面向21世纪高等院校工科工程数学教材

概率论与数理统计

Probability and Statistics

汤大林　张玉环　陈淑敏　王菁　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

面向21世纪高等院校工科工程数学教材

概率论与数理统计

汤大林　张玉环　陈淑敏　王　菁　编

天津大学出版社
Tianjin University Press

内容提要

本书是根据编者多年工科概率论与数理统计的教学实践，按照面向21世纪教材改革的精神，并结合概率论与数理统计课程的教学大纲编写而成.

本书分为两大部分，共分9章.第一部分为概率论，包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等5章；第二部分为数理统计，包括了数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等4章.每章均配有习题.书后配备了各章习题的参考答案及简明提示，并附有几种常用的分布表.

本书体现了“多统计少概率”的精神，全书结构合理、逻辑清晰、例题丰富，适合工科高等院校各类专业作为教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 /汤大林等编.—天津：天津大学出版社，2004.9(2005.1重印)
ISBN 7-5618-2003-8

Ⅰ.概… Ⅱ.汤… Ⅲ.①概率论②数理统计
Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第076038号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷 永清县晔盛亚胶印有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 170mm×240mm
印　　张 16.25
字　　数 366千
版　　次 2004年9月第1版
印　　次 2005年1月第2次
印　　数 3001-7000
定　　价 21.00元

前　言

《概率论与数理统计》是大学工科、经济类、管理类等各专业本科生必修的基础课程.我们根据国家教育部审定的高等院校“高等数学课程教学基本要求”(教学大纲)及工程教学课程体系改革的精神,编写了这本《概率论与数理统计》教材.该教材可作为高等院校工科工程数学——概率论与数理统计课程的教材,也可作为工程技术人员学习概率论与数理统计有关内容的参考书.

该教材体现了“多统计、少概率、重应用”的精神,力求做到基本概念叙述清楚,配备一定数量的典型例题,并对每章中的重点及难点做了必要的小结,为读者今后进一步学习有关课程或在实际应用方面提供一定的理论基础和基本方法.书后还为读者提供了每章习题的参考答案,并对较难习题给出了提示,便于读者练习时对照参考,并配套出版一本全部习题的详细解答.

本教材分为两大部分.第一部分为概率论部分(第1章至第5章),作为基础知识讲授,约32课时.第二部分为数理统计部分(第6章至第9章),介绍了常用的统计推断方法、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析,作为后续内容讲授,约32课时.可根据不同专业的需要讲授该教材的内容.书中带*号的章节可作为选讲内容,由教师自行安排.

本教材由天津理工大学理学院具有多年从事该课程教学经验的教师汤大林、张玉环、陈淑敏、王菁编写.其中第1章、第2章由王菁编写,第3章、第4章由张玉环编写,第5章由汤大林编写,第6章、第7章由陈淑敏编写,第8章、第9章由汤大林编写.全书由苗文利副教授、韩天锡教授及姬振豫教授审阅,他们提出了一些宝贵的意见,在此我们一并表示衷心的感谢.

由于我们水平有限,书中难免存在不足之处,敬请读者指正,以便再版时修订.

编者

2004年5月

目　录

第 1 章 概率论的基本概念

1.1 随机事件与样本空间

自然界有许多现象,我们完全可以预言它们在一定条件下是否会出现.有一类现象,在一定条件下必然发生.例如,向上抛一枚硬币,由于受到地心引力的作用,硬币必然下落;同性电荷必相互排斥等等.这类现象称为确定性现象.另一类现象是在一定的条件下,可能出现也可能不出现.例如,掷一枚硬币,落地时可能是正面(有币值的一面)朝上,也可能是反面朝上;自动机床加工制造一个零件,可能是合格品,也可能是不合格品;射击运动员一次射击,可能击中 10 环,也可能击中 9 环、8 环……甚至脱靶等等.这类现象在试验或观察之前不能预知确切的结果,但人们经过长期实践并深入研究之后,发现这类现象在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现出某种规律性.例如,多次重复掷一枚硬币得到正面朝上大致有一半;同一位射击手射击同一目标的弹着点按照一定规律分布;同一机床生产的产品,其合格品和不合格品也是按一定的规律分布的等等.这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性就是我们以后所说的统计规律性.

