GUIDE BOOK OF ADVANCED MATHEMATICS

高等数学学习指导书

成都科技大学应用数学系高等数学教研室 编著

成都科技大学出版社

高等数学学习指导书

成都科技大学应用数学系
高等数学教研室编著

成都科技大学出版社

（川）新登字015号

内容简介

本书是作者多年教学经验的总结，它紧紧围绕国家教委工科数学课程指导委员会制定的《高等数学》教学基本要求，以章为单元，对各章的重点和难点、深入理解基本概念和基本理论、灵活掌握基本运算的技巧、初学者容易产生的疑惑和错误等等，进行了多角度的剖析和讲解。书中不少例题都来自作者三十余年的教学实践，颇具针对性和启发性。

本书可作为工科院校高等数学习题课的教材或参考书，也可供工程技术人员学习高等数学时参考。

高等数学学习指导书
成都科技大学应用数学系
高等数学教研室编著

成都科技大学出版社出版发行
绵竹教育印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张：12 插页：2
1992年8月第1版 1992年8月第1次印刷
印数：1—10000 字数：258千字

ISBN 7—5616—1137—4/O·80

定价：4.95元

前　　言

《高等数学》是高等工科院校的一门重要的基础理论课。在培养适应我国社会主义现代化建设所需要的专门人才中，《高等数学》是起奠基作用的课程之一。因此，帮助学生更好地掌握高等数学的有关知识是高等数学教师长期追求的一个目标。

我们在教学过程中常常感到，由于受教材内容、学生认识能力、教学时数等诸多因素的影响，有些问题在课堂上一时顾不上讲述，有的又暂时不宜讲解，有的虽能讲到，教材上又缺少相应内容而影响学生复习和掌握。因此，编写一本紧密配合高等数学教材的辅助读物，帮助学生紧紧围绕国家教委工科数学指导委员会制定的《高等数学》教学基本要求，深入理解基本概念和基本理论，牢固掌握基本运算技能，引导学生顺利克服学习中的难点，避免一些易犯的错误等等，就成了我们长期以来的一个愿望。

从1984年开始，我们结合自己的教学经验，按照上述想法，编写了《高等数学补充讲义》，经过多年使用和反复修改，逐渐形成了今天这本《高等数学学习指导书》。本书内容与教材相呼应，有概念的剖析，复习思考题的讨论，例题的选讲，解题方法的比较，难点的分析，易犯错误的提示，必要内容的适当补充等等。每章后面还附有适量的练习题以备习题课选用。本书由王从云、唐嗣政担任主编，参加定稿

工作的有曾令桃、夏传蕙、赵国栋、朱明俊、谢德传、王从云、唐嗣政。参加过编写工作的还有王国扬、于正端、钟朝修、侯泽华、李常惠、唐士英、周效高。

本书欠妥和不足之处，敬请读者指正。

成都科技大学应用数学系高等数学教研室

1992.3

目　　录

1　函数与极限

本章内容分为三部分.

第一部分讨论函数. 在自然科学、工程技术、甚至某些社会学科中, 函数是被广泛应用的数学概念之一。其学习要求是: 掌握函数的定义, 理解其实质; 熟悉基本初等函数的定义、解析式、定义域, 值域及其图形; 了解复合函数的概念; 了解函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性的定义。

第二部分给出了研究函数的方法——极限。从方法论说, 这是高等数学区别于初等数学的显著标志, 微积分的主要概念都离不开极限, 极限理论是微积分的基本理论。其学习要求是: 了解数列极限的定义及其性质; 了解自变量变化过程中函数极限的定义及其性质; 初步掌握求极限的各种方法; 了解无穷小及无穷大的定义; 了解极限存在的准则。

第三部分研究在实际中遇到的最多的一类函数——连续函数。其学习要求是: 掌握函数在某点处连续的定义及在某区间上连续的定义, 了解函数在某点处连续的ε-δ定义; 熟悉函数连续性研究方法, 和闭区间上连续函数的性质, 逐步掌握其应用。

1.1 有关函数的几个例题

中学数学关于函数的定义与基本初等函数的图形和性质已作了较详的研究, 本节通过几个例题帮助同学们加深对复

合函数及函数性质的理解。

例1.1 设函数$f(x)$的定义域为$[0,1]$，问a在什么范围内取值时，$f(a+x)+f(a-x)(a\geqslant 0)$表示函数？

解：易知函数$f(a+x)$的定义域为$[-a,1-a]$，$f(x-a)$的定义域为$[a,1+a]$. 所以$f(x+a)+f(x-a)$在集合$[-a,1-a]\cap[a,1+a]$上有意义. 又

$$[-a,1-a]\cap[a,1+a]=\begin{cases}[a,1-a], & 0\leqslant a<\frac{1}{2};\\ \left\{\frac{1}{2}\right\}, & a=\frac{1}{2};\\ \phi, & a>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

故当且仅当$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$时$f(x+a)+f(x-a)$表示函数. 当$0\leqslant a<\frac{1}{2}$时定义域为闭区间$[a,1-a]$，当$a=\frac{1}{2}$时$f(x+a)+f(x-a)$仅定义在$x=\frac{1}{2}$这一点上。

例1.1指出定义在区间上的函数，经有限次四则运算和复合运算可能产生仅定义在一个点上的函数。

例1.2 设函数$f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$,

$g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 证明$f(g(x))=g(f(x))$.

