

# 分数、百分数及其教学

吴家麒 吴宗良 高海平

江苏人民出版社

# 分数、百分数及其教学

吴家麒 吴宗良 高海平

江苏人民出版社

## 分数、百分数及其教学

吴家麒 吴宗良 高海平

---

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行 扬州印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张4.25 字数87,000

1981年6月第1版 1981年6月第1次印刷

印数1—26,000册

---

书号：7100·095 定价：0.34元

责任编辑 何震邦

## 内 容 提 要

本书主要按《全日制十年制学校小学数学教学大纲》（试行草案）的规定和统编课本小学数学的要求编写，讲述有关分数、百分数的概念、性质和计算规律，研究分数、百分数教学的方法。另有些内容比《大纲》所规定的稍有拓宽、加深，旨在使小学数学教师丰富知识，更好地进行分数、百分数教学。

本书可供小学数学教师教学和进修参考。

# 目 录

<b>一、分数</b> .....	1
§ 1 分数的认识.....	1
§ 2 分数的性质.....	25
§ 3 分数和小数的互化.....	39
§ 4 分数加法和减法.....	44
§ 5 分数乘法和除法.....	57
§ 6 分数四则混合运算和繁分数.....	73
§ 7 分数应用题.....	80
<b>二、百分数</b> .....	110
§ 8 百分数的意义.....	110
§ 9 百分数与分数、小数的互化.....	112
§ 10 百分数应用题.....	114
<b>附录 教案举例</b> .....	123

# 一、分 数

人们对于数的认识，是随着人类实践活动的发展而发展的。“数一数”和“量一量”的这种实践活动，随着生产的发展必然从低级走向高级，从简单走向复杂。在分配东西时，总要发生不够或有剩余的情况，如果需要再分，那么这种再分的实践活动就为分数的产生提供了物质基础。在度量过程中，往往不能得到整数的结果，如果更精确地度量下去，就必然产生自然数不够用的矛盾，于是，便产生了分数。

## § 1 分数的认识

### 1. 分数的意义

人们在计数物体的个数时，总是用一个整数来表示其结果。但是，现实世界的事物，如果只用整数来计数，在进行度量或等分物体时，往往就不能表示其结果。例如，以米为单位来测量一根钢管的长度，如果量得整5米后，还有剩余，而剩余的部分比一米短，这时度量的结果不可能用一个整数来表示，那么我们可以将一米分为10等份，即以“分米”为单位来量这剩余的部分，如果刚好得到一分米的3倍，那末，这根钢管的长度便是5米3分米。这个事实说明，用米尺量这根钢管的剩余部分，不是整一米，而恰好是3个十分之一米，我们说这根钢管量得5米后的剩余部分的长度是十分之三米。“十分之三”写成 $\frac{3}{10}$ 。

一般地说，对于任意量 $A$ ，如果用计量单位 $B$ 去度量得不到整数倍时，就不能用整数来表示度量的结果。这时，我们把量 $B$ 分成 $n$ 等份，取其中的一份作单位去度量量 $A$ ，假如正好量 $m$ 次量尽，为了表示这个度量结果，需要引进一种形如 $\frac{m}{n}$ 的新数。这就是说，如果我们把量 $B$ 当作整体(或单位)“1”，量 $A$ 的量数就是 $\frac{m}{n}$ 。

把整体“1”平均分成若干份，表示这样的一份或者几份的数叫做**分数**。如果把整体“1”分成 $n$ 等份，表示这样一份的数记做 $\frac{1}{n}$ ，读作 $n$ 分之一， $\frac{1}{n}$ 叫做分数单位，表示这样 $m$ 份的数记作 $\frac{m}{n}$ ，读作 $n$ 分之 $m$ 。其中 $m$ 叫做分子， $n$ 叫做分母，中间的横线叫做**分数线**。分数所表示的大小叫做**分数值**。

