....	149
35. 方向 .....	151
36. 平移 .....	155
37. 两方向之间的夹角 .....	161
38. 多边形的内角和 .....	164
第三章补充习题 .....	168
<b>第四章 多边形</b> .....	173

§ 1. 三角形 .....	173
39. 确定三角形的元素 .....	173
40. 三角形的边和角的关系 .....	178
§ 2. 四边形 .....	181
41. 平行四边形 .....	181
42. 互逆定理 .....	185
43▼. 必要条件和充分条件 .....	190
44. 矩形 .....	193
45. 菱形 .....	197
46. 正方形 .....	199
47. 法勒斯定理 .....	202
48. 梯形 .....	205
§ 3. 多边形的面积 .....	208
49. 关于图形面积的一般知识 .....	208
50. 平行四边形的面积 .....	214
51. 三角形的面积 .....	216
52. 梯形的面积 .....	219
53. 多边形的面积 .....	220
第四章补充习题 .....	222
<b>第五章 向量</b> .....	229
54. 位移的合成 .....	229
55. 向量及其表示方法 .....	235
56. 向量的和 .....	240
57. 向量的加法定律, 向量的减法 .....	244
58. 以数乘向量的乘法 .....	249
59. 向量的坐标 .....	252
60▼. 向量和物理学中的矢性量 .....	256
第五章补充习题 .....	258
<b>第六章 相似</b> .....	262

§ 1. 相似和位似 .....	262
61. 相似形 .....	262
62. 位似 .....	267
63. 位似的性质 .....	271
64. 比例线段 .....	275
65. 相似变换 .....	280
§ 2. 相似多边形 .....	283
66. 相似三角形的判定 .....	283
67. 毕达哥拉斯定理 .....	292
68. 相似多边形 .....	296
69. 测量工作 .....	302
第六章补充习题 .....	310

## 八 年 级

<b>第七章 旋转和三角函数</b> .....	313
§ 1. 旋转和旋转的合成 .....	313
70. 给定旋转的方法 .....	313
71. 角的大小, 弧度制 .....	316
72. 有公共中心的旋转的合成 .....	319
§ 2. 三角函数 .....	322
73. 用坐标表示的位移 .....	322
74. 正弦和余弦 .....	324
75. 关于正弦和余弦的一些恒等式 .....	330
76. 正弦表和余弦表 .....	334
77. 正切 .....	336
78. 直角三角形的边和角之间的关系 .....	339
第七章补充习题 .....	343
<b>第八章 三角形中的度量关系</b> .....	345
§ 1. 正弦定理和余弦定理 .....	345



79. 正弦定理 .....	345
80. 计算三角形面积的公式 .....	348
81. 正弦定理 .....	350
§ 2. 相似与三角公式的一些应用 .....	352
82. 相似在解题上的应用 .....	352
83. 测量工作 .....	360
84▼. 解三角形 .....	362
第八章补充习题 .....	366
<b>第九章 内接和外切多边形</b> .....	<b>368</b>
§ 1. 三角形和四边形 .....	368
85. 内接角 .....	368
86. 内接和外切三角形 .....	371
87▼. 内接和外切四边形 .....	374
§ 2. 正多边形 .....	378
88. 正多边形的作图 .....	378
89. 计算正多边形的边长和面积的公式 .....	381
§ 3. 圆周长和圆面积 .....	385
90. 圆周长 .....	385
91. 圆面积 .....	390
第九章补充习题 .....	392
<b>第十章 立体几何的初步知识</b> .....	<b>395</b>
§ 1. 空间的直线和平面 .....	395
92. 空间平面的位置关系 .....	395
93. 空间的平行线 .....	397
94. 直线和平面的垂直 .....	399
§ 2. 多面体 .....	402
95. 直棱柱 .....	402
96. 棱锥 .....	406
97▼. 体积的一般性质 .....	410

§ 3. 旋转图形 .....	412
98. 圆柱 .....	412
99. 圆锥 .....	415
100. 球 .....	418
第十章补充习题 .....	420
<b>六——八年级几何课程的复习题</b> .....	424
<b>答案和提示</b> .....	432
<b>附录</b> .....	452
关于几何的逻辑结构 .....	452
几何中的集合论语言 .....	456
几何公式 .....	457
三角公式 .....	460
希腊字母 .....	461
本书中使用的符号 .....	462
<b>译名索引</b> .....	464

# 六年级

## 第一章 几何的基本概念

在一至五年级里,你们已经学过几何的知识,认识了许多几何图形及其性质;知道了某些几何概念的定义以及某些证明.现在你们得到的这本书,将专门讲述系统的几何课程的基本内容.自然,本书中将注意复习已经学过的内容.同时,你们以前学过的概念几乎全部将给出精确的定义,而以前没有证明就承认的某些命题将予以证明.在第一章的末尾部分,你们可以看到几何是怎样发展起来的,以及什么时候对于几何叙述的逻辑严密性开始发生兴趣.

### 1. 什么是几何图形?

1. 线段、圆、三角形——这些都是你们熟悉的几何图形.你们还学过图1中画出的那些图形.

什么是“几何图形”呢?我们从一个例子讲起.

