考研数学真题1+1系列

2006～1997

考研真题数学二

详解·拓展·评析

主编 世华 潘正义

3

吃透真题 考研成功一半！

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

○考研数学真题 1 + 1 系列○

2006 ~ 1997

考研真题数学二

详解 · 拓展 · 评析

主编 世华 潘正文

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研真题数学二详解·拓展·评析. / 世华,潘正义
主编. 一北京:世界图书出版公司北京公司,2006.2
ISBN 7-5062-7922-3

Ⅰ.考... Ⅱ.①世...②潘... Ⅲ.高等数学一研究
生一入学考试一解题 Ⅳ.013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 007889 号

考研真题数学二
详解·拓展·评析

主　　编:世　华　潘正义
责任编辑:李根宾
封面设计:林娜娜

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话:88861708　邮编:100089)
销　　售:各地新华书店
印　　刷:廊坊人民印刷厂印刷

开　　本:787×1092 毫米　1/16
印　　张:7.5
字　　数:198 千字
版　　次:2006 年 2 月第 1 版　2006 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-7922-3/O·547　　**定价:8.80 元**

服务热线:010-88861708

关于数学真题的公告

一、我们为什么需要真题

真题是你复习备考的总方向，未来考题只在难易程度上围绕过去的真题小幅波动，你的一切努力就是为了征服它。

真题是一面镜子，能够反映你在不同的复习阶段与它有多大的距离。

真题是一扇窗口，你能看到你想看的风景。

真题是一堆宝藏，做得多、练得熟了，你自己都能总结出命题规律。

真题是一台测速仪，做题的速度也许会直接决定你的成绩。

二、关于《真题集》

《真题集》是公共资源，没有知产附加价值，因此，我们无偿为你提供服务，提供完全真实的训练平台，你付出的只是生产成本。

三、关于真题解析

本部分严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写，汇集最近十年数学全部考研试题的详细解析。通过『**命题目的**』、『**思路点拨**』、『**详细解答**』、『**易错辨析**』、『**延伸拓展**』几个步骤对历年真题进行全方位的剖析，以达到通过真题学习数学，进而举一反三、触类旁通，掌握数学的目的。通过每套试卷的考点分布表统计历年真题的考点分布，让读者很直观地把握考试重点，了解命题特点。通过试卷评析，点评每套试卷的难点与重点，帮助读者把握命题规律，做到有的放矢。

编　者

目录

2006年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)

详解·拓展·评析

一、填空题

(1)【标准答案】 $y=\frac{1}{5}$.

【命题目的】 本题考查了渐近线的计算.

【详细解答】 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4\sin x}{x}}{5-\frac{2\cos x}{x}}=\frac{1}{5}$

所以水平渐近线为:$y=\frac{1}{5}$.

【易错辨析】 对于同一方向不可能同时存在水平渐近线和斜渐近线.

【延伸拓展】 有可能不存在双侧渐近线($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在),但存在左右单侧渐近线($\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在).

---

(2)【标准答案】 $\frac{1}{3}$.

【命题目的】 本题考查了连续的性质及广义积分的求导.

【详细解答】 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}=f(0)=a$

所以 $a=\frac{1}{3}$.

【易错辨析】 掌握广义积分的求导方法.

【延伸拓展】 第一类间断点:①$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$ 时,称 x_0 为第一类可去间断点;②$f(x_0+0)$,$f(x_0-0)$ 存在,但 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$ 时,称 x_0 为第一类跳跃间断点;第二类间断点:$f(x_0+0)$,$f(x_0-0)$ 至少有一个不存在时,称 x_0 为第二类间断点.

---

(3)【标准答案】 $\frac{1}{2}$.

【命题目的】 本题考查了广义积分计算.

【详细解答】 $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$.

【易错辨析】 要注意被称函数是否有间断点.

【延伸拓展】 本题也可采用重积分求极限的方法求解.

(4)【标准答案】 $y = c\dfrac{x}{e^x}$.

【命题目的】 本题考查了一阶微分方程求解.

【详细解答】 $\dfrac{dy}{y} = (\dfrac{1}{x} - 1)dx, \ln\dfrac{y}{c} = \ln x - x, y = ce^{\ln x - x} = c\dfrac{x}{e^x}$.

