北京青少年科技辅导员协会
数学早慧少年研究会 编

从算术到代数

1

6 < 7 > 1
∨ ∨ ∧
3 < 5 < 8
∨ ∨ ∧
2 < 4 < 9

CONG SUANSHU DAO DAISHU

测绘出版社

从算术到代数

（一）

北京青少年科技辅导员协会
数学早慧少年研究会编

测绘出版社

《从算术到代数》编委会

主　编　张君达

副主编　王进明

编　委　张君达　王进明　裘宗沪

　　　　陶晓勇　周沛耕　郜舒竹

从算术到代数（一）

北京青少年科技辅导员协会

数学早慧少年研究会编

*

测绘出版社出版

二二〇七工厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32·印张 2·字数 32 千字

1988年1月第一版·1988年1月第一次印刷

印数 00,001-80,000 册·定价 0.39 元

ISBN 7-5030-0116-X/O·7

统一书号：7039·新 658

编者的话

《从算术到代数》是以小学四、五、六年级及初一学生为主要对象的短文系列读物. 针对中小学数学的衔接问题，本书汇有“不要忘记算术”、“帮你学代数”、“数学医院”、“哪种解法好”、“我的心得（学生习作）”等方面的文章，阅读这些文章有助于沟通算术与代数间的联系，帮助学生逐步熟悉中学数学的学习内容及方法. 兴趣是青少年学习动机的一个主要因素，本书安排了“生活中的数学”、“看谁算得巧”、“名人轶事”、“数学小故事”、“智力游乐园”等方面的内容，力图达到广而不杂，精而不秘，寓知识于趣味之中. 对于具有较好的数学素质且学有余力的学生，本书设有“你达到哪一级”、“考考你自己”、“做数学奥林匹克的预备队员”等专题内容，以帮助学生在不同层次上确立自己的攀登目标.

为了有利于老师和家长辅导学生阅读与使用《从算术到代数》，本书将介绍国内外教育科学研究动态以及家长辅导孩子的经验.

《从算术到代数》作为短文系列读物，今后将陆续出版. 希望她能为老师开展数学课外活动提供辅导教材，能为家长启蒙孩子提供参考资料，能成为青少年从小爱数学的良师益友.

《从算术到代数》编委会

目　录

注：目录中未注明作者的均为本书编委会供稿。

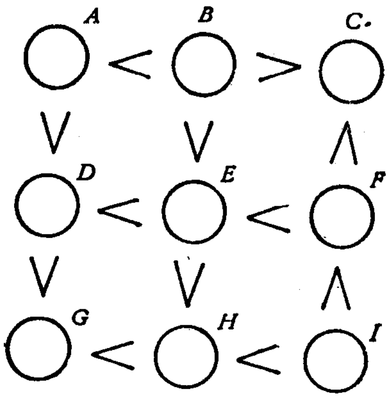
不要忘记算术

找出所有的解答

裘宗沪

我们在封面上登载了这样一道题目：

将1，2，…，9九个数字分别填在九个圆圈内，使不等号成立。



小学高年级同学已学过不等号，找出问题的一个解答是很容易的。但是，这道题目有许多解答，能否找出所有的解答吗？恐怕不少同学还做不到。

因此有必要与同学们讲一讲。

将来同学们会碰到许多问题，它的解答不止一个，只有求出了所有解答，才算是完全的答案。从现在开始，我们要逐渐学好找出所有解答的本领。要找到所有解答，必须考虑各种可能的情况。因此要有条理地一步一步区分各种可能情况，才能保证不遗漏每一个解答。现在，请大家一起来考虑上面的问题。为了说话方便，我们将每一个圆圈用一个英文字母表示。

突 破 口

我们先填哪一个圆圈呢？也就是寻找解题的"突破口"。

我们先看一看圆圈间的不等号，只有右下角圆圈 I 和上面中间的圆圈 B 都是"大于号"，其余圆圈都有"小于号"。因此，最大的数字 9，应在这两个圆圈之一。也就是有两种情况要考虑。

