普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等数学

上册

李　忠 周建莹 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

高 等 数 学

（上 册）

李 忠 周建莹 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·上册/李忠,周建莹编著.—北京:北京大学出版社,2004.6
(国家"十五"规划教材)
ISBN 7-301-07438-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①李… ②周… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 043026 号

书　　　名:**高等数学(上册)**
著作责任者:李　忠　周建莹　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-07438-7/O·0595
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村 北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
排　版　者:北京高新特打字服务社　51736661
印　刷　者:三河市新世纪印刷厂
经　销　者:新华书店
650mm×980mm　16 开本　23.75 印张　396 千字
2004 年 6 月第 1 版　2004 年 6 月第 1 次印刷
印　　　数:0001—4000 册
定　　　价:26.00 元

内容简介

本套教材是综合性大学、高等师范院校及其他理工科大学中的非数学类各专业(尤其是物理类专业)学生的高等数学教材.全书共分上、下两册.上册内容是一元函数的微积分,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学;下册内容是多元函数积分学,级数与常微分方程.

本套教材的前身《高等数学简明教程》(全三册,北京大学出版社,1998)曾荣获教育部2002年全国普通高等学校优秀教材一等奖,本书是在原书的基础上修订而成,修订内容请参看本书"序言".

本书为上册,共分六章.内容包括:绪论,函数与极限,微积分的基本概念,积分的计算,微分中值定理与泰勒公式,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学等.书末附有习题答案与提示,供读者参考.

本书是作者在北京大学进行教学试点的成果.它对传统的高等数学课的内容体系作了适当的整合,力求突出数学概念与理论的实质,避免过分形式化,使读者对所讲内容感到朴实自然.本书强调数学理论与其他学科的联系.书中附有历史的注记,简要叙述相关概念和理论的发展演变过程,以及重要数学家的贡献.本书语言流畅,叙述简捷,深入浅出,有较多的例题,便于读者自学.每小节有适量习题,每章配置综合练习题,习题给出答案或提示供读者参考.

序　言

这套教材的前身是《高等数学简明教程》(全三册),自 1998 年出版以来,这是第一次全面的修订.这次修订中我们做了如下的更动:

首先,我们将原来的概率论和数理统计两章删去,并将三册改为上、下两册.这是因为使用这套教材的许多院校,将概率论和数理统计单独设课.为了避免内容重复,删去概率统计的部分是必要的.

应该特别指出,在内容的广度上或深度上,修订后的教材仍然涵盖了甚至在某些地方超出了物理类专业高等数学课的部颁标准.因此,这套书依然定位为物理类专业高等数学课三学期使用的教材.当然,在内容适当删减后,它也可以作为两学期的高等数学课教材使用.总之,它提供了一个较宽的平台,授课教师可根据实际情况对其内容有所选择.凡是我们认为可以不讲或少讲的内容在书中我们都用 * 号标出,或在脚注中作了说明.

其次,在此次修订中,我们在许多章节中增添了历史的注记,以简短的文字记述重要的数学概念或理论的发展、变化,以及历史上相关著名数学家的贡献.这样做的主要目的是让读者认识到数学不是从天上掉下来的,而是人类在探索大自然过程中逐步发展起来,数学的概念与理论不是一成不变的,也是由不完善逐渐变得较完善起来.同时,也希望通过这样的记述使读者看到数学与自然科学之间的联系.我们在撰写这些注记时是严肃认真的,以确保材料有可靠来源,观点不致偏颇.

最后,我们指出,在此次修订中对原书的章节做了调整,并对某些段落做了较大的更改,甚至重写,增加了一些解释性的文字和例题,以更便于读者自学.这些更改主要是基于使用该书的教学实践经验,其中也包括许多朋友的建议.

这次修订中,我们保持了这套教材原有的编写思想与基本内容框架,而这些已经在其前言中做了详细说明,此处不赘.

