高等学校教材

实变函数与泛函分析概要

（第三版） 第二册

王声望 郑维行 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

实变函数与泛函分析概要

（第三版）

第二册

王声望　郑维行　编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析概要.第2册/王声望,郑维行编.—3版.—北京:高等教育出版社,2005.11
ISBN 7-04-017566-5

Ⅰ.实…　Ⅱ.①王…②郑…　Ⅲ.①实变函数-高等学校-教材②泛函分析-高等学校-教材　Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第113225号

策划编辑	李　蕊	**责任编辑**	崔梅萍	**封面设计**	王凌波
版式设计	马静如	**责任校对**	王效珍	**责任印制**	孔　源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	河北新华印刷一厂		
		版　　次	1990年5月第1版
开　　本	850×1168　1/32		2005年11月第3版
印　　张	11.375	**印　　次**	2005年11月第1次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	17.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　17566-00

第三版前言

本书自第二版出版以来,经过不少学校教师使用,普遍感到基本上能适合教学要求,但也提出一些宝贵建议。我们在这次修订时认真地参考这些建议作了修改。例如,在内容上删去了非线性泛函部分,增加了 Banach 空间解析算子演算,对 Hilbert 空间自伴紧算子知识作了较详细阐述。此外,对一些不恰当之处也进行了修正,将不少术语改为通行的用词,如将直交改为正交,共轭空间改为对偶空间,自共轭算子改为自伴算子等等。由于水平所限,时间较紧,错误、遗漏之处在所难免,敬希广大读者不吝赐教。在此我们要感谢高等教育出版社王瑜、李蕊和崔梅萍等编辑的热心支持与很多教师、读者的宝贵建议,还要感谢 ATA 编辑部朱燕在打印中的辛勤劳动。

编者

2004 年 10 月于南京

第二版前言

本书自1980年出版以来，由于教育战线形势的不断发展与变化，并经过十多年的教学实践，特别是根据国内各高等院校使用本书的教师们所提出的很多重要而富有建设性的意见，感到本书在内容上需要作适当的调整与充实。编者本着这一精神并根据高等学校理科数学、力学教材编审委员会函数论(包括数学分析)、泛函分析编审组于1990年11月在南京大学召开的会议上制订的《实变函数论》与《泛函分析》教材编写大纲，作了认真仔细的斟酌，对本书完成了第二版的修订工作。修改以后的这份教材，注意了以下几方面：

第一，将原来的三章扩充为四章并另增加了一章，共五章。除第一版原有的内容，如距离空间，赋范线性空间、Hilbert空间，有界线性算子的几条基本定理，紧算子的Riesz－Schauder理论，自共轭算子的谱分解定理等外，增加的内容为：距离空间中的第一、第二类型的集，具有基的Banach空间，线性拓扑空间大意，有界线性算子的谱半径及谱半径公式，正常算子、酉算子的基本性质以及它们的谱分解定理，非线性泛函分析初步、广义函数大意以及Hilbert空间上的双线性泛函等。

第二，为了适应各种不同情况的读者的需要，在第二版中，对某些部分作了较特殊的处理，主要有：第八章定理7.13以及它前面的三条引理自成一个系统，在讲授时可以将这三条引理连同它们的证明全部略去而只介绍定理7.13的结论，至于定理7.13的证明自然也不必讲授。关于第九章，建议使用本书的教师与读者根据各自不同的情况采用以下几种方法：

1° 对于学时比较少的学校，可以介绍到第九章第二节或第三

节并加上第五、第六节中关于酉算子及正常算子的基本性质；

2° 对于学时稍多的学校，可以介绍到第九章第四节并加上第五、第六节中关于酉算子及正常算子的基本性质，至于自共轭算子的谱分解定理的证明连同其预备知识可以考虑删去而只介绍谱分解定理的结论；

3° 对于学时比较富裕的学校，则可以介绍到第九章第四节（包括全部证明）以及第五、第六节中关于酉算子以及正常算子的基本性质，至于酉算子、正常算子谱分解定理可以考虑只叙不证。

