21世纪高等院校教材

线性代数

（第二版）

陈维新　编著

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

线　性　代　数

（第二版）

陈维新　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书采用读者易于接受的方式科学、系统地介绍了线性代数的行列式、线性方程组、矩阵、线性空间和线性变换、特征值和特征向量·矩阵对角化、二次型等内容．既保持了第一版力求以较为近代的数学思想统一处理有关内容，又兼顾了适用性和通用性．全书涵盖了考研数学考试大纲有关线性代数的所有内容而有余．习题按小节配置，数量大，题型多，有层次，书后附有答案．各章末均有概要及小结，便于读者深入理解，触类旁通，开拓思维．

本书读者对象为理工科大学所有非数学专业以及其他高等院校理工、经管、医药、农林等专业的大学生、教师．对于报考自学考试、硕士研究生的人员也适用．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈维新编著．—2版．—北京：科学出版社，2006

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-016412-1

Ⅰ．线…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第126450号

责任编辑：姚莉丽／责任校对：包志虹

责任印制：安春生／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2000年2月第 一 版　开本：B5(720×1000)

2006年1月第 二 版　印张：20 1/2

2006年1月第九次印刷　字数：387 000

印数：30 001—34 000

定价：27.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

第二版前言

本书的第一版出版迄今已有五年,时代在前进,教育在发展,高校在上层次争一流,线性代数课程的教材也在与时俱进,于是就有本书的第二版.

为学时数计,第二版把第一版六章45节改写成六章37节.压缩的8节有5节是第一版中打“*”号的选学内容,现在部分被删去,部分作为附录,还有3节被并入相关章节.正因为此,第二版保留了第一版的风貌,而其主体(不包括打“*”号、用仿宋体排印部分及附录)将适合高等院校非数学专业48学时线性代数课程的教学.如果学时数更少,可略去4.9,4.10两节,而这两节略去不影响后两章的教学.

第二版在正文、附录和习题三方面都增添了一些新的内容,这些内容来源于三个方面:一是国外当今通用的线性代数教材;二是国内新出版的一些线性代数教材;三是作者历年考研辅导班的讲稿.所参考的主要资料已列入书末参考文献[5]~[10].

第二版既保留了第一版的风格和特色,又汲取了国内外新的线性代数教材的长处,并融入了作者长期辅导考研的经验.所以第二版不仅完全达到高等教育本科线性代数课程的教学基本要求,而且即使略去4.9,4.10两节,也涵盖了教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中有关线性代数的所有内容,在核心部分还有所展开和加深,因而为学生进一步深造提供良好的线性代数基础.

第二版的附录是主体内容外的选学部分.附录一和附录二是预备知识,附录三、附录五和附录六是应用,附录四是提高和深化,均供读者酌情选学.

浙江大学宁波理工学院院长俞庆森教授十分关心支持作者修订本教材,使本书的修订有幸列为浙江大学宁波理工学院课程建设项目,得到教改资金资助.浙江大学教务部、数学系,宁波理工学院教务处、基础部等部门诸多领导对本教材的修订、使用各个方面给予大力帮助和支持.科学出版社姚莉丽同志大力支持使本书第二版得以面世.涂黎晖同志在校对和文字上给予帮助.对此作者一并表示衷心的感谢!

本书第二版的初稿在2005年2月完成.蒙诸多同仁厚爱,初稿作为讲义在浙江大学和浙江大学宁波理工学院内部使用,经教学实践,在汲取各方意见后才得以定稿.作者深深地感谢所有使用过本书的同仁,您的支持和帮助对第二版的问世是至关重要的.

学海无涯，探索永恒．祈请专家同仁和广大读者不吝赐教，多多指正．

陈维新
2005 年 9 月
浙江大学求是村
浙江大学宁波理工学院

第一版序

线性代数是以讨论线性空间、线性变换理论为主的课程，然而因学时所限，工科线性代数教材要这样做并非易事. 本教材将尝试做这件事，不仅将一般的抽象的线性空间、线性变换放到核心位置上来讲，而且力求讲得清楚明白. 因而在教材编著中作了以下探索:

1. 低起点，高坡度. 起点和中学解方程接轨，随着章节展开步步深入. 通过线性空间、线性变换的学习，使学生接触到近世代数的一些思想、方法.

2. 引入必要的理论是为了以较高的观点来揭示本质，从而把抽象的问题具体化，复杂的问题简单化. 为此在线性空间、线性变换中引入了“同构”.