这项修订工作已列入国家教材建设十五规划,并得到北京大学出版社的大力支持,谨在此向有关单位致谢.多年来,许多同事与朋友对这套

教材提出了宝贵的建议，北京大学出版社刘勇同志努力促成了这次修订工作，并对修订后的初稿做了详细认真的校审.我们在此谨向他们表示衷心的感谢.

李 忠 周建莹

2004年2月7日于蓝旗营

前　言

1996 年秋至 1998 年春，我们在为北京大学物理系、无线电电子学系及技术物理系讲授高等数学课期间，在课程内容体系上做了一些改革的尝试．现在出版的这套《高等数学简明教程》就是在当时试用讲义的基础上修改补充而成的．

全书共分三册，供综合性大学及师范院校物理类各专业作为三学期教材使用．第一册是关于一元函数微积分及空间解析几何；第二册是关于多元函数微积分与常微分方程；第三册是关于级数，参变量积分，傅氏级数与傅氏积分，概率论与数理统计．

现在我们就这套教材的内容处理做以下几点说明：

（一）与传统的教材相比，这套教材在讲授内容的次序上作了一定的调整

目前国内多数高等数学教材是先讲微分学，后讲积分学．这样做的好处是数学理论体系清晰．其缺点则是积分概念出来过晚，使初学者对微分概念与积分概念有割裂之感．另外，由于积分概念出现过晚而使数学课在与其他课程，如力学与普通物理等课的配合上出现了严重脱节现象．

在本教材中，我们把微积分的基本概念及计算放在一起先讲，在讲完微积分基本定理及积分的计算之后，才开始讲微分中值定理与泰勒公式．这样调整的主要目的是为了让初学者尽可能早地了解与把握微积分的基本思想，掌握它的最核心、最有用、最生动的部分．在试验过程中，学生们在第一学期期中考试前已经学完了微商、微分、不定积分、定积分的概念及全部运算，对微积分的概念初步形成了一个比较完整的认识．同时，这样的调整也缓解了与其他课程在配合上的矛盾．因此，我们认为这种调整或许是解决物理类专业在大学一年级数学课与其他基础课脱节问题的途径之一．

微积分就其原始的核心思想与形式是朴素的、自然的，容易被人理解与接受的．随着历史的发展，逻辑基础的加固和各种研究的深化，它已经变成了一个“庞然大物”，让初学者望而生畏．现在，如何选取其中要紧的东西以及用怎样的方式将它们在较短的时间内展示给学生，不能说不是一个问题，值得我们思考与探索．

(二) 关于极限概念的处理

关于极限概念和有关实数理论的处理历来是微积分教学改革中争论的焦点之一.我们认为,极限的严格定义,即“ε-δ”与“ε-N”的说法是应该讲的,并且要认真讲.因为它在处理一些复杂极限过程,特别是涉及函数项级数一致收敛性等问题时,是必不可少的.物理类专业的学生可能还要学许多更高深的数学,不掌握极限的严格定义也是不行的.

但是,我们也不赞成在一开头就花很大力气去反复训练“ε-δ”,而形成一种“大头极限论”.我们希望随着课程的深入,让学生在反复使用中逐渐熟悉它,掌握它.在现在的教材中没有出现大量的用“ε-δ”求证具体函数极限的练习,更没有做十分困难的极限习题,因为做过多的这类练习意义不大.极限的概念在这套教材中既是严谨的,又保留其朴素、直观、自然的品格.

与极限概念密切联系在一起的是关于实数域完备性的几个定理.我们采用了分散处理的办法.在全书的一开头就把单调有界序列有极限作为实数完备性的一种数学描述加以介绍.有了它,这在有关极限的许多讨论中已足够了.闭区间上连续函数的性质在第一章中只叙述而不加证明,其证明只作为附录,供有兴趣的读者自行阅读.在讨论级数之前再次涉及实数域的完备性,这时才介绍柯西收敛原理,以满足级数讨论的需要.这种分散处理的办法,不仅分散了难点,而且使初学者更容易看清这些基础性定理在所涉及问题中的意义.