因为圆圈 I 只有两个不等号，所以先考虑将 9 填在圆圈 I 内，这样就简单些。

然后，又看到右上角圆圈 C 和左下角圆圈 G 都是"小于号"，那么最小的数字 1，应填在这两个圆圈之一。

很明显，如果圆圈 C 填 1，那么 2 应填在圆圈

G中。反过来，如果圆圈G填1，那么圆圈C，还有圆圈D和圆圈H也可以填2。因此，考虑圆圈C填1，这种情况要更简单些。当有多种情况要考虑时，我们总是先考虑较简单的情况，这样容易使思考逐步深入。

I填9，C填1，G填2。去掉这些圆圈后，圆圈D和圆圈H，都是只要满足"小于号"，自然分别应填剩下数中最小的3和4。再去掉圆圈D和圆圈H后，圆圈A和圆圈E又都是只要满足"小于号"，就应填剩下数中最小的5和6。那么圆圈B和圆圈F就分别填7和8。

互　换

圆圈D和圆圈H分别填3和4，是可以互相交换的。圆圈A和圆圈E分别填5和6，圆圈B和圆圈F分别填7和8，也是可以互相交换的。互相交换后，就得到不同的解答。上面这样的互换一次就得到两个不同的解答，再互换一次就得到$2\times2=4$个不同解答。

I填9，C填1，G填2，三对数字互换三次，就得到$2\times2\times2=8$个不同解答。

有了上面这样的思路和方法，再考虑I填9，G填1。此时，有C、D、H三个圆圈都只要满足

“小于号”。因此，应分别填剩下的最小三个数字2，3，4。当然这三个数字也可以互相交换。那么能产生几个不同的解答呢？

先填好一个数字，例如C填2，其他两个互相交换填3和4，就有两个解答。类似地，C填3，D和H互相交换填2和4，又有两个解答；C填4，D和H互相交换填2和3，又有两个解答。因此，三个数字互换共产生六种不同解答。再考虑A和E互相交换填5和6，B和F互相交换填7和8，就有$6\times2\times2=24$种不同解答。这样一来，I填9，共有$8+24=32$种不同解答。

特殊的考虑

一开始，我们就考虑过B可以填9，很明显I必须填8。因此，再考虑I填8的各种可能情况。事实上，B必须填9，F必须填7，也就是说，圆圈F和圆圈F填的两个数字不再能互换。上面说到的互换，除B与F外，都可以照样进行，但B与F不能互换。这样上面产生的不同解答就要少一半，因此I填8，有$32\div2=16$种不同解答，总共就有$32+16=48$种不同解答。

到现在为止，是否还有哪些情况漏掉了呢？有！如果A填6，F填7，那么A与F也是可以互

换的。

在 I 填 8 和 B 填 9（F 必须填 7）这 16 种情况中，有一半是 A 填 6，有 $16 \div 2 = 8$ 种不同解答。在 I 填 9 的 32 种不同解答中，有一半是 F 填 7，其中又有一半是 A 填 6，也有 8 种不同解答。因此，A 填 6，F 填 7 共有 16 种不同解答，两个圆圈填的数再互换一下，又有 16 种不同解答。这样，总共有了 $32 + 16 + 16 = 64$ 种不同解答。

现在，再请同学们想一想，上面的解法是否已经考虑了所有可能情况呢？好好想一想！

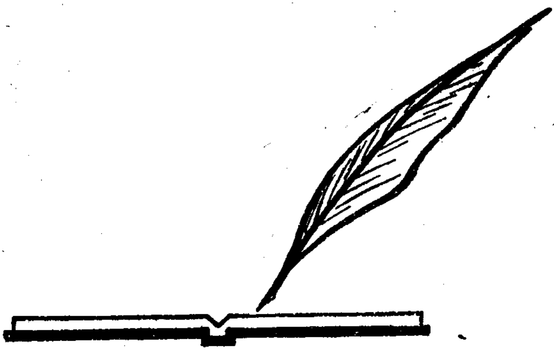
你们还会找出：

E 填 4，还有 16 种不同解答。

E 填 5，C 填 6 还有 8 种不同解答。

E 填 6，C 填 5 还有 8 种不同解答。

这道题总共有 $64 + 16 + 8 + 8 = 96$ 种不同解。



1001、21与7

晓　玮

同学们，请你把任意一个三位数连着写两次，得一个六位数，这个六位数一定能被7整除。例如，把825连着写两次，得825825，它除以7的商是117975，所以7能整除825825.下面还以825为例说明这个结论的理由。