证明：$f(g(x))=\frac{1}{2}(g(x)+|g(x)|)$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+|x|), & x<0,\\ \frac{1}{2}(x^2+|x|^2), & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$g(f(x))=\begin{cases}f(x), & f(x)<0,\\ f^2(x), & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

因为，当$x\in R$时，$f(x)\geqslant 0$，所以

$$g(f(x))=f^2(x)=\frac{1}{4}(x+|x|)^2=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

注意：一般的，$f(g(x))$不一定等于$g(f(x))$.例如：当函数$f(x)=x^2$，$g(x)=\sin x$，$f(g(x))=(\sin x)^2=\sin^2 x$.而$g(f(x))=\sin x^2$，$f(g(x))\neq g(f(x))$.

例1.3 设函数$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.证明：(1)对于任意取定的小于1的正数$a$，$f(x)$在$[a,1]$上有界；(2)函数$f(x)$在$(0,1]$上无界。

分析：根据函数$f(x)$在集合X上有界的定义，要证明有界只须指出存在一个正数M，使得$|f(x)|\leqslant M$. 而证明无界就必须证明对任意给定无论多么大的正数M，都存在对应的$x_M\in X$，使$|f(x_M)|>M$。

证明：(1)对于任意取定的小于1的正数a，当$x\in[a,1]$时

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{a}.$$

取$M=\frac{1}{a}$，所以函数$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在$[a,1]$上有界；

(2)对于任意给定的正数M，存在大于$\frac{M}{2\pi}$的自然

数N_M，对应地有 $x_M=\dfrac{1}{2\pi N_M+\frac{\pi}{2}}\in[0,1]$，使得

$$\left|f(x_M)\right|=\left|(2\pi N_M+\frac{\pi}{2})\sin(2N_M\pi+\frac{\pi}{2})\right.$$

$$=2\pi N_M+\frac{\pi}{2}>2\cdot\frac{M}{2\pi}\cdot\pi+\frac{\pi}{2}>M.$$

所以函数$f(x)$在$[0,1]$上无界.

对于(2)是证明否定命题常使用的方法，较难掌握。建议同学们反复阅读，加深理解。

例1.4 设函数$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调减少．证明：(1)当$a>0$，$b>0$时，$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$；(2)当$0<p<1$时，$(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$.

证明：(1)因$a+b>a>0$，根据函数$\dfrac{f(x)}{x}$的单减性，有

$$\frac{f(a+b)}{a+b}\leqslant\frac{f(a)}{a},\quad \frac{af(a+b)}{a+b}\leqslant f(a).$$

同理有
$$\frac{bf(a+b)}{a+b}\leqslant f(b),$$

所以 $$f(a+b)=\frac{af(a)}{a+b}+\frac{bf(b)}{a+b}\leqslant f(a)+f(b);$$

(2)令$f(x)=x^p$，$x\in(0,+\infty)$．当$0<p<1$时，

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^p}{x}=\frac{1}{x^{1-p}}$$

在$(0,+\infty)$上单调减少；故当$a>0$，$b>0$时

$$(a+b)^p\leqslant a^p+b^p.$$

如$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上严格减少，则可证得严格不等式

$$f(a+b)<f(a)+f(b).$$

例1.5 设函数$f(x)$在R内无零点，且对任意的$x\in R$有$f(x)=\dfrac{1}{f(x+c)}$。证明$f(x)$为周期函数（$c\neq 0$为给定的常数）。

分析：注意到所给条件“对任意的$x\in R$有$f(x)=\dfrac{1}{f(x+c)}$”中“任意”的丰富内涵，两次使用该等式即可证得$f(x)=f(x+2c)$。

证明：因$x\in R$时，有$x+c\in R$，故

$$f(x)=\frac{1}{f(x+c)},\ f(x+c)=\frac{1}{f(x+c+c)}=\frac{1}{f(x+2c)}.$$

于是证得$f(x+2c)=f(x)$，即$f(x)$为周期函数。

本例的证明方法说明，在学习基本定理基本概念时，必须重视“任意的”、“存在”、“存在唯一”等术语的内涵。

为了证明某些命题、定理，必须将定义在集合X_0上的函数$f(x)$延拓到集合X_1上。其中X_0为X_1的真子集。下面以奇延拓、偶延拓为例说明。

设函数$f(x)$定义在$[0,l]$上。在$[-l,0]$上补充函数$f(x)$的定义，可以得到定义在$[-l,l]$上的函数$F(x)$。若$F(x)$为偶函数，称$F(x)$为$f(x)$的偶延拓；若$F(x)$为奇函数，称$F(x)$为$f(x)$的奇延拓。

易知，偶延拓

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,l], \\ f(-x), & x\in[-l,0). \end{cases}$$

奇延拓

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,l], \\ -f(-x), & x\in[-l,0). \end{cases}$$

例1.6 设函数$f(x)=\sqrt{x}\,(0\leqslant x<1)$.（1）将$f(x)$延拓到$(-1,1)$，使其成为偶函数；（2）将$f(x)$延拓到$(-\infty,+\infty)$使其成为周期为1的周期函数.