【易错辨析】 熟记微分方程每一种类型对应一种解法. 本题是可分离变量方程,因此将变量 x,y 分开后才能求得方程的解.

【延伸拓展】 本题也可采用公式法求解.

(5)【标准答案】 $-e$.

【命题目的】 本题考查了隐函数求微分.

【详细解答】 令 $x = 0$,得 $y(0) = 1$.

$\dfrac{dy}{dx} = -e^y - xe^y\dfrac{dy}{dx}$. 令 $x = 0$,得$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -e^{y(0)} = -e$.

【易错辨析】 最后需代入 $x = 0$.

【延伸拓展】 方程两边同时微分,可导出$\dfrac{dy}{dx}$的表达式.

(6)【标准答案】 2.

【命题目的】 本题考查了矩阵变换和行列式的计算.

【详细解答】 $B(A-E) = 2E, |B||A-E| = 2|E| = 4$

$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, |A-E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, |B| = 2.$

【易错辨析】 $|kA_{n\times n}| = k^n|A|$,所以 $|2E| \neq 2|E|$,应该 $|2E| = 4|E| = 4$.

【延伸拓展】 本题也可先求出矩阵 B,但计算稍复杂.

二、选择题

(7)【标准答案】 (A).

【命题目的】 本题考查了导数与微分的相关概念.

【详细解答】 $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$, 所以排除(C)、(D).

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o[(\Delta x)^2]$$

$$= dx + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o[(\Delta x)^2]$$

因为$\dfrac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o[(\Delta x)^2] > 0$, 所以 $0 < dy \leqslant \Delta y$. (A) 为答案.

【易错辨析】 泰勒公式和麦克劳林公式要掌握熟练.

【延伸拓展】 本题可利用凹凸性来解:$f''(x) > 0$,曲线为凹的;$f'(x) > 0$,曲线单增,当 $\Delta x > 0$ 时,$dy > 0$. 画出曲线草图立即可知 $0 < dy < \Delta y$.

(8)【标准答案】 (B).

【命题目的】 本题考查了间断点及奇偶性的判断.

【详细解答】 因为 $x=0$ 是第一类间断点,所以 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 存在.

令 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$. 所以 $g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$

$g(x)\int_0^x f(t)dt=f(\xi)x, 0\leqslant\xi\leqslant x$

令 $x\to 0^+$,得 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)+f(0^+)\cdot 0=0=g(0)$

所以 $\int_0^x f(t)dt$ 在 $x=0$ 连续.

$$g(-x)=\int_0^x f(t)dt \xlongequal{u=-t} \int_0^x f(-u)(-du)=\int_0^x f(u)du=g(x)$$

$g(x)$ 是偶函数,(B) 为答案.

【易错辨析】 熟记间断点及奇偶性的判别方法.

【延伸拓展】 当 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点时,则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=x_0$ 不可导. 也就是说在包含 $x=x_0$ 的区间中,$f(x)$ 不存在原函数.

---

(9)【标准答案】 (C).

【命题目的】 本题考查了函数的导数运算.

【详细解答】 $h'(x)=e^{1+g(x)}g'(x)$

令 $x=1.1=e^{1+g(1)}2, 1+g(1)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2, g(1)=-\ln 2-1$

(C) 为答案.

【易错辨析】 本题为基础题型,不要出现计算错误.

【延伸拓展】 本题不必先求出 $g(x)$ 的表达式.

---

(10)【标准答案】 (D).

【命题目的】 本题考查了微分方程解的性质.

【详细解答】 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ 对应的特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda+2)=0$

即 $\lambda^2+\lambda-2=0$

所以齐次方程为:$y''+y'-2y=0$

由非齐次方程特解 xe^x,得出非齐次微分方程为:

$y''+y'-2y=3e^x$. (D) 为答案.

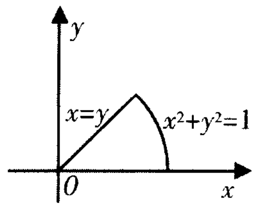
【易错辨析】 熟记微分方程解的性质及相应的求解公式.