这种在个别试验中其结果呈现出不确定性,在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象,称为随机现象.概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

概率统计的理论与方法的应用很广泛,几乎遍及所有的科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门.例如气象预报、地震预报;产品的抽样验收;可靠性研究等.

1.1.1 随机试验

为了研究随机现象的统计规律,把各种科学试验和对某一事物的观测统称为试验.如果试验具有下述特点:

(1) 试验可以在相同条件下重复进行;

(2) 每次试验的所有可能结果都是明确可知的,并且不止一个;

(3) 每次试验之前不能预知将会出现哪一个结果.

则称这种试验为随机试验(简称试验).通常用字母 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示随机试验.

例 1.1 试验 E_1:掷一枚硬币,观察正面 H(有币值的一面)、反面 T 出现的情况.

例 1.2 试验 E_2:将一枚硬币抛掷 3 次,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

例 1.3 试验 E_3:将一枚硬币抛掷 3 次,观察出现正面的次数.

例 1.4 试验 E_4:从一批产品中任意取 10 个样品,观察其中的次品数.

例 1.5 试验 E_5:记录某段时间内电话交换台接到的呼唤次数.

例 1.6 试验 E_6:测量某个零件的尺寸与规定尺寸的偏差.

1.1.2 样本空间、随机事件

1.样本空间

对于随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的所有可能结果组成的集合是已知的.将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 Ω.样本空间中的元素,即 E 的每个结果,称为样本点,记为 $\omega_1,\omega_2,\cdots$.

下面写出 1.1.1 中试验 $E_k(k=1,2,\cdots,6)$的样本空间Ω_k.

$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$,其中样本点 ω_1 表示"出现正面 H",ω_2 表示"出现反面 T";

$\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_8\}$,其中 $\omega_i(i=1,2,\cdots,8)$分别表示$\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$;

$\Omega_3=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$,其中 ω_i 表示"抛掷硬币 3 次出现正面 H 共 i 次"$(i=0,1,2,3)$;

$\Omega_4=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{10}\}$,其中 ω_i 表示"任取的 10 个样品中有 i 个次品"$(i=0,1,2,\cdots,10)$;

$\Omega_5=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$,其中 ω_i 表示"在该段时间内电话交换台接到 i 次呼唤"$(i=0,1,2,\cdots)$;

$\Omega_6=\{\omega_x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$,其中 ω_x 表示测得该零件的尺寸与规定尺寸的偏差为 x $(a\leqslant x\leqslant b)$.

应该注意的是:样本空间的元素是由试验的目的确定的.例如,在 E_2 和 E_3 中同是将一枚硬币连抛 3 次,由于试验的目的不一样,其样本空间也不一样.

2.随机事件

在实际进行随机试验时,人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合,试验 E 的样本空间Ω 的子集称为随机事件,简称事件,用 A,B,C……表示.在每次试验的所有可能结果中,显然有且仅有一个样本点 ω 发生,如果这个样本点 ω 属于随机事件A,那么随机事件 A 也就发生了;反之,如果这个样本点 ω 不属于随机事件A,那么随机事件 A 就不发生.

我们仍以 1.1.1 试验 $E_k(k=1,2,\cdots,6)$为例,考虑随机事件 A_1,A_2,B,C,D,E 和 F.

例 1.7 在试验 E_1 中,A_1——"正面朝上",A_2——"反面朝上",即 $A_1=\{\omega_1\}$,$A_2=\{\omega_2\}$,A_1,A_2 都是 Ω_1 的子集.

例 1.8 在试验 E_2 中,B——"两次出现正面,一次出现反面",即 $B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$,这里 B 是样本空间Ω_2 的子集.

例 1.9 在试验 E_3 中,C——"出现正面的次数为 1 至 3",即 $C=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$,$C$ 是Ω_3 的子集.

例 1.10　在试验 E_4 中，D——"取出 10 个样品中有 3 至 5 个次品"，即 $D=\{\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$，$D$ 是 Ω_4 的子集.