除了度量的结果可以得到分数外，等分几个物体也可以得到分数。如

农场把2亩棉花试验田，平均分成5块，每块多少亩？

把2亩地平均分成5份，求一份是多少亩，算式应该是 $2 \div 5$ ，这在整数里得不到结果。因此，可以先把每一亩地都分成5等份，其中一份是一亩的 $\frac{1}{5}$ ，即 $\frac{1}{5}$ 亩。然后在2亩地中每一亩取出 $\frac{1}{5}$ ，于是就取出2个 $\frac{1}{5}$ 亩，即 $\frac{2}{5}$ 亩(如下图)。由此得到

$$2 \div 5 = \frac{2}{5} \text{ (亩)}。$$

所以，每块试验田是 $\frac{2}{5}$ 亩。

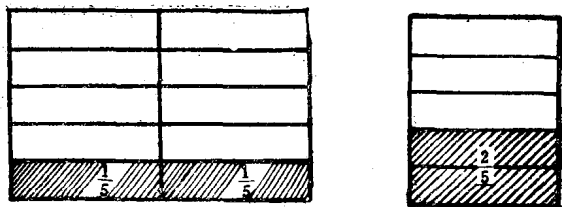


图 1

又如，学校里的三好学生占全校学生人数的四分之一，这就是把全校学生人数看作整体“1”，把它平均分成4份，表示这样的一份的数就是四分之一，写作 $\frac{1}{4}$ 。

我们在认识分数的时候，可以把一个整体看作“1”，这个“1”不只是表示一件东西，而且还可以表示一个集体，一项工程，一批货物，一国人口等。因此，“1”可以表示一个为数很多的整体。对于某一个整体来说，一个分数所表示的数量就不一定是很少的，可以是很多的。上面讲到的一个学校里的三好学生占全校学生人数的 $\frac{1}{4}$ 。如果这个学校的学生有1000人，那么 $\frac{1}{4}$ 实际上所表示的是250人。

一般地说，如果要把整数 $m$ 分成 $n$ 等份，可以先把每一个单位都分成 $n$ 等份，其中每一等份是一个单位的 $\frac{1}{n}$ 。然后在 $m$ 个单位中各取出一个单位，也就是取出 $m$ 个 $\frac{1}{n}$ ，即 $\frac{m}{n}$ 。

这样，分数 $\frac{m}{n}$ 不仅可以看成是一个单位的 $\frac{1}{n}$ 的 $m$ 倍，也可以看作是 $m$ 个单位的 $\frac{1}{n}$ 。



从上面的叙述可知，由于测量的实践，仅借助于整数不能解决问题，这一矛盾的产生，推动了数的概念的发展，产生了分数。分数可表现为测量的结果，但是它也可以是除的结果。

分数意义的教学是分数教学中的一个重点，又是一个难点。学好这部分知识是学习分数四则计算和解分数应用题的基础。

全日制十年制小学数学教材中分数教学分为两个阶段。在小学三年级第二学期（第六册）开始出现分数，让学生对分数有一个初步的认识；到四年级第二学期（第八册）进行分数意义和性质的教学，使学生进一步建立分数的概念。

在三年级进行分数初步认识的教学时，可通过具体实物操作、演示或组织活动等引出“分数”。如教师和学生共同讨论如何把1张纸分给4个同学，每人分得的纸要同样大小，每人分得的纸是这张纸的多少？再如，班上进行拔河比赛，把全班学生分成人数相等的甲乙两方，然后问学生甲乙两方各占全班人数的多少？……在大量实物的演示中，使学生知道日常生活中需要把一个整体平均分成几部分，其中的一部分或几部分都需要用一个“数”来表示它，而这个数是整数所不能表示的，从而告诉学生必须引入一种新的数——分数。在教学中教师多次演示，学生多次实践，动手又动脑，就可以使学生对分数有初步的观念。

开始教学时，可以利用圆形教具，一般来说，用圆形的教具比长方形、正方形或线段图更易看出整体与部分的区别，有利于学生对分数意义的理解。在学生对分数有了一定的初步认识后，再用其他图形或线段图。在利用圆形教具时，可

从认识简单的分数 $\frac{1}{2}$ 开始。例如把圆形纸片分给学生,要求把1个圆平均分成2份,引导学生把圆对折进行比较(大小一样),从而理解把整体“1”平均分成2份,每份是整体的 $\frac{1}{2}$ 。再通过观察 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ ……等图形,逐步建立