以上只是编者的建议，仅供使用本书的教师及读者参考，至于其他章节，也可根据情况适当删减。希望使用本书的教师与读者尽可能根据自己的教学实践选择适合各自特点的教学内容与方法。

第三，本书对理论的阐述尽可能注意由浅入深、由具体到抽象。对每个较难的新概念引入，尽可能先从比较直观的角度加以阐述，然后给以严格的定义。例如，对有界线性算子范数的引入，我们先考虑算子沿每个方向的伸长度，然后从伸长度中抽象出算子的范数这一概念。

第四，注意内容的归纳与总结，除少数例外，在每一节或每两节的最后都有一个小结，扼要地阐述有关的内容，提出应当注意的事项。希望这项工作对读者有所帮助。此外，习题基本上按节安排，但都集中放在每一章的最后。授课人可根据情况适当选择一部分作为学生的练习，以巩固课堂上所学的内容。

本书经华东师范大学程其襄、吴良森、魏国强三位教授审阅，他们在百忙中抽出宝贵时间仔细审阅了本书手稿并提出了很多宝贵意见，使本书增色很多。编者对于他们的意见都尽可能采纳了。尤其值得提出的是，程其襄教授作为我国泛函界的老前辈以八十高龄极其负责地审阅了本书手稿，使编者深为感动。

本书在修改过程中，得到了南京大学各级领导的关怀与支持，并为编者提供了各种方便。曾经使用过本书第一版的部分同志，

如苏维宜教授、鲁世杰教授、何泽霖副教授、王崇祜副教授、宋国柱副教授等都提出了很多宝贵意见，研究生李建奎、孙国正两位同志仔细阅读了手稿并提出很多宝贵意见，编者也都尽可能采纳了。本书每章每节均分成若干段，如第七章§3.1表示第七章第三节第一段，等等。

编者对以上所有为本书付出了辛勤劳动的同志表示由衷的感谢。由于我们水平有限，书中错误与疏漏之处在所难免，希望使用本书的教师、读者以及同行们不吝赐教。

编者

1991年3月于南京

目　录

第 二 篇

第二篇

第六章　距离空间

§1　距离空间的基本概念

在前面几章中,我们陆续讨论了 n 维欧几里得(Euclid)空间 $\mathbf{R}^n$,L^2 空间,L^p 空间等. 以 $\mathbf{R}^n$ 为例,我们在其中定义了**距离** ρ(见第一章 §4),它满足下面三个条件:

(i) **非负性**:对任何 $x,y\in\mathbf{R}^n$,$\rho(x,y)\geqslant 0$,而且 $\rho(x,y)=0$ 的充分必要条件是 $x=y$;

(ii) **对称性**: 对任何 $x,y\in\mathbf{R}^n$,有 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(iii) **三角不等式**: 对任何 $x,y,z\in\mathbf{R}^n$,有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

如果我们仔细分析一下 $\mathbf{R}^n$ 中的许多重要概念(如收敛概念)与结论(如极限的唯一性),就可以发现,实质上它们仅与距离 ρ 的性质(i) ~ (iii)有关. 再以第五章中介绍过的空间 $L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$为例,首先在其中定义了范数,然后利用范数定义了距离:

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\quad(x,y\in L[a,b]).$$

通过第五章的学习,读者不难发现,$L^p[a,b]$中的收敛概念以及与之有关的概念和结论,实质上也与其中的距离满足性质(i) ~ (iii)有关. 因此,为了在一般的非空集合中引进收敛概念,一个可行的办法就是先引进距离. 为了引进距离,则应以性质(i) ~ (iii)为基础. 在一般的非空集合中引进了距离后,我们便称它为距离空间. 大家将会看到,在一般的距离空间中,有很多与 $\mathbf{R}^n$ 相似的性质,

但也有很多本质的不同.这些不同更应引起我们的重视.