例 1.11　在试验 E_5 中，E——"在这段时间内电话交换台接到的呼唤次数不超过 8 次"，即 $E=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_8\}$，$E$ 是 Ω_5 的子集.

例 1.12　在试验 E_6 中，F——"测得零件的尺寸与规定尺寸的偏差小于 0.1 mm"，即 $F=\{\omega_x \mid |x|<0.1\}$（这里假设 $a<-0.1<x<0.1<b$），F 是 Ω_6 的子集.

特别，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件.例如试验 E_1 有两个基本事件 $\{\omega_1\}$ 和 $\{\omega_2\}$；试验 E_4 有 11 个基本事件 $\{\omega_0\},\{\omega_1\},\cdots,\{\omega_{10}\}$.

样本空间 Ω 包含所有的样本点，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件.空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

如"同性电荷相互排斥"是必然事件，"同性电荷相互吸引"是不可能事件.

1.2　事件间的关系与事件的运算

1.2.1　事件间的关系

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理.下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据"事件发生"的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 Ω，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A.这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，称为事件 A 与事件 B 的并事件.当且仅当事件 A,B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的并事件.

(3) 事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的交事件.当且仅当事件 A、B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生.$A\cap B$ 也记作 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件；$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的交事件.

(4) 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的或互斥的.这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生.基本事件是两两互不相容的.

将两个互不相容事件 A 与 B 的并记作 $A+B$.

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件不可能同时发生，即

$A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n)$，

则称这 n 个事件是互不相容的(或互斥的).

记 n 个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$(简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$).

(5) 事件 $A-B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件.当且仅当事件 A 发生、事件 B 不发生时,事件 $A-B$ 发生.

(6) 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为逆事件.又称事件 A 与事件 B 互为对立事件.这指的是对每次试验而言,事件 A、B 中必有一个发生,且仅有一个发生.A 的对立事件记为 $\bar{A}$,$\bar{A}=\Omega-A$.于是有

$$\bar{\bar{A}}=A,\quad A\bar{A}=\varnothing,\quad A+\bar{A}=\Omega.$$

若用平面上某个矩形区域表示样本空间 Ω,矩形区域内的点表示样本点,则上述事件的关系及运算可以用集合图形直观地表示出来(图 1.1).

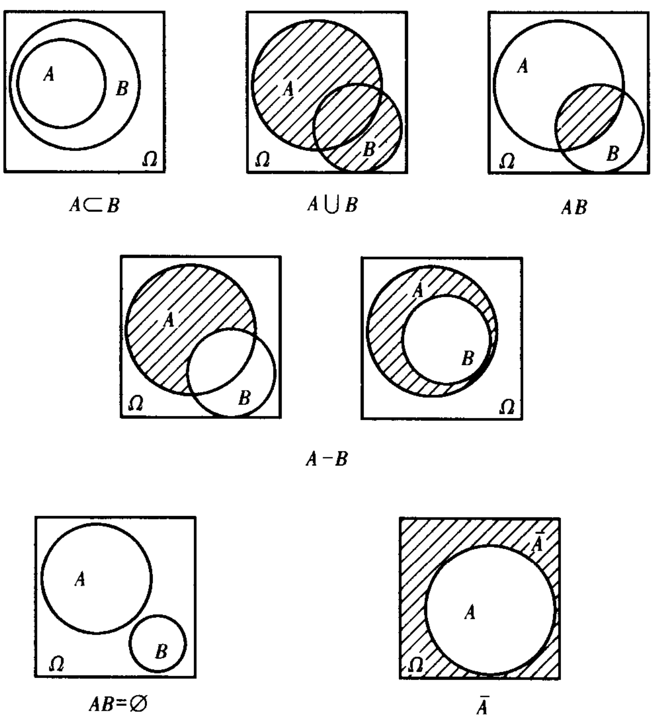

图 1.1

1.2.2 事件的运算

与集合运算的性质类似,事件的运算具有下面的性质,设 A,B,C 为事件.

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 德·摩根(De Morgan)定律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$;　$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

对于 n 个事件，有 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i$,　$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i$.