我们来看看半径为1.5cm的圆周(图2).它是由平面上和中心 $O$ 的距离等于1.5cm的所有的点组成的.例如, $|AO|=1.5\text{cm}$ (这种记号读作:距离 $|AO|$ 等于1.5厘米).如果点 $M$ 不属于这个圆周,那么 $|MO|\neq 1.5\text{cm}$ .

图3上的圆周的半径记作 $r$ .对于这个圆周的任意一点 $X$ ,有 $|XO|=r$ .如果点 $M$ 不属于圆周,那么 $|MO|\neq r$ .

因此,任一圆周都是由平面上和它的中心的距离等于这

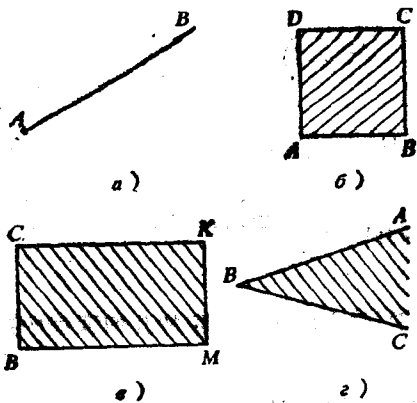


图 1

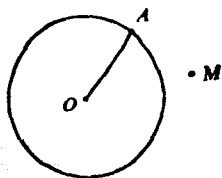


图 2

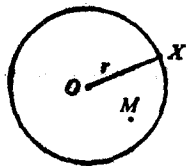


图 3

个圆周的半径的所有的点组成的。因此，可以采用下面的定义。

**定义** 在同一平面上，和已知点的距离为已知正数的点的集合，叫做圆周。

圆心为  $O$ 、半径为  $r$  的圆周记作：圆周  $(O, r)$ 。

上面我们把圆周定义为一个点集。每一个几何图形都是点集。几何中对于“几何图形”的概念有如下定义。

**定义** 任一点集叫做几何图形\*。

2. 圆周被定义为具有上述性质的点集。在定义其他几何图形时，也可以同样处理，即指出组成所定义的图形的点具有的性质。

例如，我们来给出圆的定义。不难看出，半径为  $r$  的圆的

\* 通常也把空集看作是几何图形。

点在同一平面上, 而且和圆心的距离小于或等于  $r$  (图 4).

定义 在同一平面上, 和已知点的距离不大于已知正数  $r$  的点的集合, 叫做圆.

圆心为  $O$ 、半径为  $r$  的圆记作: 圆  $(O, r)$ .

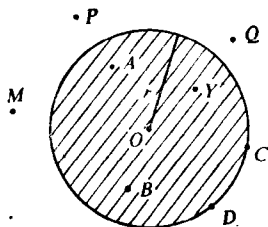


图 4



图 5

3. 你们知道许多物体是球形的. 球的表面叫做球面. 例如, 地球近似于球形(图 5), 而它的表面可以看作是球面; 它上面的点和地球中心的距离约等于 6400 公里.

定义 空间中和已知点的距离等于已知正数的点的集合, 叫做球面.

球面的定义和圆周的定义十分相似. 唯一的差别在于圆周的定义中只考虑一个平面的点, 而球面的定义是就空间的点而言的.

几何里全体点的集合叫做空间. 每一个几何图形是空间的子集.

### 问题和习题\*

- 1° 1) 说出你所知道的几何图形.  
2) 说出具有下列形状的物体: a) 长方体; б) 球; в) 圆柱.
2. 求作以已知点  $O$  为中心、半径为  $4\text{cm}$  的圆周. 在作出的图上(不用圆规和刻度尺)标出:
- 1) 点  $A, B, C$ , 且  $|OA| < 4\text{cm}$ ,  $|OB| < 4\text{cm}$ ,  $|OC| < 4\text{cm}$ ;  
2) 点  $D, E, F$ , 且  $|OD| = 4\text{cm}$ ,  $|OE| = 4\text{cm}$ ,  $|OF| = 4\text{cm}$ ;  
3) 点  $L, M, N$ , 且  $|OL| > 4\text{cm}$ ,  $|OM| > 4\text{cm}$ ,  $|ON| > 4\text{cm}$ ;  
4) 用符号  $\in$  和  $\notin$  写出: a) 点  $A$  不属于圆周  $(O, r)$ ; б) 点  $D$  属于圆周  $(O, r)$ ; в) 点  $L$  不属于圆周  $(O, r)$ .
- 3° 1) 圆周的圆心属于圆周吗?  
2) 圆心属于圆吗?
4. 利用符号  $\in$  和  $\notin$  表示图 4 上标出的各点是否属于已知圆.
5. 已知点  $A, B$  和  $C$ . 就图形 1)  $\{A, B\}$  和 2)  $\{A, B, C\}$ , 分别写出它们所包含的各个几何图形.
6. 作半径为  $3\text{cm}$  的圆周. 在这个圆周上可以找到满足下列条件的点  $M$  和  $N$  吗?

---

\* 本书中题号上角有小圆圈的最好口答. 上角有星号的表示比较难的习题.