1.1 距离空间的定义及例

定义 1.1 设 X 为一非空集合,如果对于 X 中的任何两个**元素** x,y,均有一个确定的实数,记为 $\rho(x,y)$,与它们对应且满足下面三个条件:

(i) **非负性**: $\rho(x,y)\geqslant 0$, 而且 $\rho(x,y)=0$ 的充分必要条件是 $x=y$;

(ii) **对称性**: $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(iii) **三角不等式**: $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$,这里 z 也是 X 中任意一个元素,

则称 ρ 是 X 上的一个**距离**,而称 X 是以 ρ 为距离的**距离空间**,记为 (X,ρ). 条件(i)~(iii)称为**距离公理**. 距离空间中的元素又称为**点**. 在不会引起混淆的情况下,我们将 (X,ρ) 简记为 X.

现在设 X 为一距离空间,以 ρ 为距离. 又设 A 为 X 的一非空子集,则 A 按照距离 ρ 也是一个距离空间,称它为 X 的**子空间**. 如果 $A\neq X$,则称它为 X 的**真子空间**.

值得注意的是,在任何一个非空集合 X 上,我们都可以定义距离. 例如,对任一 $x\in X$,我们规定 $\rho(x,x)=0$,而对任何 $y\in X$,只要 $y\neq x$,便规定 $\rho(x,y)=1$. 显然 ρ 满足距离公理的全部条件,因此 X 按照距离 ρ 是一个距离空间,我们称它为**离散的**距离空间.

例 1 (见第一章 §4) ***n* 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$**

记 $\mathbf{R}^n$ 为所有 n 维实向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 组成的集合. 我们已经指出,在 $\mathbf{R}^n$ 中如果定义向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 与向量 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 之间的距离如下:

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{1/2}, \tag{1}$$

则 ρ 满足定义 1.1 中的全部条件. 在第一章中,我们没有逐一验证这些条件. 为清楚起见,今以三角不等式为例加以验证. 为此先证

明哥西(A. Cauchy)不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \tag{2}$$

其中 $a_k, b_k (k=1,2,\cdots,n)$ 均为实数. 任取实数 λ,则

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k + \lambda b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

右端是 λ 的二次三项式,而且这个二次三项式对 λ 的一切实数值都是非负的,故其判别式不大于零,即

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

因此,哥西不等式(2)成立. 由这个不等式得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.\end{aligned}$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中任取点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$,并在上述不等式中令 $a_k=\xi_k-\zeta_k$, $b_k=\zeta_k-\eta_k (k=1,2,\cdots,n)$ 便得到三角不等式:

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

因此 $\mathbf{R}^n$ 按距离(1)是一个距离空间.

在集合 $\mathbf{R}^n$ 中,我们还可以引入如下的距离:

$$\rho_1(x,y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k - \eta_k|. \tag{1'}$$

那么 ρ_1 也满足距离公理的全部条件,故 $\mathbf{R}^n$ 按照距离 ρ_1 也是一个距离空间(见本章习题第 1 题).

例 1 告诉我们,在一个集合中定义距离的方式不是唯一的. 一般说,如果在一个非空集合 X 中定义了距离 ρ 与 ρ_1,当 $\rho(x,y) \neq \rho_1(x,y)$ 时,那么 X 按照距离 ρ 与 ρ_1 构成的两个距离空间是不同

的. 因此, $\mathbf{R}^n$ 按照(1)及(1′)是两个不同的距离空间.

类似于例 1 中的 $\mathbf{R}^n$,我们还可以考虑复数的情形. 假设 $\mathbf{C}^n$ 是由所有 n 维复向量

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

组成的集合. 对 $\mathbf{C}^n$ 中的任意两个向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 及 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$,我们仍旧用(1)定义它们之间的距离,即

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{1/2}.$$

与实数情形类似,可以证明复数情形的哥西不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2,$$

其中 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均为复数.

由哥西不等式可得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)^{1/2}.$$

于是又可得到三角不等式

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

这里 x,y,z 均属于 $\mathbf{C}^n$. 因此按照(1)定义的距离 ρ, $\mathbf{C}^n$ 是一个距离空间.

今后如不特别声明,均取(1)作为 $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ 中的距离.