【延伸拓展】 如果微分方程的非齐次项为 $e^{\lambda_0 x}$,①λ_0 是 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的单根,则特解为 $Axe^{\lambda_0 x}$;②λ_0 是 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的二重根,则特解为 $Ax^2e^{\lambda_0 x}$,③λ_0 不是 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根,则特解为 $Ae^{\lambda_0 x}$.

---

(11)【标准答案】 (C).

【命题目的】 本题考查了积分变换及交换积分次序.



【详细解答】 由图知:$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$. 故应选(C).

【易错辨析】 容易混淆累次积分交换积分次序后的上下限.

【延伸拓展】 根据累次积分的积分限画出积分区域的图形,是每个同学都应该掌握的非常重要的基本功.

(12)【标准答案】 (D).

【命题目的】 本题考查了多元函数极值的性质.

【详细解答】 因为 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$, 所以由 $\varphi(x,y)=0$ 可解出 $y=y(x)$.

令 $Z=f(x,y)=f(x,y(x))$ 因为 (x_0,y_0) 是极值点, 所以

$$\left.\frac{dZ}{dx}\right|_{x=x_0}=f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0 \qquad (*)$$

所以当 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$(否则, 若 $f'_y(x_0,y_0)=0$, 由(*)知, $f'_x(x_0,y_0)=0$, 矛盾). (D) 为答案.

【易错辨析】 掌握多元函数求极值的方法.

【延伸拓展】 本题也可用辅助函数法求解.

(13)【标准答案】 (A).

【命题目的】 本题考查了向量组的线性相关性.

【详细解答】 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性相关, 则存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为零, 满足

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

所以 $A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0$

所以 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots\cdots,A\alpha_s$ 线性相关. (A) 为答案.

【易错辨析】 掌握相关的判别法则.

【延伸拓展】 矩阵的秩不等式:①$r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$;②$r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$;③若 A 可逆, $r(AB)=r(B)$;④$r(A_{m\times n}B_{n\times s})\geqslant r(A)+r(B)-n$.

(14)【标准答案】 (B).

【命题目的】 本题考查了矩阵的初等变换.

【详细解答】 由 P 的表达式, 容易求出 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

左乘初等矩阵相当于进行相应的行变换, 右乘初等矩阵相当于进行相应的列变换. PA 将 A 的第2行加到第1行, PAP^{-1} 再将所得的矩阵的第一列的 -1 倍加到第2列, 即得到矩阵 C. (B) 为答案.

【易错辨析】 本题也可反过来,已知 C,P 的关系,问 A 与 C 是如何变换的.

【延伸拓展】 应熟记:左乘初等矩阵相当于进行相应的行变换,右乘初等矩阵相当于进行相应的列变换..

三、解答题

(15)【命题目的】 本题考查了泰勒公式的应用.

【思路点拨】 把 e^x 展开后比较 x 的各项系数.

【详细解答 1】 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

代入,得:$(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$

整理,得:

$$1 + (B + 1)x + (C + B + \frac{1}{2}x^2 + (\frac{B}{2} + C + \frac{1}{6})x^3 + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3)$$

二边比较系数:$\begin{cases} B + 1 = A \\ C + B + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{B}{2} + C + \frac{1}{6} = 0 \end{cases}$

$A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{1}{6}$

【详细解答 2】 将原式移项,得:$e^x(1 + Bx + Cx^2) - 1 - Ax = o(x^3)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1 + Bx + Cx^2) - 1 - Ax}{x^3} = 0 \qquad (1)$$

对(1)用洛必大法则:

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1 + Bx + Cx^2) + e^x(B + 2Cx) - A}{3x^2} = 0 \qquad (2)$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}[e^x(1 + Bx + Cx^2) + e^x(B + 2Cx) - A] = 0,\quad \therefore 1 + B - A = 0$

对(2)用洛必大法则:

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1 + Bx + Cx^2) + 2e^x(B + 2Cx) + e^x 2C}{6x} = 0 \qquad (3)$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}[e^x(1 + Bx + Cx^2) + 2e^x(B + 2Cx) + e^x 2C] = 0,\quad \therefore 1 + 2B + 2C = 0$

对(3)用洛必大法则:

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1 + Bx + Cx^2) + 3e^x(B + 2Cx) + 6e^x C}{6} = 0$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}[e^x(1 + Bx + Cx^2) + 3e^x(B + 2Cx) + 6e^x C] = 0,\quad \therefore 1 + 3B + 6C = 0$

解得:$A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{1}{6}$.