例 1.13　如图 1.2 所示的电路中，设事件 A、B、C 分别表示继电器接点 a、b、c 闭合，事件 D 表示指示灯亮，则因为当且仅当接点 a 闭合，且接点 b 与 c 中至少有一个闭合时，指示灯亮，所以有

$$D=A(B\cup C).$$

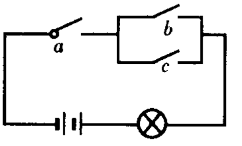

图 1.2

反之，当且仅当"接点 a 未闭合"与"接点 b 及 c 都未闭合"这两个事件中至少有一个事件发生时，指示灯不亮．所以有

$$\bar{D}=\bar{A}\cup(\bar{B}\bar{C}).$$

显然，这个等式也可以由等式 $D=A(B\cup C)$.利用上述的德·摩根定律得到，事实上，有

$$\bar{D}=\overline{A(B\cup C)}=\bar{A}\cup(\overline{B\cup C})=\bar{A}\cup(\bar{B}\bar{C}).$$

1.3　频率与概率

当多次进行某一随机试验 E 时，常常会察觉某些事件出现的可能性要大些，而另一些事件出现的可能性要小些．例如，为了确定水坝的高度，就要知道河流在建造水坝的地段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小．我们希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率．

1.3.1　频率

定义 1.1　在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数．比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，并记为 $f_n(A)$.

例如掷 100 次硬币中若得到 51 次正面，那么得"正面"这一事件在这 100 次试验中的频率为 $\frac{51}{100}$，频数为 51.

由定义，易见频率具有下述基本性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

由此可以给出如下度量事件发生可能性大小的概率的定义.

1.3.2 概率

定义 1.2 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间．对于 Ω 的每一事件 A 赋给一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots. \tag{1.1}$$

式(1.1)称为概率的可列可加性．

容易想到，一般地如 A 出现的可能性愈大，频率 $f_n(A)$ 也愈大；反之，如果 $f_n(A)$ 愈大，那么，可以设想 A 出现的可能性也愈大．因此频率与概率间有紧密的关系．以后可以证明：在相当广泛的条件下，当 $n\to\infty$ 时，在一定意义下，$f_n(A)$ 趋于 A 的概率．

因此，当 n 充分大时，可以取频率作为概率的近似值．在许多实际问题中，当概率不易求时，往往就是这样的．

频率具有重大的意义，这一方面是由于它能适当地反映 A 出现可能性的大小，另一方面，频率的概念比较简单，容易掌握，我们常常可以根据频率的性质去推想概率的性质，这就是在这里引进频率的原因．

由概率的定义，可以推得概率的一些重要性质．

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

证 令 $A_n=\varnothing\,(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$．由概率的可列可加性(1.1)得

$$P(\varnothing)=P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

而实数 $P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式可知，$P(\varnothing)=0$．

性质 2 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1.2}$$

式(1.2)称为概率的有限可加性．

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，即有 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots$．由式(1.1)得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

性质 3 设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A), \tag{1.3}$$

$$P(B)\geqslant P(A). \tag{1.4}$$

证 由 $A\subset B$ 知 $B=A\cup(B-A)$（图 1.1），且 $A(B-A)=\varnothing$，再由概率的有限可加性(1.2)得

$$P(B)=P(A)+P(B-A).$$

式(1.3)得证.由概率定义中的条件(1),知 $P(B-A)\geqslant 0$,因此

$$P(B)\geqslant P(A).$$

性质 4　对于任一事件 A,$P(A)\leqslant 1$.

证　因 $A\subset\Omega$,由性质 3 得

$$P(A)\leqslant P(\Omega)=1.$$

性质 5　对于任一事件 A,有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

证　因 $A\cup\bar{A}=\Omega$,且 $A\bar{A}=\varnothing$,由式(1.2)得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A}),$$

从而有　$P(\bar{A})=1-P(A)$.