- 1)  $|MN|=2\text{cm}$ ; 2)  $|MN|=3\text{cm}$ ; 3)  $|MN|=6\text{cm}$ ;  
 4)  $|MN|=7\text{cm}$ .
- 7\* 1) 在一个平面上以已知点  $O$  为中心、且半径  $r$  一定的圆周有多少个? 2) 在空间中呢?
- 8\* 地球可以近似地看作球。1) 说出你们在地理课中学过的中心在地球中心的圆周的名称。2) 说出地球仪上画出的圆周。
- 9\* 地球人造卫星的轨道通常近似于圆形。假设人造卫星沿着中心在地球中心的圆形轨道运行, 回答下列问题。1) 能不能发射 1000 个人造卫星而又不致于使它们的轨道相交? 2) 能不能发射两个人造卫星, 使它们按半径相同而又不相交两个不同的轨道运行?
10. 以  $O$  为中心分别作半径为  $r_1$  和  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) 的两个圆周。用阴影线分别表示由满足下列条件的点  $X$  组成的图形:  
 1)  $|OX| \geq r_1$ ; 2)  $|OX| \leq r_1$ ; 3)  $r_1 \leq |OX| \leq r_2$ .
- 

## 2. 不给出定义的基本概念

前一小节中给出了圆周、圆、球面和几何图形的定义。现在我们来研究怎样下定义。

我们在定义“圆周”的概念时, 利用了“集合”、“点”、“平面”和“距离”等概念。一般地说, 在定义任何一个概念时, 只能利用已经学过的其他的概念。但并不是所有的概念都能给出定义。因此, 其中某些概念必须不加定义就予以承认。这些概念叫做基本概念。所有其他的概念都要定义。

在我们的几何课程中, 基本的几何概念有四个: 1) 点;

2) 直线; 3) 平面; 4) 一点到另一点的距离。

除了这些特殊的几何概念以外, 我们还将用到某些一般的数学概念。例如, 我们在第 1 小节中用到的“集合”的概念(它也是整个数学的基本概念之一)。在下一小节中, 我们将谈到的量和数也是一般的数学概念。

### 问题和习题

- 11° 说出几个给出定义的几何概念。
- 12° 说出在定义下列概念时用到了哪些基本的几何概念:  
1) 几何图形; 2) 圆周; 3) 圆。
13. 作一对邻补角  $AOB$  和  $BOC$ 。这两个角的交是什么图形? 它们的并呢? 回忆邻补角的定义。
14. 写出对顶角的定义。在这个定义中用到哪些几何概念?
15. 写出球的定义。
16. 1) 两个圆的交是怎样的图形?  
2) 图 6 上画出的图形叫做“透镜”。  
给出这种图形的定义。



图 6

- 17.\* 如果存在一个圆, 它能包含整个图形, 那么就就说这个图形是有限的。点、圆、线段、直线、角、三角形、射线、正方形是有限图形吗? 举出有限图形和无限图形的其他例子。

### 3. 量和数

你们已经学过自然数、整数和分数。也曾经见到过各种不同的量——长度、面积、体积。

再举两个例子。

- 1) 点和点之间的距离, 线段、折线和曲线的长度——这



些都是同类的量，它们都可以用厘米、米、公里等等表示。

2) 时间间隔的长短也是同类的量，它可以用秒、分、小时等等表示。

同类的量之间可以进行比较，也可以相加。

$$1\text{m} > 90\text{cm}, \quad 350\text{m} + 650\text{m} = 1\text{km};$$

$$3000 \text{ 秒} < 1 \text{ 小时}, \quad 2 \text{ 小时} + 3 \text{ 小时} = 5 \text{ 小时};$$

$$1 \text{ kg} > 720\text{g}, \quad 500\text{g} + 500\text{g} = 1\text{kg}.$$

但是，象“1米长还是1小时长”这样的问题是没有意义的，也不能将1米和30秒相加。时间间隔的长短和距离是不同类的量。不同类的量不能相加，也不能比较大小。

量可以用正数和零去乘。量 $a$ 乘以非负数 $x$ ，结果得到同类量 $b = xa$ 。我们举几个例子。

$$5 \times 20\text{cm} = 100\text{cm} = 1\text{m},$$

$$0.01 \times 20\text{cm} = 0.2\text{cm} = 2\text{mm},$$

$$0 \times 20\text{cm} = 0\text{cm}.$$

任意选定一个量 $e$ 作为度量单位，就可以用它来度量任何其他的同类量 $a$ 。度量的结果是 $a = xe$ ，其中 $x$ 是一个数，这个数叫做以 $e$ 为度量单位时量 $a$ 的数值。量的数值取决于度量单位的选择。例如，用米作度量单位( $e = 1\text{m}$ )时，房间的长度的数值是5.6，那么用厘米作度量单位( $e = 1\text{cm}$ )时，同一长度的数值就是560。

设度量单位都是 $e$ ，量 $a$ 和 $b$ 的数值分别等于 $x$ 和 $y$ ，即 $a = xe, b = ye$ 。如果 $b \neq 0$ ，那么比 $\frac{x}{y}$ 叫做量 $a$ 和 $b$ 的比。