【易错辨析】 利用洛比达法则虽可求解,但较复杂.

【延伸拓展】 ①泰勒公式的拉格朗日余项经常用于证明题,泰勒公式的皮亚诺余项经常用于计算题;②若 $\lim\frac{\alpha}{\beta} = k$ 且 $\lim\beta = 0$,则 $\lim\alpha = 0$.

(16)【命题目的】 本题考查了不定积分的计算.

【思路点拨】 本题用到换元法和分步积分法.

【详细解答】 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = -\int \arcsin e^x de^{-x} = -e^{-x}\arcsin e^x + \int e^{-x}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$= -e^{-x}\arcsin e^x + \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-2x}-1}}dx = -e^{-x}\arcsin e^x - \int \frac{de^{-x}}{\sqrt{e^{-2x}-1}}$

$\xlongequal{\text{令} \sec t = e^{-x}} -e^{-x}\arcsin e^x - \int \frac{\sec t\tan t dt}{\tan t} = -e^{-x}\arcsin e^x - \int \sec t dt$

$= -e^{-x}\arcsin x - \ln|\sec t+\tan t| + C = -e^{-x}\operatorname{arc\,sin} e^x - \ln|e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}-1}| + C.$

【易错辨析】 利用换元法可简化积分式.

【延伸拓展】 不定积分中出现反三角函数时,经常用分步积分法,设反三角函数为 u.

(17)【命题目的】 本题考查了二重积分运算.

【思路点拨】 利用对称性简化积分形式.

【详细解答】 由对称性:$\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy = 0$

所以 $I = \iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy \xlongequal{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \frac{rdr}{1+r^2}$

$= \pi\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi\ln 2.$

【易错辨析】 该题若不利用对称性,直接用极坐标计算 $I = \iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$,计算会非常繁复,可能出现计算错误.

【延伸拓展】 关于对称性:

① 如果 $f(x,y)$ 关于 x 为奇函数(即 $f(-x,y) = -f(x,y)$),积分区域 D 关于 y 轴对称,则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$;

如果 $f(x,y)$ 关于 x 为偶函数(即 $f(-x,y) = f(x,y)$),积分区域 D 关于 y 轴对称,则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 2\int\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$,其中 D_1 为对称区域的一半.

② 如果 $f(x,y)$ 关于 y 为奇函数(即 $f(-x,y) = -f(x,y)$),积分区域 D 关于 x 轴对称,则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$;

如果 $f(x,y)$ 关于 y 为偶函数(即 $f(-x,y) = f(x,y)$),积分区域 D 关于 x 轴对称,则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 2\int\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$,其中 D_1 为对称区域的一半.

(18)【命题目的】 本题考查了数列极限的相关计算.

【思路点拨】 利用数列单调性求出 x_n 的极限,再用函数变换求(Ⅱ)的极限.

【详细解答】 (Ⅰ)当 $0 < x_1 < \pi$ 时,$x_2 = \sin x_1 < x_1, 0 < x_2 < \pi$

由数学归纳法:$x_{n+1} = \sin x_n < x_n, 0 < x_{n+1} < \pi$

所以数列 $\{x_n\}$ 单减,而且有下界(0 为下界.)

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$ 存在. 对 $x_{n+1} = \sin x_n$ 求极限,得 $a = \sin a$

所以 $a=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a=0$.

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{\frac{1}{y^2}}=e^{\lim\limits_{y\to0}\left(\frac{\sin y}{y}-1\right)\frac{1}{y^2}}$

$=e^{\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y-y}{y^3}}=e^{\lim\limits_{y\to0}\frac{\cos y-1}{3y^2}}=e^{\lim\limits_{y\to0}\frac{-\frac{1}{2}y^2}{3y^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

【易错辨析】 先要判断数列单调有界,才能假定数列极限的存在.