$$\begin{aligned} 825825 &= 825000 + 825 \\ &= 825 \times 1000 + 825 \\ &= 825 \times 1001. \end{aligned}$$

$$1001 = 7 \times 11 \times 13.$$

这说明：按上面要求写出来的六位数，一定可以写成一个三位数与1001的积，而1001能被7整除，所以这样的六位数也一定能被7整除。

一个数能被7整除的特征是什么？请看下面的例题。

例1：已知1437653能被7整除，这个数可写成

$$\begin{aligned} 1437653 &= 1437000 + 653 \\ &= 1437000 + 1437 - 1437 + 653 \end{aligned}$$

$$=1437\times1001-(1437-653).$$

由于 1437×1001 能被 7 整除，则 $1437-653$ 也一定能被 7 整除，显然

$$1437-653=784=112\times7.$$

这道题说明了一个数能被 7 整除的特征之一：这个数的末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数的差（以大减小）能被 7 整除。

例 2：已知 1925 能被 7 整除，该数可表示为

$$\begin{aligned}1925&=1920+5\\&=1920+20\times5-20\times5+5\\&=(192-2\times5)\times10+21\times5.\end{aligned}$$

因为 21×5 能被 7 整除，所以 $(192-2\times5)\times10$ 也一定能被 7 整除，事实上

$$\begin{aligned}&(192-2\times5)\times10\\&=182\times10=26\times7\times10.\end{aligned}$$

通过这个例子我们找到一个数能被 7 整除的另一个特征：一个数去掉个位数字以后所剩的数，减去被去掉的数字的 2 倍，所得的差能被 7 整除。

以上我们从 1001、21 能被 7 整除这一事实，引出任意一个数能被 7 整除的两个特征。利用这两个特征又可以判断一个数能否被 7 整除。

例 3：判断 42438627 能否 7 整除。

$$\begin{aligned}42438627&=42438\times1001-(42438-627)\\&=42438\times1001-41811\end{aligned}$$

$= 42438 \times 1001 - [41 \times 1001 - (41 - 811)]$

$= (42438 - 41) \times 1001 - 770$。

应用第一个特征，由于770能被7整除，所以42438627能被7整除。

例4：判断2471能否被7整除。

应用第二个特征，如果用横式，则可写成

$$
\begin{aligned}
2471 &= 2470 - 20 \times 1 + 20 \times 1 + 1 \\
&= (247 - 2 \times 1) \times 10 + 21 \times 1 \\
&= 245 \times 10 + 21 \times 1 \\
&= (24 - 2 \times 5) \times 100 + 21 \times 5 + 21 \times 1 \\
&= 14 \times 100 + 21 \times 6
\end{aligned}
$$

为简便起见，用竖式写成

$$
\begin{array}{r}
247\cancel{1} \\
-\quad 2 \\
\hline
24\cancel{5} \\
-10 \\
\hline
14
\end{array}
$$

因为14能被7整除，所以2471能被7整除。

象上面老是去掉最后一个数字后做减法，这种方法在数学中叫做割减法。

概念辨析

晋泉增

1. 整除和除尽

整除和除尽是两个既有联系又有区别的概念。整除是指数 a 除以数 b（a、b 均为自然数且 b 不为零），除得的商正好是整数，而余数为零。除尽是指数 a 除以数 b（不为零），除得的商为整数或有限小数，余数为零。通过下面的例子可以加深对这两个概念的理解。