(三) 本书坚持了传统教材中的基本内容与基本训练不变,但拓宽了内容范围

在内容的取舍上,我们采取了相当慎重的态度.近来对高等数学课的内容现代化改革呼声很高.但是,作为一门数学基础课似乎不宜简单地以现代化作为其改革的主要目标.数学学科中概念的连贯性使得它不可能像电子器件一样去“更新换代”和“以新弃旧”.而且现在看来掌握好微积分的基本概念、基本理论与基本训练,对于一个理工科大学生而言依然是必不可少的.当然,计算机的广泛使用以及数学软件功能的日益提高,正促使我们思考在高等数学课中简化或减少某些计算的内容.然而就目前的情况,我们尚难于下定决心取消某些内容.为了慎重从事,这次改革试验中,我们保留了传统教材中的基本内容与基本训练.

我们认为目前对高等数学课而言重要的不是去更新内容,而是避免教学中烦琐主义的倾向,不要在一些枝节问题上大做文章.那样做既歪曲了数学,又使学生苦不堪言.

试点过程中我们节省了近半个学期的学时，于是我们扩充了教学内容.在现在我们编写的这套教材中，我们增加了微分几何中的曲线论与曲面论的基本内容，以及数值计算中的某些内容.这些都分散于有关章节.作为大块内容增加的是第三册中的概率论与数理统计这两章.

在本书编写中，我们尽可能注意了文字的简洁、例子的典型性以及对基本概念背景及意义的解释，以便于读者自学.除每节的练习题之外，每一章之后又附加了总练习题，以使读者有机会做一些综合练习.

国际著名数学家柯朗曾经尖锐地批评过数学教育.他指出：**"二千年来，掌握一定的数学知识已被视为每个受教育者必须具备的智力.数学在教育中的这种特殊地位，今天正在出现严重危机.不幸的是，数学教育工作者对此应负其责.数学的教学逐渐流于无意义的单纯演算习题的训练.固然这可以发展形式演算能力，但却无助于对数学的真正理解，无助于提高独立思考能力.……"**①

柯朗的话是对的.数学教育需要改革，我们任重道远.

最后，我们应该提到，这次改革试点工作先后在北京大学及北京市教委正式立项并得到了他们的支持，借此机会我们向北京市教委及北京大学教务处与教材科的有关同志表示衷心感谢.北京大学数学科学学院院长姜伯驹教授一直十分关心这项工作，并给予多方面的鼓励与帮助.此外，彭立中教授、黄少云教授与刘西垣教授也很关心这项工作，并对试用讲义提出了许多宝贵意见.北京大学出版社邱淑清编审及刘勇同志大力支持教材的出版.刘勇同志作为本书的责任编辑为本书的出版做了大量工作，付出了辛勤的劳动.我们在这里一并对这些同志表示感谢！

毫无疑问，这套教材会有许多不成熟之处，甚至有不少错误.我们诚恳地希望数学界同仁加以批评指正，以便改正.

李　忠　周建莹

1998年2月15日于

北京大学中关园

（2004年元月略作删改）

---

① 见《数学是什么》第一版序.柯朗与罗宾斯著，汪浩、朱煜民译，湖南教育出版社，1985.

目　　录

绪　　论

在课程内容开始之前，我们先来谈谈什么是数学以及数学跟科学技术的关系. 希望读者从中增进对数学的了解，看到学习数学的意义. 同时，我们还就怎样学好高等数学将向初学者提供若干建议.

1. 数学的基本特征

一百多年之前，恩格斯就说过，**数学是研究现实世界中数量关系及空间形式的科学**. 尽管在这一百多年中数学的发展使它的研究内容早已超出了"数"与"形"的范畴，但是就其基本精神而言，恩格斯对数学的概括依然是正确的.

数学的基本特征是它的研究对象的**高度抽象性**.