“把一个整体平均分成几份,表示这样的一份或几份的数叫做分数”的概念。知道分母表示把整体“1”平均分成几份的数,分子表示所取的份数。

学生往往在学习分数四则计算或解分数应用题时感到困难,很重要的原因是对整体“1”的概念理解不够,因此正确理解整体“1”对学好分数是十分重要的。在教学中可多举实例,并可把不同单位的同类事物进行比较。如把一个小组、一个班级、一个学校、全国的人数作为整体,分别平均分成几份,求出其中的一份作比较。使学生明确任何事物都能被看作整体“1”,而且这个整体“1”不一定数量很少,也可以是数量很多。

掌握“分数单位”概念,既是认识分数的重要条件,又是学习分数运算的重要基础。教学中在引导学生观察图形时

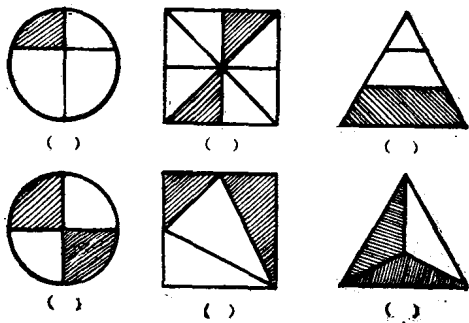


图 2

可把“平均分”与“不平均分”的图作比较。如进行看图填数，不能填的打“×”。

通过仔细观察，明确哪些是能用分数表示的，哪些暂时还不能用分数表示。并且懂得分数是由分数单位组成的， $\frac{2}{4}$ 就是由2个 $\frac{1}{4}$ 组成的，2个 $\frac{1}{8}$ 组成 $\frac{2}{8}$ 。

在教学生读写分数时，要让学生在理解分数意义的基础上来读写，并通过读写进一步加深对分数意义的理解。可告诉学生先写分数线，再写分母，后写分子。如教写 $\frac{4}{5}$ ，先写“—”讲“把整体1平均分”；再写分母“5”时，讲“分成5份”；写分子“4”时，讲“表示这样的4份”，读作五分之四。

四年级第二学期，学生在初步认识分数的基础上进一步学习分数意义。

在教学时可先让学生测量物体，如测量黑板、课桌、书本等，引导学生在自己的实践中理解分数的意义。并进一步懂得引进分数的必然性，调动学生学习分数的积极性。

在学生理解把1个单位平均分成若干份能得到分数后，再通过实物演示，使学生理解把几个单位平均分成若干份也能得到分数。如要把同样大小的3张纸平均分成4份，每份是多少？可让学生分别把每张纸对折成4等份，3张纸就共得12小张，每小张是原来的 $\frac{1}{4}$ ，然后把等分后所得的12小张纸平均分成4份，每份得3小张，即3个 $\frac{1}{4}$ ，拼在一起就是原

来一张纸的 $\frac{3}{4}$ 。（如图3所示）

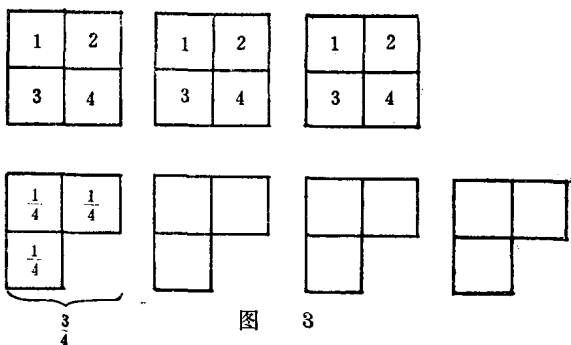


图 3

除了以上这些测量和均分等活动外，还应与整数作比较，使学生真正理解分数的意义。教师要告诉学生，在认识整数时，要把 1 看作一个单独的物体，4 就看作四个这样单独的物体。但在分数中就不同，不仅把一个单独的物体看作 1，还可以把由几个单独的物体组成的一个整体看作“1”，也就是任何一个集合都可以看作整体“1”。为了帮助学生认识这一点，教师可先用实物演示，