举例：$16 \div 5 = 3.2$（除尽）

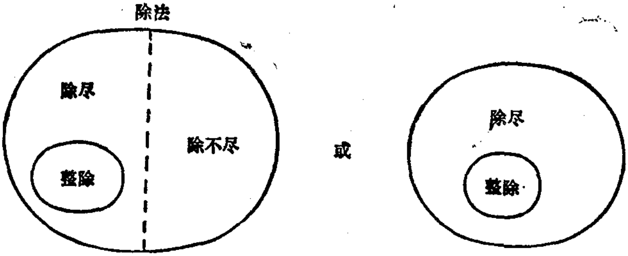
$20 \div 5 = 4$（既可说除尽，也可说整除）

$1.4 \div 0.2 = 7$（只能说除尽，不能说整除）

从定义及上例可知：两个数 a、b（b 不为零），a 能被 b 整除时，a 一定能被 b 除尽；但 a 能被 b 除尽时，a 不一定是被 b 整除。这就是说，除尽包括整除，整除是除尽的特殊情况，它们间的联系和区别可从下页的图看出。

2. 倍数和倍

如果数 a 能被数 b 整除，那么 a 就叫做 b 的



倍数。倍数表示的是能被某一个自然数整除的数，它是一个自然数(或整数)，但不能孤立地说某数是倍数。例如，15÷3=5，因15能被3整除，故说15是3的倍数，不能说15是倍数。

倍表示两个数相除的商。倍不一定是整数，也可以是小数。例如，3÷2=1.5，就说3是2的1.5倍。

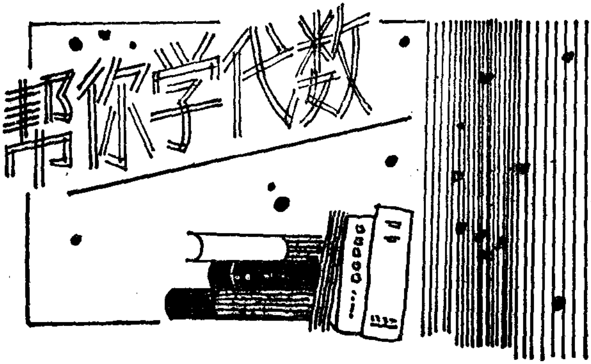
由此看来，"倍数"处于被除数的地位；"倍"处于商的地位。下面图示可说明这两个概念。

→倍(表示15是3的5倍)

15 ÷ 3 = 5

→倍数(表示15是3的倍数)

同学们对以上概念熟悉之后，在叙述分数性质时，说成"分数的分子与分母同时扩大(或缩小)相同的倍数，分数值不变"就不确切了，应该将其中"相同的倍数"说为"同数倍"才对。



从算术到代数

北京 161 中特级教师　肖淑英

同学们从小学进入中学以后，开始学习代数，经过一段学习，有些同学感到心中没底，不知怎样才能学好代数，结合这种情况，简单谈谈我的看法。

（算术与代数虽然是数学中两门不同的分科，但它们之间有着密切的联系。）在很早的时候，人们在生产实践中，由于计数的需要，就有了自然数和分数的概念，并且用 0 表示没有。这些数就是算术中的数，统称为算术数。由于有相反意义的量的存在，而算术数只能表示量的大小，不能表示量的相反意义，因此人们便引入了负数，把算术数扩展

到有理数，并研究有理数的运算与比较大小。因此代数是在算术中的“数”和“运算”的基础上发展起来的。

数学知识的系统性、科学性很强，代数中的一些基本概念是逐步地被引进来。例如在学习有理数的运算法则与比较有理数的大小之前，首先要理解绝对值、相反数和倒数等概念。因此正确理解概念是学好代数的前提，不能忽视任何一个基本概念，初学代数时一定还要掌握以下重点知识：

一、深刻理解负数的概念

把算术中的数(除 0 外)，它的前面加上“－”号的数，叫做负数。符号“－”是性质符号。负数的引入、建立有理数的概念是算术过渡到代数的第一步，是学习代数的基础。依运算法则进行有理数四则运算所得到的结果的有理数，都是由性质符号和绝对值组成的，在计算时首先要确定它的符号，否则就会出现差错。

二、深刻理解字母表示数的意义

我们在学习算术时已经知道，利用字母表示数有简明、普遍化的优越性。而在代数中要通过字母表示数。从学习有理数转到代数式，这是从算术过渡到代数的关键的一步。字母表示数是桥梁，代数