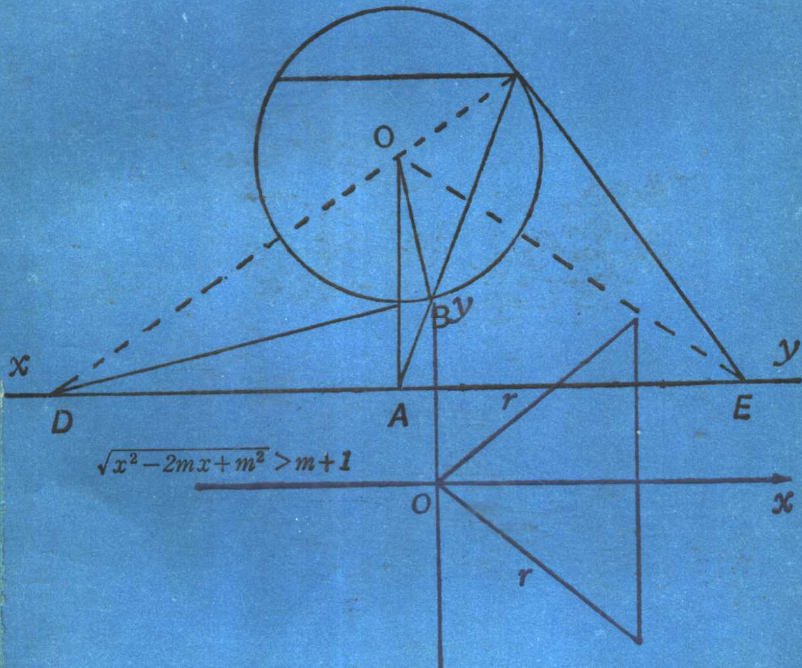
高中

数学题精编

解析几何



浙 江 教 育 出 版 社

高中数学题精编

解析几何

钱孝华　许纪传　陶敏之
江焕棣　丁宗武　谢玉兰

浙江教育出版社

高中数学题精编

解析几何

钱孝华　许纪传　陶敏之

江焕棣　丁宗武　谢玉兰

*

浙江教育出版社出版

（杭州武林路125号）

绍兴新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本787×1092　1/32　印张5.75　字数 128,000

1986年6月第　2　版

1986年6月第2次印刷

印数：85301—171300

统一书号：7346·194

定　　价：0.7[redacted]

(P.[illegible]

说　明

1981年，我们曾编过《高中数学教材补充题》（共四册），主要帮助高中学生正确理解数学概念，提高运算和逻辑思维能力，并为教师在备课时挑选例题和补充习题提供一点方便．出版以后印行四次，较受读者欢迎．这回吸取了广大读者的意见，并依据全日制六年制高中数学教材，对原书经过一番认真的筛选和修改，编为《高中数学题精编》．

在编写过程中，本着加强基础知识，训练基本技能的精神，选编习题力求新颖、灵活、多样，重视知识的连贯和综合运用．与原书比较，在形式上增加了选择题和填充题等类型题目；在每节习题前增加了〔分析与要点〕，在这部分里，我们并不求全，重在把教材内容的本质与精华提炼出来，并渗入编者自己学习的体会，以期对教与学都能稍有裨益．亦望以此与同志们共同探讨．

全书按教材内容的顺序分册分段编写，教师和学生可按教学进度与课本同步使用．其中A组属于基本题，B组略有提高或带有一定的综合，C组难度较大，可供学有余力的同学练习．读者可根据实际情况灵活选用，不必强求一律．

一九八五年一月

目　录

第一章 直 线

一、有向直线，定比分点与直线方程

〔分析与要点〕

1 有向线段的数量是一个实数，实数的绝对值表示有向线段的长度，实数的符号就表示有向线段的方向：与规定方向相同用正号，与规定方向相反则用负号.

2 把有向线段 AB 放在数轴上，则有

$$AB=x_B-x_A.$$

坐标平面上的有向线段是用复数来刻划的，它的方向用辐角表示，它的长度用绝对值表示.

3 平面上有向线段P_1P_2的长即是$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$两点间的距离：

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

4 有向线段的定比分点公式不宜死记硬背，应灵活记忆：

满足条件 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$ $(\lambda\neq-1, P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2))$的点 $P(x,y)$的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{1}{1+\lambda}x_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}x_2,$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{1}{1+\lambda}y_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}y_2.$$

从公式中可以看到

$$\frac{1}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{1+\lambda}{1+\lambda}=1.$$

因此，如果把 PP_2 看作 1，则 P_1P 就应看作 λ. 如果将 λ 变动，那么分点 P 流动，这时分点公式就给出了过点 P_1、P_2 的有向直线上的点的坐标.