再过渡到图形，最后抽象成概念。如先把 1 个苹果等分成 4 份，再把一堆苹果 4 个、8 个、……等分成 4 份，然后用集合图表示，说明不仅一个苹果可以看成

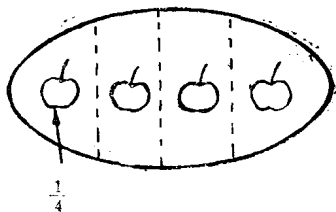


图 4

“1”，一堆苹果作为整体也可看作“1”。

学生在学习整数时，对自然数的单位有深刻印象。例如，很习惯地认识到 3 是由 3 个 1 组成的；256 是由 256 个 1 组成的，等等。分数单位和自然数的单位不同，分数单位不是固

定的某一个数。教学时可通过描图并指出各图的分数单位和有几个这样的分数单位来说明。如

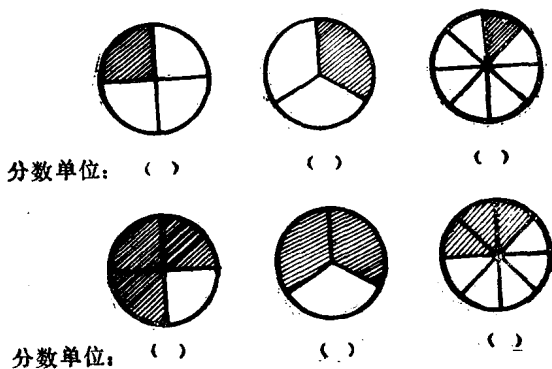


图 5

通过以上的观察和练习，使学生知道分数单位不是固定不变的，而是随整体“1”平均分成几份的份数变化而变化的。分的份数愈多，每一份就愈小，分数单位也就愈小。但分数单位在分数中所起的作用与自然数单位在自然数中所起的作用相同。

## 2. 分数与除式的关系

分数与除式是两个不同的概念，分数是一个数，而除式是一种运算式。但是，二者有着密切的内在联系。例如，分数  $\frac{1}{5}$  是表示把整体“1”平均分成 5 份，取其中一份，或表示一个量是另一个量的五分之一；而除式  $1 \div 5$  是表示把 1 平均分成 5 份，求其中一份是多少，或表示比较两个量的倍数关系，所以  $1 \div 5 = \frac{1}{5}$ 。实际上把整体“1”平均分成 5 份求其中的一份，也可用除法计算。同时，研究除法时，在很多情况下，

数  $a$  除以数  $b$  不一定都能得出整数的商, 就可用分数来表示。

人们在实践中, 经常要把两个量进行比较。例如, 种子试验小组, 用 5000 粒玉米种子做发芽试验, 在试验期内, 有 4900 粒种子发了芽, 求发芽率。

$$\text{解 } \frac{4900}{5000} = \frac{98}{100} = 98\%.$$

这里的发芽率可看作把玉米总粒数(整体“1”)平均分成 5000 份, 而表示这样的 4900 份的数。因此, 一个量与另一个量相比, 从本质上看也是在等分“1”。所以说分数与除式之间存在着密切的内在联系。分数可以看作两个自然数相除当不可能整除时所得的商。

分数与除式的关系列表如下:

分 数	分 子	分数线(—)	分 母	分数值
除 式	被除数	除号(+)	除 数	商

由分数与除式的关系可知, 在  $\frac{m}{n}$  中  $n$  不能等于 0。

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } \frac{m}{n} = \frac{m}{1} = m;$$

$$\text{当 } m = 0 \text{ 时, } \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0;$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0 \times n}{1 \times n} = \frac{0}{n}, \quad (\text{叫做零分数})$$

$$\text{当 } m = n \text{ 时, } \frac{m}{n} = 1.$$

任何整数  $m$  都可以用  $\frac{m}{1}$  来表示。

### 3. 分数的相等与不相等

#### (1) 分数的相等

用同一个度量单位来度量同一个量，所得的量数可能是许多形式不同的分数。例如，用米作单位来度量某一个长度，把1米分成10个等份，如果这一个长度含有9个这样的等份，它的量数就是 $\frac{9}{10}$ 米。如果把每一个这样的等份再分成10个等份，那么1米就被分成100个等份，而这一个长度就含有90个这样的新的等份，这一个长度的量数也可以是 $\frac{90}{100}$ 米。 $\frac{9}{10}$ 米和 $\frac{90}{100}$ 米表示同一个长度，所以 $\frac{9}{10}$ 和 $\frac{90}{100}$ 是相等的。