【延伸拓展】 ①若 $\lim u=0,\lim v=\infty$,则 $\lim(1+u)^v=e^{\lim uv}$;

② $\lim u=1,\lim v=\infty$,则 $\lim u^v=e^{\lim(u-1)v}$;③若 $\lim u=a>0,\lim v=b$,则 $\lim u^v=a^b$.

---

(19) **【命题目的】** 本题考查了利用导数的性质证明函数不等式.

【思路点拨】 构造辅助函数,再利用导数判断其增减性.

【详细解答】 令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x-a\sin a-2\cos a-\pi\alpha$

$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi$,

$f''(x)=\cos x+\cos-x\sin x-2\cos x=-x\sin x<0(x\in(0,\pi))$

所以 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单减. $f'(x)>f'(\pi)=0(x\in(0,\pi))$

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单增. 所以 $f(b)>f(a)=0$

即 $b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin b+2\cos a+\pi a$.

【易错辨析】 掌握导数的相关性质.

【延伸拓展】 对于积分不等式也可使用类似方法构造辅助函数:将一个常数全部改成变量 x,移项后为辅助函数.

---

(20) **【命题目的】** 本题考查了多元微分的运算.

【思路点拨】 分别求出 x,y 的二阶偏导数,代入即可得证.

【详细解答】 (Ⅰ)令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{u},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\frac{x^2}{u^2}+f'(u)\frac{u-x\frac{x}{u}}{u^2}=f''(u)\frac{x^2}{u^2}+f'(u)\frac{y^2}{u^3}$$

同理 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\frac{y^2}{u^2}+f'(u)\frac{x^2}{u^3}$

所以 $0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\frac{x^2}{u^2}+f'(u)\frac{y^2}{u^3}+f''(u)\frac{y^2}{u^2}+f'(u)\frac{x^2}{u^3}$

所以 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$.

(Ⅱ) $uf''(u)+f'(u)=[uf'(u)]'=0,uf'(u)=C_1$

令 $u=1$,得 $C_1=1,uf'(u)=1,f'(u)=\frac{1}{u},f(u)=\ln u+C_2$

令 $u=1$,得 $C_2=0,f(u)=\ln u$.

【易错辨析】 如本题解中令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$,运算量比较小;如果直接对 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 中的 x,y 求导,运算量比较大.

【延伸拓展】 对于这种题型,第二问可直接用第一问的结论.

(21)【命题目的】 考查导数及定积分的相关运用.

【思路点拨】 利用二阶导数判断凹凸性,画图利用定积分求面积.

【详细解答】 (Ⅰ) $\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2}{t}-1$

$\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{2}{t}-1)_t'\frac{dt}{dx}=-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{x_t'}=-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=-\frac{1}{t^3}<0,(t>0)$

所以 L 是凸的

(Ⅱ) 过点 $(-1,0)$ L 的切线方程: $y=(\frac{2}{t}-1)(x+1)$

切点既在曲线 L 上又在切线上,所以将 L 的方程代入切线方程可以求出切点对应的 t 值:

$4t-t^2=(\frac{2}{2}-1)(t^2+2),t^2+t-2=0,t=-2$(舍),$t=1$

切点坐标: $x_0=1^2+1=2,y_0=4\times1-1^2=3$

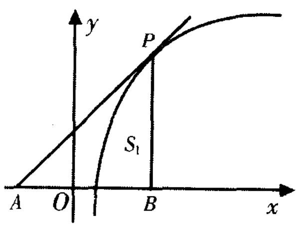
切线方程: $y=(\frac{2}{1}-1)(x+1)=x+1$

(Ⅲ) 切线与 x 轴的交点: $0=x+1,x=-1$

曲线与 x 轴的交点: $0=4t-t^2,t=0,t=4$

相应的 x 坐标: $x=1,x=17$(舍)(因为 $17>x_0=3$)

$AB=3,PB=3,S_{\triangle PAB}=\frac{9}{2}$



$S_1=\int_1^2 y(x)dx=\int_0^1 y(t)dt=\int_0^1(4t-t^2)2tdt=\frac{13}{6}$

所求面积: $S=S_{\triangle PAB}-S_1=\frac{9}{2}-\frac{13}{6}=\frac{7}{3}$.