5 在平面直角坐标系下，一次函数的图象是直线（从函数观点讲），或者说，二元一次方程的解的几何意义是直线（从方程观点讲）. 反过来也成立（注意直角坐标系这个大前提）.

因为决定直线的因素很多，所以不同的“因素”就产生了不同的表达形式，以用于不同的场合：

（1）点斜式：直线通过点 (x_0, y_0)，具有斜率 k，则

$$y-y_0=k(x-x_0);$$

（2）斜截式：直线通过点 $(0, b)$，其中 b 称为直线在 y 轴上的截距，具有斜率 k，则

$$y=kx+b,$$

注意，点斜式和斜截式不能表示平行 y 轴的直线；

（3）两点式：直线过两点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2)，则

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

注意，两点式不能表示平行于 x 轴、y 轴的直线；

（4）截距式：直线过两点 $(a, 0)$ 与 $(0, b)$，或者说在 x、y 轴上的截距是 a、b，则

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

注意，截距式不能表示平行于 x 轴、y 轴的直线，也不能

表示过原点的直线；

(5) 一般式：$Ax+By+C=0$，($A^2+B^2\neq 0$).

注意，它能表示直角坐标平面上的一切直线，进行一般讨论，但由于一般化，在具体运用时不方便.

6　设二元一次方程

$$Ax+By+C=0$$

所表示的直线为 l，将方程改写为

$$Ax+By=-C,$$

再改用函数记号 $f(x,y)=-C$ ($(x,y)\in l$). 这样，我们就可以说，二元一次函数在 l 上取值为 $-C$. 此时

$\{(x,y)|f(x,y)<-C\}$表示半平面，

$\{(x,y)|f(x,y)>-C\}$表示另一半平面.

(A)

一、选择题（1～16）：每一小题都给出了代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中有且仅有一个结论是正确的，把正确结论的代号写在题后的圆括号内（后同）.

1. 直角坐标平面 xOy 上点 M，$|OM|=\rho$，射线OM与 x 轴的正半轴成 α 角，那么点M的坐标是

(A) $(\rho|\cos\alpha|,\ \rho|\sin\alpha|)$；

(B) $(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$；

(C) $(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)$　（M在第一象限），
$(-\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)$　（M在第二象限），
$(-\rho\cos\alpha,\ -\rho\sin\alpha)$　（M在第三象限），
$(\rho\cos\alpha,\ -\rho\sin\alpha)$　（M在第四象限）；

(D) 以上结论都不对.

答：（ C ）

2．线段 $|P_1P_2|=1$，点 P 在 P_1P_2 的延长线上，$|PP_2|=2$，则点 P 分 P_1P_2 所成的比是

(A) 2；　　(B) $\frac{1}{2}$；

(C) $-\frac{3}{2}$；　　(D) $-\frac{2}{3}$.

答：(　　)

3．连接直角三角形的直角顶点与斜边的两个三等分点，所得两条线段的长分别是 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，则斜边的长是

(A) $\frac{4}{3}$；　(B) $\frac{3}{\sqrt{5}}$；　(C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$；　(D) 5.

答：(　　)

4．$\triangle ABC$ 中，F 点分 AC 为 $1:2$，G 是 BF 中点，E 是直线 AG 与边 BC 的交点，那么 E 点分 BC 的比是

(A) $\frac{1}{4}$；　(B) $\frac{1}{3}$；　(C) $\frac{2}{5}$；　(D) $\frac{3}{8}$.

答：(　　)

5．若已知点 $A(2,3)$，$B(1,5)$，则直线 AB 的倾斜角是

(A) $\operatorname{arc\,tg} 2$；　　(B) $\operatorname{arc\,tg}(-2)$；

(C) $\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg} 2$；　　(D) $\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$.

答：(　　)

6．直线 $ax+by=ab$ $(a>0,\ b<0)$ 的倾斜角是

(A) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{a}{b}\right)$；　　(B) $\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$；

(C) $\pi-\text{arc tg}\dfrac{a}{b}$;　　(D) $\dfrac{\pi}{2}+\text{arc tg}\dfrac{a}{b}$.

答：(　　)

7. 直线 $bx+ay=ab$ ($a>0$, $b>0$) 的倾斜角是

(A) $\text{arc tg}\left(-\dfrac{b}{a}\right)$;　　(B) $\text{arc tg}\dfrac{b}{a}$;

(C) $\dfrac{\pi}{2}+\text{arc tg}\dfrac{b}{a}$;　　(D) $\pi-\text{arc tg}\dfrac{b}{a}$.