由此可见，对于同一个长度单位，如果两个分数所表示的量相等，那么这两个分数就相等。

**如果第一个分数的分子乘以第二个分数的分母的积等于第二个分数的分子乘以第一个分数的分母的积时，那么这两个分数就相等。**

例如，第一个分数是 $\frac{1}{3}$ ，第二个分数是 $\frac{2}{6}$ ，而 $1 \times 6 = 2 \times 3$ ，则 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ 。

用字母表示，如果 $ab_1 = a_1b$ ，那么分数 $\frac{a}{b}$ 等于分数 $\frac{a_1}{b_1}$ 。

## (2) 分数的不相等

对于同一个度量单位，如果两个分数所表示的量不相等，那么这两个分数不相等。所表示的量大分数大，所表示的量小的分数小。

例如， $\frac{1}{10}$ 米是1分米， $\frac{1}{2}$ 米是5分米。1分米小于5分米，即 $\frac{1}{10}$ 米 $<$  $\frac{1}{2}$ 米，所以 $\frac{1}{10} < \frac{1}{2}$ 。

又如， $\frac{3}{5}$ 公斤是600克， $\frac{2}{5}$ 公斤是400克。600克大于400克，即 $\frac{3}{5}$ 公斤 $>$  $\frac{2}{5}$ 公斤，所以 $\frac{3}{5}>\frac{2}{5}$ 。

显然，对于同一个度量单位，两个分数的分子相同，表示所取的份数相同，分母越大，分的份数越多，分数单位越小。所以分子相同时分母大的分数反而比较小；两个分数的分母相同，表示分的份数相同，分数单位相同，分子越大，表示所取的份数越多，所以分母相同时分子大的分数大。

由此可知，比较分数的大小：**如果两个分数的分母相同，那么分子大的分数比较大。**

**如果两个分数的分子相同，那么分母小的分数比较大。**

比较分子和分母都不相同的几个分数的大小，可采用分数的变形，化成分母相同或分子相同的分数来比较。

**如果第一个分数的分子 $a$ 与第二个分数的分母 $b_1$ 的积大于第二个分数的分子 $a_1$ 与第一个分数的分母 $b$ 的积时（即 $ab_1 > a_1b$ ），那么分数 $\frac{a}{b}$ 大于分数 $\frac{a_1}{b_1}$ 。**

**如果第一个分数的分子 $a$ 与第二个分数的分母 $b_1$ 的积小于第二个分数的分子 $a_1$ 与第一个分数的分母 $b$ 的积时（即 $ab_1 < a_1b$ ），那么分数 $\frac{a}{b}$ 小于分数 $\frac{a_1}{b_1}$ 。**

例如，比较两个分数 $\frac{6}{11}$ 和 $\frac{7}{12}$ 。

因为  $6 \times 12 = 72$ ，  $7 \times 11 = 77$ ，

而且  $6 \times 12 < 7 \times 11$ ，

所以  $\frac{6}{11} < \frac{7}{12}$ 。



由于分数的表现形式不象整数与小数那样按一定的数位排列，也不象整数、小数具有十进位制的进位关系，要比较分数的大小，也就不象整数、小数那样容易观察。因此在教学分数大小的比较时，要注意利用几何图形、线段和数轴图来加以说明。

例如，比较同分母分数的大小。

比较  $\frac{1}{3}$  与  $\frac{2}{3}$  的大小：

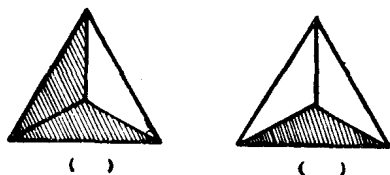


图 6

比较  $\frac{2}{5}$  与  $\frac{3}{5}$  的大小：

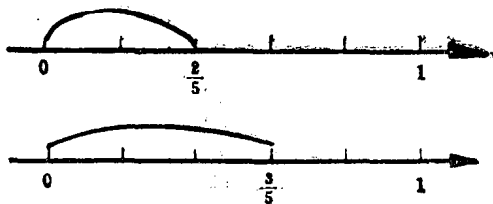


图 7

通过对图形的观察，使学生看出同分母分数，即整体“1”等分的份数是相同的，也就是分数单位相同，那么分数单位的