【易错辨析】 掌握切线及平面面积的计算方法.

【延伸拓展】 ① 参数方程表示的曲线求二阶导数时,t 为 x 的函数. 应该使用复合函数求导;

② 参数方程表示的曲线求面积时: $S=\int_a^b y(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t$.

(22)【命题目的】 本题考查了线性方程组解的性质及求通解.

【思路点拨】 非齐次线性方程组有3个线性无关的解,可推出齐次线性方程组解向量的个数 $\geqslant 2$,从而有 $4-r(A)\geqslant 2$.

【详细解答】 (Ⅰ) 因为 $\begin{vmatrix}1&1\\4&3\end{vmatrix}\neq0$,所以 $r(A)\geqslant 2$

假设非齐次方程组三个线性无关解为: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. 则 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 是齐次方程的二个不同的解. 考察 $k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_3)=0$

得 $(k_1+k_2)\alpha_1-k_1\alpha_2-k_2\alpha_3=0$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,所以 $k_1=k_2=0$,即 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 线性无关. 所以齐次方程基础解系的解向量个数大于等于2. 所以

$4-r(A)\geqslant 2,r(A)\leqslant 2,\therefore r(A)=2$

(Ⅱ)因为$r(A)=2$,所以$\begin{vmatrix}1&1&1\\4&3&5\\a&1&3\end{vmatrix}=0,2a-4=0,a=2$

$\begin{vmatrix}1&1&1\\3&5&-1\\1&3&b\end{vmatrix}=0,2b+6=0,b=-3.$

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\2&1&3&-3&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&-1&1&-5&3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&2&-4&2\\0&-1&1&-5&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

齐次方程组:$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4\\x_2=x_3-5x_4\end{cases}$

取$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,得$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$,$\eta_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ 取$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,得$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix}$,$\eta_2=\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix}$

齐次方程组通解:$k_1\eta_1+k_2\eta_2=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix}$

非齐次方程组:$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\end{cases}$ 取$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,得$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$,$\eta^*=\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\0\end{bmatrix}$

原方程组通解:$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\eta^*=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\0\end{bmatrix}$.

【易错辨析】 如果非齐次方程组有n个线性无关解,则对应的齐次方程组至少有$n-1$个线性无关解,即基础解系向量个数大于等于$n-1$.

【延伸拓展】 求a,b也可用以下方法:直接将增广矩阵进行行变换,非齐次方程组有解等价于系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩.

---

(23)**【命题目的】** 本题考查了特征值与特征向量的相关计算.

【思路点拨】 先计算特征值与特征向量,正交化后,直接求对角矩阵的幂次.

【详细解答】 (Ⅰ)由条件知0是特征值,相应的特征向量为I_1,I_2.

取$I_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,假设$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,则 $AI_3=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

所以 $\lambda=3$ 为特征值,相应的特征向量为 $\bar{\beta}_3=(1,1,1)^T$.

(Ⅱ) 将 I_1,I_2 正交化:

$$\bar{\beta}_1=I_1,\bar{\beta}_2=I_2-\frac{(I_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(0,-1,1)^T-\frac{-3}{6}(-1,2,-1)^T=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)^T$$

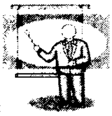
将 $\bar{\beta}_1,\bar{\beta}_2,\bar{\beta}_3$ 标准化后得: $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix},\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\beta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$,

所以, $Q=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$, $Q^T=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$

$$Q^TAQ=\Lambda=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}.\quad A=Q\Lambda Q^T=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

【易错辨析】 本题利用了正交矩阵 $Q^T=Q^{-1}$,于是 $Q^TQ=E$,很容易求出 $(A-\frac{3}{2}E)^6$;如果先求出 $A-\frac{3}{2}E=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{bmatrix}$,再求 $(A-\frac{3}{2}E)^6$,计算 $(A-\frac{3}{2}E)^6$ 的过程比较繁复.

【延伸拓展】 本题也可用以下方法求解:假设另一个特征值 λ 的特征向量为 $(1,x,y)$,则它应和 I_1,I_2 正交. 立即可求出 x,y. 由 A 的各行元素之和均为 3 可求出特征值 λ 的值.