解：（1）
$$F(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x\in[0,1), \\ \sqrt{-x}, & x\in[-1,0). \end{cases}$$

于是解得

$F(x)=\sqrt{|x|}$，$x\in(-1,1)$（图1.1）

（2）从图1.2上易知$F(x)=\sqrt{x-[x]}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

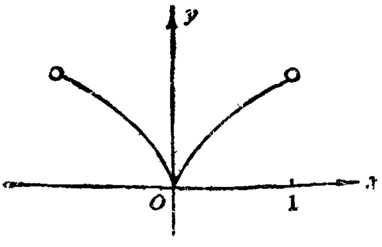

图1.1 $F(x)=\sqrt{|x|}$，$x\in(-1,1)$

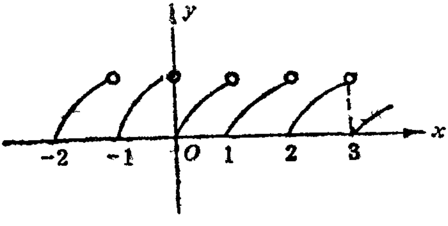

图1.2 $F(x)=\sqrt{x-[x]}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

1.2 极限及其运算

极限部分理论性强，定义、定理多，逻辑推理严密，处理问题的方法新，技巧性强，是较难掌握的内容。为此，本节首先列出若干思考题，帮助读者进一步理解定义和熟悉一些重要性质。多作练习是准确理解概念，正确使用定理的必经途径。因此，本节编入一些较为典型的证明题与计算题，希望读者多读、多想，不仅知其然，还得知其所以然，在此基础上多作一些练习，从而提高计算与证明问题的能力。

1.2.1 思考题

1．数列 $\{a_n\}$ 收敛于a的定义可否改叙为：对任意给定的小于 1 的正数ε，存在N，当$n\geqslant N$时恒有$|a_n-a|\leqslant M\varepsilon$（其中$M$为一确定正常数）。

2．下面给出两种用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1(a>0)$的方法。试比较优劣。

证法一：因

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}<\frac{\sqrt{(n+a)^2}-n}{n}=\frac{a}{n},$$

解不等式$\dfrac{a}{n}<\varepsilon$，得$n>\dfrac{a}{\varepsilon}$。所以，对任意给定正数ε，取$N_1=\left[\dfrac{a}{\varepsilon}\right]$，则当$n>N_1$时，就有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon.$$

证法二：要使
$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

解不等式
$$\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}<1+\varepsilon,$$
$$n^2+a^2<(1+\varepsilon)^2n^2,$$
$$a^2<(2\varepsilon+\varepsilon^2)n^2,$$

得
$$n>\frac{a}{\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2}}.$$

所以，对任意给定的正数ε，取$N_2=\left[\frac{a}{\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2}}\right]$，当$n>N_2$

时有
$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

且$n\leqslant N_2$时
$$\left|\frac{\sqrt{n^2-a^2}}{n}-1\right|\geqslant\varepsilon.$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$$

试问：证法一有无错误？当$n\leqslant N_1$时，$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|\geqslant\varepsilon$一定成立吗？

细读ε-N定义，可知只要求当$n>N$时，恒有$|a_n-a|<\varepsilon$。至于前N项，即当$n\leqslant N$，并不要求都满足不等式$|a_n-a|\geqslant\varepsilon$，从数列收敛的几何意义上来看，只要求$N$项后的点落入$a$的$\varepsilon$

邻域。至于前N项所对应的点可能在a的ε邻域内，也可能在a的ε邻域外。N不是由ε唯一确定的。

证法一中适当放大不等式$\left(\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\frac{a}{n}\right)$，由$\frac{a}{n}<\varepsilon$解$n$较证法二中由$\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1<\varepsilon$解$n$简单。以后称适当放大不等式方法为适当放大法。

3．设$A>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})$，$n=1$，$2$，$3\cdots$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解：设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，因为

$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})>0\ (n=2,3\cdots)$，$a>0$，对递推公式两边取极限：

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}\frac{A}{x_n}\right),$$

则有 $$a=\frac{1}{2}(a+\frac{A}{a}),$$

解方程得 $$a=\pm\sqrt{A}\ (\text{舍去}-\sqrt{A})\text{；}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{A}\text{。}$$

试问：解法中有哪些错误？你能给出正确的解法吗？

4．若$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$，问是否一定有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$。