数本身就是抽象的. 数字"1"是人们从 1 个苹果、1 只羊、1 个人等现象中舍去了苹果、羊、人……的具体特征，单从数量上抽象出来的. 除了人们容易理解的自然数外，数学中还有负数、无理数、超越数、复数等等. 它们的抽象程度则较自然数要更高. 要想对一个没有中学数学知识的人解释清楚何为无理数未必容易，更不用说复数或 $i=\sqrt{-1}$ 了.

初等几何中的点、直线、三角形及圆等也是抽象的. 它们是根据人们生活经验抽象而来，因此是容易被理解的. 我们生活的现实空间是 3 维空间，这一事实是抽象的结果；但毕竟容易接受. 至于 4 维空间就变得难于理解. 而学过物理的人则常常理解 4 维空间是 3 维空间添加时间的结果. 然而，数学中还要研究一般 n 维空间乃至无穷维空间，甚至更为抽象的流形或拓扑空间. 这些特别抽象的概念不再是从人的直接生活经验与生产活动中得来，而是从人类的科学研究（包括数学研究）、科学试验以及复杂的技术过程中抽象而来，它们既超出了普通人的直接经验，也超出了自然现象的范畴. 数学研究对象的这种高度抽象性使得数学科学区别于自然科学——后者的研究对象是自然现象.

数学研究对象的抽象性决定了数学的另一特征：它在论证方法上的**演绎性**.

人们说："数学是一门演绎科学."这是从它的论证方法而言的. 具有中

等数学训练的人都知道数学的推理过程：

$$\textbf{假设} \xRightarrow[\text{logic}]{} \textbf{结论}.$$

这里的 logic 是指形式逻辑. 这就是说，在数学中要论证一个结论的成立，是根据假设(包括公理)按照形式逻辑推演出来的. 除此之外，在一定意义上说，它不允许任何其他东西作为导出结论的依据.

在实验科学中实验结果是结论的重要依据. 但在数学中则不能以任何实验结果作为结论的依据. 在生物学中解剖几只麻雀之后即可断言"麻雀有胃". 然而，在数学中则不能由测量若干个三角形内角而断言"三角形内角之和为 180°"——数学中的这一结论是由平行公理推演得来的.

我们要作一点说明，说数学是一门演绎科学是指其论证方法而言，而不是指其整个研究方法. 在数学研究中，尤其在探索阶段，实验、归纳、类比、猜测或假想同样是一些重要方法. 然而，最终论证一个结论的成立则需要演绎. 在数学中没有经过证明的命题最多只能是一种猜想.

数学在论证方法上的演绎性使数学理论构成了一个严谨的形式体系，其中有公理、定义、定理，一环扣一环，演绎出许多公式与结论. 这里的公理是指那些不须证明的基本假定，而定义则用来规范和界定各种术语的内涵. 定理是关于一个数学命题的叙述，通常由两部分组成：条件与结论. 在数学书籍或文章中，通常还有所谓"引理"或"命题"之类. 它们与定理在性质上相同，只是文章或书籍的作者认为讨论过程中它们的重要性不及定理而已.

人类历史上第一个完整的演绎体系是欧几里得(Euclid 活动于约公元前 300 年)的《几何原本》，它对人类文明产生了巨大影响. 欧几里得在书中不是简单地罗列了前人的几何知识，而是由五条公理(在《几何原本》中称之为公设)出发，用形式逻辑将其全部结论逐一推出. 爱因斯坦高度评价了这个"逻辑体系的奇迹". 他说："推理的这种令人惊叹的胜利，使人类的理智为今后的成就获得了所需要的信心."

数学的第三个特征就是**应用的极端广泛性**. 这同样是由它的研究对象的抽象性所决定的；简单地说，正是因为数学抽象，所以其结论的应用范围才广. 比如，数字是由苹果、羊、人等许多事物抽象而来. 因此，2+3=5 则不仅适用于苹果，而且还适用于羊、人，等等，也适用于一切可能谈论数量的事物.

在数学中，同一方程式完全可能代表着互不相干的事物的某种相同规