性质 6　对于任意两事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.5}$$

证　因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$(参见图 1.1),且 $A(B-AB)=\varnothing$,$AB\subset B$,故由式(1.2)及式(1.3)得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

式(1.5)还能推广到多个事件的情况.例如,设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1P_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3). \tag{1.6}$$

一般,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,可以用归纳法证得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.7}$$

1.4　古典概型和几何概型

1.4.1　古典概型

1.1.1 中所说的随机试验 E_1 具有下列两个特征:

(1) 试验的样本空间的元素只有有限个;

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验是大量存在的.这种试验称为古典概型或等可能概型.古典概型的一些概念具有直观、容易理解的特点,并有着广泛的应用.

下面讨论古典概型中事件概率的计算公式.

设试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$.由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同,即有

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n).$$

又由于基本事件是两两互不相容的,于是

$$
\begin{aligned}
1 = P(\Omega) &= P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \cdots \cup \omega_n) \\
&= P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) \\
&= nP(\omega_i),
\end{aligned}
$$

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

若事件 A 包含 k 个基本事件,即 $A = \omega_{i_1} \cup \omega_{i_2} \cup \cdots \cup \omega_{i_k} (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n)$,则有

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\omega_{i_j}) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件的总数}} \tag{1.8}$$

式(1.8)就是等可能概型中事件 A 的概率计算公式.

例 1.14 将一枚硬币抛掷三次.

(1) 设事件 A_1 为"恰有一次出现正面",求 $P(A_1)$;

(2) 设事件 A_2 为"至少有一次出现正面",求 $P(A_2)$.

解 (1) 考虑 1.1.1 中 E_2 的样本空间

$$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

而 $$A_1 = \{HTT, THT, TTH\}.$$

Ω_2 中包含有限个元素,且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同.故由式(1.8)得

$$P(A_1) = \frac{3}{8}.$$

(2) 由于 $\bar{A}_2 = \{TTT\}$,于是

$$P(A_2) = 1 - P(\bar{A}_2) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

若本题考虑 1.1.1 中 E_3 的样本空间

$$\Omega_3 = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$

则由于 $P(\omega_0) = \frac{1}{8}, P(\omega_1) = \frac{3}{8}, P(\omega_2) = \frac{3}{8}, P(\omega_3) = \frac{1}{8}$,即各个基本事件发生的可能性不相同,就不能利用式(1.8)来计算 $P(A_1)$和 $P(A_2)$.因而对本题来说,考虑样本空间 Ω_2 才能顺利计算有关事件的概率.

当样本空间的元素较多时,一般不再将 Ω 中的元素一一列出,而只需分别求出 Ω 与 A 中包含的元素的个数(即基本事件的个数),再由式(1.8)求出 A 的概率.

抽样可以采用以下两种方式:

(1) 每次抽取一件样品,检验后将它放回这批产品中,然后再抽取下一件样品,这种抽样方式称为放回抽样;

(2) 每次抽取一件样品,检验后不将它放回这批产品中,再继续抽取另一件样品,这种抽样方式称为不放回抽样.

例 1.15　设一批产品共 100 件,其中有 95 件正品和 5 件次品,按上述两种抽样方式从这批产品中取 10 件样品,分别求取出的 10 件样品中恰有 2 件次品的概率.

解　(1) 放回抽样:第一次抽取时有 100 件不同的取法.因为第一次取出的样品无论是正品或次品,又将它放回这批产品中,所以第二次抽取时仍有 100 种不同的取法,依此类推,第 10 次抽取时仍有 100 种不同的取法.这就相当于从 100 个元素中任取 10 个元素的有重复排列,所以共有 100^{10} 种不同的取法.于是,基本事件的总数

$$n = 100^{10}.$$

设事件 A_1 表示"取出的 10 件样品中恰有 2 件次品",即"在 10 次抽样中,8 次取得正品,2 次取得次品",则如上所述,从 95 件正品中,放回地依次取出 8 件正品有 95^8 种不同的取法,从 5 件次品中放回地依次取出 2 件次品有 5^2 种不同的取法;又因为这 2 件次品可以在 10 次中的任何 2 次取得,有 C_{10}^2 种不同的情况,所以,总共有 $C_{10}^2 \times 5^2 \times 95^8$ 种不同的取法.于是,事件 A_1 包含的基本事件数

$$k_1 = C_{10}^2 \times 5^2 \times 95^8.$$

由式(1.8)得　$P(A_1) = \dfrac{C_{10}^2 \times 5^2 \times 95^8}{100^{10}} = C_{10}^2 \times (0.05)^2 \times (0.95)^8 = 0.074\,6.$