3. 教材编写中注意到引入思想，剖析方法. 在阐明结果的同时，着眼于提高学生素质.

4. 尽量以提出问题，讨论问题，解决问题的方式来展开教材. 致力于工科学生也能知其所以然.

5. 教材中有较多的典型例题，以期举一反三. 习题按小节配置，注意兼容各种题型，有难有易(难题标有 * 号)，留有充分的选择余地.

6. 每章末均有“概要及小结”，这不仅是该章的概括提要，还常有加深理解，开拓思维的内容.

7. 注意到线性代数在其他学科的渗透和应用，在篇幅允许时，尽量予以提及.

8. 行文追求清楚明白，力图使大学一年级学生都能看懂，即使自学也能掌握. 故本教材对准备报考硕士研究生和自学考试的学生都是有益的.

教材的主体(不包括打 * 号用仿宋体排印部分)适用于大学理工科本科、专科50学时的线性代数课所用. 如果学时数为40，则建议第四章线性空间以讲 P^n 为主，简要提及一般线性空间，第五章可不讲线性变换，仅讲矩阵对角化. 如果学时数为68，则可把全书(包括打 * 号用仿宋体排印的全部)讲完. 要指出的是，即使学时数为40的教学内容也完全满足教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的“工科类本科数学基础课程基本要求”(修订稿)中的线性代数课程教学基本要求而有余.

作者有幸在刘绍学教授门下学习代数，此书写作中又得到刘先生的鼓励和指导，深受教诲，师恩永铭. 今年11月欣逢先生70华诞，谨呈此书恭贺.

本书从设想、构思到撰写，一直得到李慧陵教授和张兆基副教授的帮助和支持，同时也得到本校代数组其他同仁吴志祥和童雯雯的帮助. 本书的打印本曾向

校内外同行广泛征求意见,承蒙众多同行厚爱,提出了许多宝贵意见,在此一并致谢.

浙江大学教务处、数学系的领导一直来支持帮助作者撰写教材,并把此书列入浙江大学课程建设,给予资助. 科学出版社吕虹同志大力支持使本书得以面世. 作者一并深表感谢.

虽作者在浙江大学执教代数 20 多年,此书从讲稿到定稿使用多年,几经修改. 然限于水平,撰写中常有绠短汲深之感,殷切地希望读者不吝赐教,多多指正.

陈维新

1999 年 6 月于浙江大学求是村

符　号　表

(按书中出现顺序排列)

符　号	意　义	页　码
P	数域	1
$\mathbf{Q}$	有理数域	1
$\mathbf{R}$	实数域	1
$\mathbf{C}$	复数域	1
$\mathbf{Z}$	全体整数	1
$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$	$\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbf{Q}\}$	1
$i_1 i_2 \cdots i_n$	n 阶排列	3
$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$	排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数	3
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lvert a_{ij} \rvert_n$	n 阶行列式	9
$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$	对所有 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和	10
D^{T}	行列式 D 的转置行列式	14
$R_i \pm kR_j$	行列式(矩阵)第 i 行加上(减去)第 j 行 k 倍	17(48)
$C_i \pm kC_j$	行列式(矩阵)第 i 列加上(减去)第 j 列 k 倍	17(48)
$\sum$	连加号	20(266)
M_{ij}	行列式元素 a_{ij} 的余子式	23
A_{ij}	行列式元素 a_{ij} 的代数余子式	23
$D(a_1, a_2, \cdots, a_n)$	n 阶范德蒙德行列式	28
$\prod$	连乘号	28(267)

续表

符　　号	意　　义	页　码
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵	48(71)
$\overline{\boldsymbol{A}}$	($\boldsymbol{A}$ 的)增广矩阵	48
$R_{ij}(C_{ij})$	矩阵第 i 行(列),第 j 行(列)互换	48
$kR_i(kC_i)$	矩阵第 i 行(列)乘 k	48
$r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩	51
$A \Rightarrow B$	A 成立可推出 B 成立	57
$A \Leftrightarrow B$	A 成立的充要条件为 B 成立	57
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式	71
$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{O}_{m\times n})$	零矩阵	73
$-\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵	73
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}_n)$	单位矩阵	76
$\lambda\boldsymbol{E}(\lambda\boldsymbol{E}_n)$	数量矩阵	77
$\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t]$	对角矩阵	77
$\boldsymbol{A}^k$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次方幂	77
$f(\boldsymbol{A})$	矩阵多项式	78
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}')$	$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵	81
$\boldsymbol{E}_{ij}$	矩阵单位	84(132)
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$ 的迹	85(208)
$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵	86
$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵	86
$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1q} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pq} \end{bmatrix}$	分块矩阵	92
$\mathrm{diag}[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_t]$	准对角矩阵	97
$\boldsymbol{E}(i,j)$	初等矩阵(互换)	100