2006 年数学(二)试卷评析

2006 年数学(二)考点分布表

考点	函数与极限	导数与微分	广义积分	不定积分	定积分应用	幂级数展开	重积分	多元微分	常微分方程求解	矩阵与行列式	向量相关性	线性方程组	特征值与特征向量
分数	24	26	4	10	12	10	14	12	8	8	4	9	9

本试卷高等数学部分的试题主要考查了:1. 渐近线的求法,连续性的判断,求函数极限;2. 导数的性质与应用;3. 积分运算及应用;4. 二重积分计算;5. 多元函数微分的证明题;6. 一阶微分方程求通解. 其中求渐近线、多元微分、二重积分为去年考过内容. 总体来讲所考知识点都为基础性的内容,考生应注意平时多加强基础方面的训练.

本试卷线性代数部分的试题主要考查了矩阵变换及运算、向量组相关性的判断、线性方程组求通解及特征值与特征向量的相关计算. 其中矩阵运算与向量为基础性的内容,主要出现在填空题与选择题中,线性方程组求通解及特征值与特征向量的考查主要集中大题上,考生需注意这些特点.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)

详解·拓展·评析

一、填空题

(1)【标准答案】 $-\pi dx$.

【命题目的】 本题考查了形如 $y=[1+f(x)]^{g(x)}$ 的微分.

【详细解答】 $y=(1+\sin x)^x=e^{x\ln(1+\sin x)}$

$$y'_x=e^{x\ln(1+\sin x)}\left[\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right]=(1+\sin x)^x\left[\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right]$$

$$y'_x\Big|_{x=\pi}=1\cdot[\ln 1+\frac{\pi\cdot(-1)}{1+0}]=-\pi$$

$$\therefore dy\Big|_{x=\pi}=y'_x\Big|_{x=z}dx=-\pi dx$$

【易错辨析】 注意求的是微分,而不是导数,易漏掉 dx.

【延伸拓展】 函数 $y=[1+f(x)]^{g(x)}$ 的导数为

$$y'=[1+f(x)]^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\ln(1+f(x))+\frac{f'(x)\cdot g(x)}{1+f(x)}\right].$$

---

(2)【标准答案】 $y=x+\frac{3}{2}$.

【命题目的】 本题考查了曲线斜渐近线的求法.

【详细解答】 $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{3}{2}}=1\quad(x\geqslant 0)$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{[(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}][(1+x)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]}{\sqrt{x}\cdot[(1+x)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^3-x^3}{\sqrt{x}[(1+x)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]}$$

$$=\frac{1+3x^2+3x}{\sqrt{x}[(1+x)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]}=\frac{3}{2}.$$

$\therefore$ 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{3}{2}$.

【易错辨析】 曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$,截矩为 $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$.

【延伸拓展】 若求曲线 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 渐近线有几条,这样就要分别计算其水平渐近线和垂直渐近线.

(3)【标准答案】 $\frac{\pi}{4}$.

【命题目的】 本题考查了定积分.

【详细解答】
$$\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} \xlongequal{x=\sin\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta}{(2-\sin^2\theta)\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{2-\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$$
$$=-\arctan\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

【易错辨析】 在换元的同时要变换积分上下分限,否则就会出错. 这里 $0<x<1$,若令 $x=\sin\theta$,则有 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

【延伸拓展】 这是一类基本题目,有时也会考查无穷积分和瑕积分.

(4)【标准答案】 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

【命题目的】 本题考查了含有边界条件的微分方程的解法.

【详细解答】 由方程中含有 $\ln x$ 可知:$x>0$

则对方程两边均除以 x 可得
$$y'+\frac{2}{x}y=\ln x$$
所以 $p(x)=\frac{2}{x}, q(x)=\ln x$

所以方程的通解为:
$$y=\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\tilde{C}\right]\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$
$$=\left[\int \ln x\cdot \mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\tilde{C}\right]\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+\tilde{C}\right)\cdot\frac{1}{x^2}$$
由初始条件 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 可得:$-\frac{1}{9}=-\frac{1}{9}+\tilde{C}$,即 $\tilde{C}=0$

所以微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为:$y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.