(2) 不放回抽样:第一次抽取时有 100 种不同的取法.因为第一次取出的样品不再放回这批产品中,所以第二次抽取时只有 99 种不同的取法,依此类推,第 10 次抽取时只有 91 种不同的取法.这就相当于从 100 个元素中任取 10 个元素的无重复排列,所以共有 P_{100}^{10} 种不同的取法.于是,基本事件的总数

$$n = P_{100}^{10} = 100 \times 99 \times \cdots \times 91.$$

设事件 A_2 表示"取出的 10 件样品中恰有 2 件次品",即"在 10 次抽样中,8 次取得正品,2 次取得次品",则如上所述,从 95 件正品中不放回地依次取出 8 件正品有 P_{95}^8 种不同的取法,从 5 件次品中不放回地依次取出 2 件次品有 P_5^2 种不同的取法;又因为这 2 件次品可以在 10 次中的任何 2 次取得,有 C_{10}^2 种不同的情况;所以,总共有 $C_{10}^2 P_5^2 P_{95}^8$ 种不同的取法.于是,事件 A_2 包含的基本事件数

$$k_2 = C_{10}^2 P_5^2 P_{95}^8 = 45 \times 5 \times 4 \times 95 \times 94 \times \cdots \times 88.$$

由式(1.8)得　$P(A_2) = \dfrac{C_{10}^2 P_5^2 P_{95}^8}{P_{100}^{10}} = \dfrac{45 \times 5 \times 4 \times 95 \times 94 \times \cdots \times 88}{100 \times 99 \times \cdots \times 91} \approx 0.070\,2.$

例 1.15 的一般情形是:设一批产品共 N 件,其中有 M 件次品,从这批产品中随机抽取 n 件样品,则

(1) 在放回抽样的方式下,取出的 n 件样品中恰有 m 件次品(设为事件 A_1)的概率为

$$P(A_1) = \frac{C_n^m M^m (N-M)^{n-m}}{N^n} = C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-m}.$$

(2) 在不放回抽样的方式下,取出的 n 件样品中恰有 m 件次品(设为事件 A_2)的概率为

$$P(A_2)=\frac{C_n^m P_M^m P_{N-M}^{n-m}}{P_N^n}.$$

例 1.16 设一批产品共 N 件，其中有 M 件次品，从这批产品中一次抽取 n 件样品，求样品中恰有 m 件次品的概率.

解 从这批产品中一次抽取 n 件样品，共有 C_N^n 种不同的取法，即基本事件的总数为 C_N^n.

设事件 A_3 表示"取出的 n 件样品中恰有 m 件次品"，也就是"恰好取出 m 件次品和 $n-m$ 件正品"，则共有"$C_M^m C_{N-M}^{n-m}$"种不同的取法，即事件 A_3 包含的基本事件数为 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$.

由式(1.8)得
$$P(A_3)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{1.9}$$

式(1.9)称为超几何分布的概率公式.

可见，从一批产品中"不放回地依次抽取 n 件样品"与"一次抽取 n 件样品"这两种抽样方式实质上是相同的，也就是说，事件 A_2 与事件 A_3 是相等的，所以应有 $P(A_2)=P(A_3)$. 事实上，利用组合数与排列数的关系式，不难验证

$$P(A_2)=\frac{C_n^m C_M^m m!\ C_{N-M}^{n-m}(n-m)!}{C_N^n n!}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}=P(A_3).$$

例 1.17 设一批产品共 N 件，其中有 M 件次品. 每次从这批产品中任取 1 件产品，取出后不再放回，求第 $i(1\leqslant i\leqslant N)$次取出的产品是次品的概率.