续表

符　　号	意　　义	页　码
$\boldsymbol{E}(i(k))$	初等矩阵(倍乘)	100
$\boldsymbol{E}(i+j(k),j)$	初等矩阵(倍加)	101
$\mathbf{R}^n$	实向量空间	118
V	线性空间	118
$\boldsymbol{\theta}$	零向量	119
P^n	n 元向量空间	119
$P^{m\times n}$	数域 P 上 $m\times n$ 矩阵全体	119
$P[x]_n$	系数取自数域 P 上次数小于 n 的一元多项式全体及零多项式	119
$P[x]$	系数取自数域 P 上的一元多项多的全体	119
$C[a,b]$	闭区域$[a,b]$上连续实函数的全体	120
$-\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量	120
$\dim P^n$	P^n 的维数	132
W	子空间	138
$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)$	$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 生成的子空间	139
$C(\boldsymbol{A})$	所有与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可换的矩阵	141
$\sigma:M\to N$	M 到 N 的映射	151
$\sigma(a)$	a 在映射 σ 下的像	151
$\sigma(M)$	值域	151
I_M	恒等映射	151
σ^{-1}	σ 的逆映射	152
$V\cong V'$	V 与 V' 同构	153
$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$	$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 的内积	157
$\Vert\boldsymbol{\alpha}\Vert$	实向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度	159
$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$	实向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角	161
$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交	161
$G(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$	格拉姆行列式	172

续表

符　号	意　义	页　码
$\mathscr{A}$	线性变换	173
$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$	$\boldsymbol{\alpha}$ 在线性变换 $\mathscr{A}$ 下的像	173
$\mathscr{E}$	恒等变换	174
$\mathscr{O}$	零变换	174
$LT(V)$	V 上全体线性变换	175
$-\mathscr{A}$	$\mathscr{A}$ 的负变换	175
$\mathscr{A}^{-1}$	$\mathscr{A}$ 的逆变换	176
$f(\lambda)=\lvert\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\rvert$	$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式	198
$\boldsymbol{W}_{\lambda_0}$	属于 λ_0 的特征子空间	202
Δ_k	k 阶顺序主子式	249
$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$	$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离	287
$\boldsymbol{\alpha}\perp W$	$\boldsymbol{\alpha}$ 与 W 正交	287

目　　录

第1章 行 列 式

线性代数是中学代数的继续和提高. 第1章和第2章就是中学代数解一元一次(线性)方程 $ax+b=0$ 的延伸和深化,研讨多个未知量多个线性方程组成的线性方程组的求解问题. 为此要引入一些概念,作为预备知识.

1.1 数域与排列

本节讨论数域和排列.

1.1.1 数域

研究某些问题时,常和所研究对象的取值范围有关. 如求方程 $x^2+1=0$ 的根,不仅在有理数范围无解,就是在实数范围也无解,而在复数范围有解,解为 $\pm i$. 又如在整数范围内,除法不是普遍可做的,因商不一定是整数,而在有理数范围内,只要除数不为零,除法总是可做的. 另一方面,这些范围不同的有理数、实数、复数有着许多共同的性质,特别地,有着许多共同的运算(指加法、减法、乘法和除法)性质. 如加法、乘法的可交换性,加法、乘法的可结合性等. 为了在以后的讨论中能把具有这些共同运算性质的数集统一处理,我们引入一个一般的概念.

定义 1.1.1 设 P 是至少有两个不同复数组成的集合,若 P 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍为 P 中的数,则 P 就称为一个**数域**.

如果数的集合 P 中任意两个数作某一运算的结果都仍在 P 中,就称数集 P 对这个运算是**封闭**的. 因此数域的定义也可以说成:对于加法、减法、乘法和除法(除数不为零)均封闭的至少含有两个不同数的数集.

从定义 1.1.1 可推知:全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合都是数域. 这三个数域分别用字母 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 来表示,且有 $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. 一般地设 K 和 F 均为数域,若 $K\subseteq F$,则称 K 为 F 的**子域**,F 为 K 的**扩域**. 据此 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的扩域,$\mathbf{C}$ 的子域.