例 2 空间 $C[a,b]$

考虑定义在 $[a,b]$ 上所有实(或复)连续函数构成的集合 $C[a,b]$. $C[a,b]$ 中任意两个元素 x,y 之间的距离定义如下:

$$\rho(x,y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|, \tag{3}$$

则 $C[a,b]$ 按照(3)中的距离 ρ 是一个距离空间. 距离公理中的条件(i)与(ii)是明显的. 我们仅验证三角不等式. 设 $x,y,z\in C[a,b]$,则

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$$

$$
\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |z(t) - y(t)|
$$

$$
= \rho(x,z) + \rho(z,y).
$$

因此

$$
\rho(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y),
$$

即三角不等式成立. 故 $C[a,b]$ 按照(3)中的距离 ρ 是一个距离空间.

例 3 $L^p[a,b](1 \leqslant p < \infty)$

在第五章中,我们已比较详细地讨论了空间 $L^p[a,b]$,这里不打算重复. 大家知道,两个几乎处处相等的 p 幂可积函数在 $L^p[a,b]$中视为同一元素. 现在指出,如果对$L^p[a,b]$中任意两个元素 x, y,令

$$
\rho(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}, \tag{4}
$$

则 ρ 满足距离公理的全部条件(见第五章),因此 $L^p[a,b]$ 按照(4)中的距离 ρ 是一个距离空间.

例 4 空间 $L^\infty[a,b]$

在第五章中也已介绍了空间 $L^\infty[a,b]$. 现在我们对它进行比较详细的讨论,主要目的是证明按照由下面(5)式定义的距离 ρ, $L^\infty[a,b]$是一个距离空间.

称定义在区间$[a,b]$上的可测函数 $x(\cdot)$是**本性有界**的,是指存在着$[a,b]$的某个零测度子集 E_0,使得 $x(\cdot)$在集合$[a,b]\setminus E_0$ 上有界. $[a,b]$上所有本性有界可测函数构成的集合用 $L^\infty[a,b]$表示,几乎处处相等的两个本性有界的可测函数看作同一元素. 对 $L^\infty[a,b]$中任意两个元素 x,y,令

$$
\begin{aligned}
\rho(x,y) &= \inf_{\substack{mE=0 \\ E \subset [a,b]}} \left\{ \sup_{t \in [a,b] \setminus E} |x(t) - y(t)| \right\} \\
&= \operatorname*{vraisup}_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

需要验证 ρ 满足距离公理的三个条件. 我们只验证三角不等式.

设 $x,y,z \in L^{\infty}[a,b]$. 任给 $\varepsilon>0$,存在 $E_1,E_2 \subset [a,b]$, $mE_1 = mE_2 = 0$,使

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_1} |x(t)-z(t)| \leqslant \rho(x,z)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_2} |z(t)-y(t)| \leqslant \rho(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到 $m(E_1 \cup E_2)=0$,于是

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &\leqslant \sup_{t\in[a,b]\setminus(E_1\cup E_2)} |x(t)-y(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in[a,b]\setminus(E_1\cup E_2)} |x(t-z(t)| + \\ &\quad \sup_{t\in[a,b]\setminus(E_1\cup E_2)} |z(t)-y(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in[a,b]\setminus E_1} |x(t)-z(t)| + \\ &\quad \sup_{t\in[a,b]\setminus E_2} |z(t)-y(t)| \\ &\leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y)+\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$,有

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y).$$

即三角不等式成立. 因此按照(5)中定义的距离 ρ, $L^{\infty}[a,b]$ 确为一个距离空间.

例 5　空间 l^p $(1 \leqslant p < \infty)$

令 l^p 是由满足下列不等式的实(或复)数序列 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 构成的集合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty.$$

我们的目的是证明 l^p 按照下面(9)式定义的距离为距离空间. 为清楚起见,先设 $1<p<\infty$. 在第五章 §1 中的不等式 $u^{\alpha}v^{\beta} \leqslant \alpha u+\beta v$ $(u \geqslant 0, v \geqslant 0)$ 中,令 $\alpha=\dfrac{1}{p}$, $\beta=\dfrac{1}{q}$,这里 p,q 互为相伴数,即 $1/p+1/q=1$. 于是有