解 因为是不放回抽样，到第 i 次取出产品时，就相当于从 N 个元素中任取 i 个元素的排列，所以基本事件的总数为

$$P_N^i=N(N-1)\cdots(N-i+1).$$

设事件 A_i 表示"第 i 次取出的产品是次品"，则因为第 i 次取出的那件次品可以是 M 件次品中的任一件，有 M 种取法；而前面 $i-1$ 次取出的 $i-1$ 件产品可以从其他 $N-1$件产品中任意取出，有 P_{N-1}^{i-1}种取法；所以事件 A_i 包含的基本事件数为

$$\begin{aligned}P_{N-1}^{i-1}\cdot M&=(N-1)\cdots[(N-1)-(i+1)+1]M\\&=(N-1)\cdots(N-i+1)M.\end{aligned}$$

由式(1.8)得
$$P(A_i)=\frac{(N-1)\cdots(N-i+1)M}{N(N-1)\cdots(N-i+1)}=\frac{M}{N}.$$

值得注意的是，所求概率的值与 i 无关，这表明无论哪一次取出次品的概率都是一样的. 也就是说，取出次品的概率与先后次序无关.

此例题可应用于购买彩票. 一组彩票共 N 张，其中有 M 张中奖. 第 i 位彩民从这组彩票中任意抽取一张(取后不放回). 该彩民中奖的概率为$\frac{M}{N}$. 也就是说，无论是第一位买彩票的彩民，还是最后一位买彩票的彩民，中奖的概率是一样的.

1.4.2 几何概型

古典概型的定义是在一种特殊情形下给出的，这就是假定试验的可能结果只有有

限个,且各个试验结果出现的可能性是相等的.对于试验的可能结果有无穷多个的情形,古典概型显然不适用了.为了克服这个局限性,仍以等可能性为基础把这个定义做必要的推广,使得推广后的定义能适用于有无穷多个不同试验结果且各个基本事件具有等可能性的情形.

例如,在一个均匀陀螺的圆周上均匀地刻上区间[0,3)上的诸数字,旋转这陀螺.要合理地规定"陀螺停下时其圆周与桌面接触点的刻度位于区间$\left[\frac{1}{2},2\right]$上"的概率.由于陀螺及刻度的均匀性,它停下时其圆周上各点与桌面接触的可能性相等,即接触点的刻度位于在[0,3)内一个区间上的可能性与该区间的长度成比例.于是,所要求的概率

$$p=\frac{\text{区间}\left[\frac{1}{2},2\right]\text{的长度}}{\text{区间}[0,3)\text{的长度}}=\frac{2-\frac{1}{2}}{3-0}=\frac{1}{2}.$$

又如,设一个粒子位于容积为 V 的容器内各点处的可能性相等,即位于容器内的任何部分的可能性与这部分的容积成比例.于是,这粒子位于容器内的体积为 v 的一个部分区域 D 内的概率

$$p=\frac{\text{区域 } D \text{ 的容积}}{\text{容器的容积}}=\frac{v}{V}.$$

以上两个例子都以等可能性为基础,借助于几何上的度量(长度、面积、体积或容积等)来合理地定义概率,称此概率为几何概型.

例 1.18　(约会问题)二人约定于 0 到 T 时内在某地见面,先到者等 $t(t\leqslant T)$时后离去,试求二人能会面的概率 p.

解　以 x,y 分别表示二人到达时刻,则

$$0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T.$$

这样的(x,y)构成边长为 T 的正方形Ω.二人能会见的充要条件是$|x-y|\leqslant t$,这条件决定 Ω 中一子集A(见图 1.3).由上式得

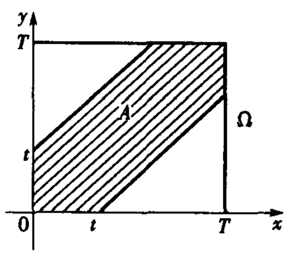

图 1.3

$$p=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2.$$

注意,例 1.18 可抽象为:设有两点 A、B 分别均匀地落于$[0,T]$中,试求 A,B 的距离不超过$t(t\leqslant T)$的概率 p.

1.5　条件概率

1.5.1　条件概率

条件概率是概率论中的一个重要而实用的概念,它所考虑的是事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的概率.先举一个例子.