例 1.1.1 记全体整数的集合为 $\mathbf{Z}$,则 $\mathbf{Z}$ 不是数域. 这是因为 $2,3\in\mathbf{Z}$,且 $3\neq0$,但 $\frac{2}{3}\notin\mathbf{Z}$,这表明 $\mathbf{Z}$ 对于除法不封闭.

例 1.1.2 记 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$,则 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 是数域.

证　容易看出 $\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{Q}(\sqrt{2})$，且对任意的

$$a+b\sqrt{2},\quad c+d\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}),$$

有

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}),$$
$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

此外，当 $a+b\sqrt{2}\neq 0$ 时，$a-b\sqrt{2}$ 必不为零.（反证）若 $a-b\sqrt{2}=0$，可推出 $a=0,b=0$，这与 $a+b\sqrt{2}\neq 0$ 矛盾.故可有

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}$$
$$=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

综上可知：$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 是数域.而且从 $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$，$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 知：

$$\mathbf{Q}\subset\mathbf{Q}(\sqrt{2})\subset\mathbf{R}.$$

定理 1.1.1　设 P 是任何一个数域，则 $\mathbf{Q}\subseteq P$.

证　据数域定义知，P 中有相异复数 a,b.故 a,b 中必有一个不为零，不妨设 $a\neq 0$，从而

$$a-a=0\in P,\quad \frac{a}{a}=1\in P.$$

进而对任意正整数

$$n=\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{n}\in P,$$

又因 P 对减法封闭，所以

$$-n=0-n\in P,$$

这样 $\mathbf{Z}\subseteq P$.对任意的 $\dfrac{m}{n}\in\mathbf{Q}$，此处 $m,n\in\mathbf{Z}$，$n\neq 0$，有 $m,n\in P$，再利用 P 对除法封闭，有 $\dfrac{m}{n}\in P$，这表明 $\mathbf{Q}\subseteq P$.

定理 1.1.1 说明任何数域 P 必含 $\mathbf{Q}$ 作为其子域，从这个意义上我们可称 $\mathbf{Q}$ 为**最小数域**.这说明任何数域必含有无穷多个数.

下面习题 1.1 第 1 题，表明数域有无穷多个.

今后我们常在数域 P 上讨论问题，对所涉及的数进行四则运算，推导出的结果自然就在数域 P 中.这样就使得该结果在数域 P 上成立，而数域 P 是泛指的，即可以是 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$，或其他某个数域，从而使结果有一般性.

为简单计，如把下文中的数域 P 当作 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 来考虑也无妨.

1.1.2 排列

定义 1.1.2 由 $1,2,\cdots,n$ 共 n 个数码组成的一个有序数组,称为一个 n **阶排列**.

例如, 14532, 65(12)798(11)4(10)312, $n(n-1)\cdots 21$ 分别为 5 阶排列, 12 阶排列, n 阶排列.

n 阶排列的一般形式可表为 $i_1 i_2 \cdots i_n$,其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 中某一个数,且互不相同,下标分别表示这些数在 n 阶排列中的次序. 按 n 阶排列的定义知 i_1 可有 n 种选取(n 个数码中任选一个), i_2 有 $n-1$ 种选取(去掉 i_1,余下的 $n-1$ 个数码中任选一个),……, i_{n-1} 可有 2 种选取(去掉 $i_1, i_2, \cdots, i_{n-2}$,余下的 2 个数码中任选一个),而 i_n 只能取余下的那个数码,故 n 阶排列共有

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

个. 例如 3 阶排列共有 6 个,它们是

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321.$$

在 $n!$ 个 n 阶排列中,惟有 $12\cdots(n-1)n$ 是按数码从小到大的次序组成的一个排列(称为**标准排列**). 其余的排列或多或少会出现大的数排在小的数前面的情况. 在排列 $i_1 i_2 \cdots i_j \cdots i_k \cdots i_n$ 中,如 $j<k$ 而 $i_j > i_k$,则称 i_j, i_k 构成一个**逆序**. 一个排列的逆序总数称为排列的**逆序数**,记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**,逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

计算排列的逆序数方法之一是

$$\begin{aligned}\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = {} & \tau(i_1)\ (i_1 \text{ 后面比 } i_1 \text{ 小的数的个数}) \\ & + \tau(i_2)\ (i_2 \text{ 后面比 } i_2 \text{ 小的数的个数}) \\ & + \cdots \\ & + \tau(i_{n-1})\ (i_{n-1} \text{ 后面比 } i_{n-1} \text{ 小的数的个数}).\end{aligned}$$

据此

$$\tau(14532) = 0 + 2 + 2 + 1 = 5. \qquad 14532 \text{ 为奇排列}.$$

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

所以当 $n = 4k, 4k+1$ 时为偶排列;当 $n = 4k+2, 4k+3$ 时为奇排列.

注意到 $\tau(12\cdots(n-1)n) = 0$,故 $12\cdots(n-1)n$ 为偶排列.

将一个排列中某两个数码的位置互换,而其余数码不动,就得到另一个排列,这样的变换称为**对换**. 例如,经过 1,3 两数码对换,排列 14532 就变成排列 34512. 通过计算知 $\tau(34512) = 6$,故 34512 为偶排列. 这表明奇排列 14532 经过一次对换得到偶排列 34512. 一般有下列定理.

定理 1.1.2 任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

证　首先证明对换排列中相邻两个数码的情况. 设排列$\cdots i_k\, i_{k+1}\cdots$经过 i_k, i_{k+1}对换后变成排列$\cdots i_{k+1}\; i_k\cdots$,这里“$\cdots$”表示排列中那些不动的数码. 故排列“$\cdots i_k i_{k+1}\cdots$”与排列“$i_{k+1}\, i_k\cdots$”中 $\tau_1,\cdots,\tau_{k-1},\tau_{k+2},\cdots,\tau_n$ 是相同的,可能不同的只是 τ_k 与 τ_{k+1}. 从而

若 $i_k < i_{k+1}$,则排列“$\cdots i_{k+1}\, i_k\cdots$” 比“$\cdots i_k i_{k+1}\cdots$” 多1个逆序;

若 $i_k > i_{k+1}$,则排列“$\cdots i_{k+1}\, i_k\cdots$” 比“$\cdots i_k i_{k+1}\cdots$” 少1个逆序.

故不论如何,排列的奇偶性改变了.

现在讨论一般情况. 设对换的两个数码 i_k 和i_j 中间有s个数码,即设排列为

$$\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_{k+s} i_j\cdots. \tag{1.1.1}$$

经过 i_k, i_j 对换后,变成排列

$$\cdots i_j i_{k+1}\cdots i_{k+s} i_k\cdots. \tag{1.1.2}$$

从(1.1.1)开始,把 i_j 依次与左边$s+1$个数码 $i_{k+s},\cdots,i_{k+1},i_k$ 进行相邻数码的对换,排列(1.1.1)变成排列

$$\cdots i_j i_k i_{k+1}\cdots i_{k+s}\cdots. \tag{1.1.3}$$

再对排列(1.1.3)把 i_k 向右依次与s个数码$i_{k+1},\cdots,i_{k+s}$进行相邻数码对换,排列(1.1.3)变成排列(1.1.2). 这表明 i_k 与i_j 的对换可通过$2s+1$次相邻数码对换来实现,而每经一次相邻数码对换改变排列奇偶性. 现经奇数次相邻数码对换,最终必改变排列的奇偶性.

习　题　1.1

1. 如同 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$那样记 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$,可证 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$也是数域,且可证$\mathbf{Q}(\sqrt{2})\not\subseteq\mathbf{Q}(\sqrt{3})$,$\mathbf{Q}(\sqrt{3})\not\subseteq\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. 一般地设 p 为素数,记

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p})=\{a+b\sqrt{p}\mid a,b\in\mathbf{Q}\},$$

则可证 $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$为数域. 进而若 p,q 为相异素数,则 $\mathbf{Q}(\sqrt{p})\not\subseteq\mathbf{Q}(\sqrt{q})$,$\mathbf{Q}(q)\not\subseteq\mathbf{Q}(\sqrt{p})$. 这表明在 $\mathbf{Q}$ 与 $\mathbf{R}$ 间存在着无穷多个不同的数域. 请读者写出上述结论的证明.

2. $P(\sqrt{-1})=\{a+b\sqrt{-1}\mid a,b\in$ 数域 $P\}$是不是数域? 为什么?

$\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$,$\mathbf{R}(\sqrt{-1})$,$\mathbf{C}(\sqrt{-1})$分别是什么?

$\mathbf{Z}(\sqrt{-1})=\{m+n\sqrt{-1}\mid m,n\in\mathbf{Z}\}$是不是数域? 为什么?

3. 设 F,K 均为数域.

(1) 证明:$F\cap K$ 也是数域.

*(2) 问 $F\cup K$ 是否是数域? 如果是请证明,否则举出反例.

4. 写出由4个数码1,2,3,4组成的所有4阶排列.

5. 计算以下各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性:

(1) 314265;　　(2) 314265789;　　(3) 542391786;