答：(　　)

8. 直线 $x-3y=2$ 的截距式方程是

(A) $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-\dfrac{1}{3}}=2$;　　(B) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{\dfrac{2}{3}}=1$;

(C) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-\dfrac{2}{3}}=1$;　　(D) $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-\dfrac{1}{3}}=1$.

答：(　　)

9. 直线 $2x+3y-6=0$ 关于 y 轴对称的直线方程是

(A) $2x-3y-6=0$;　　(B) $2x-3y+6=0$;

(C) $2x+3y+6=0$;　　(D) $2x+3y-6=0$.

答：(　　)

10. 直线 l_1、l_2 关于直线 $y=x$ 对称，若 l_1 的方程是 $y=ax+b$ ($a\neq0$, $b\neq0$)，则 l_2 的方程是

(A) $x=\dfrac{y}{a}+b$;　　(B) $y=-\dfrac{x}{a}-\dfrac{b}{a}$;

(C) $x=ay+b$;　　(D) $y=\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{a}$.

答：(　　)

11. 如果直线 $2x-y+a=0$ 和直线 $x-\frac{1}{2}y+b=0$ 平行，那么

(A) $a\neq 2b$；　　　　(B) $a=2b$；

(C) $a\neq 2$，$b\neq 1$；　　　　(D) $a=2$，$b=1$.

答：(　　)

12. 已知点 $A(1,3)$，$B(5,-2)$，点 P 在 x 轴上且使 $|AP-BP|$ 最大，则点 P 的坐标是

(A) $(3.4,0)$；　　　　(B) $(13,0)$；

(C) $(5,0)$；　　　　(D) $(1,0)$.

答：(　　)

13. 到两坐标轴距离相等的点组成的直线方程是

(A) $x^2-y^2=0$；　　　　(B) $x+y=0$；

(C) $x-y=0$；　　　　(D) $\begin{cases}x+y=0,\\ x-y=0.\end{cases}$

答：(　　)

14. 由方程 $|x-1|+|y-1|=1$ 确定的曲线围成图形的面积是

(A) 1；　　(B) 2；　　(C) π；　　(D) 4.

答：(　　)

15. 若 $A=\{(x,y):|x|+|y|=1\}$，$B=\{(x,y):y=|x|\}$，则 $A\cap B$ 是

(A) $\left\{\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\right\}$；

(B) $\left\{\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\right\}$；

(C) $\left\{\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)\right\}$；

(D) $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\right.$

$\left.\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

答：(　　)

16. 动直线 $(2k-1)x-(k+3)y-(k-11)=0$ $(k\in R)$ 过定点

(A) $(5,2)$；　　　　(B) $(2,3)$；

(C) $(5,9)$；　　　　(D) $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

答：(　　)

二、 填空题（17～26）

17. 点 M、N 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，且 M 分 AB 成 $3:1$，如果 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AMN}$，那么 N 分 AC 所成的比是______.

18. 点 P 分 P_1P_2 的比为 λ，若 P 在线段 P_1P_2 上（不包括端点），则 λ 的范围是______；若 P 在线段 P_1P_2 的延长线上，则 λ 的范围是______；若 P 在线段 P_2P_1 的延长线上，则 λ 的范围是______.

19. 点 $P(a,b)$ 不在坐标轴上，点 P 关于 x 轴的对称点是______；关于 y 轴的对称点是______；关于原点的对称点是______.

20. (1) 角 α 的始边是 x 的正半轴，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$，如果点 P 在 α 的终边上，$|OP|=1$，则点 P 的坐标是______；

(2) 如图 1，正方形 $OABC$ 的边长为 1，且 $\angle AOx=30°$，则点 A 的坐标是______，点 B 的坐标是______，点 C 的坐标是______；

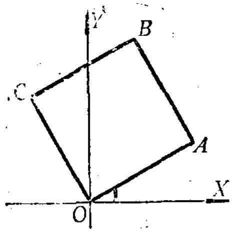


图 1

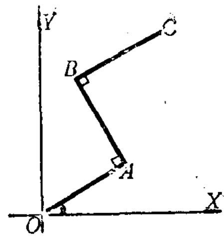


图 2

(3) 如图 2，折线 $OABC$，每段长均为 1，相邻两段互相垂直，如果 $\angle AOx=30°$，则点 C 的坐标是________；

(4) 等边 $\triangle ABC$，其中 $A(1,1)$，$B(3,1)$，则顶点 C 的坐标是________.

21. (1) 点 P 与 x 轴及点 $A(-4,2)$ 的距离都是10，则 P 的坐标是________；

(2) 与 $A(32,10)$、$B(42,0)$、$C(0,0)$ 三点等距离的点是________；

(3) 等腰 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(3,0)$，底边 $|BC|=4$. 若 BC 中点是 $D(5,4)$，则它的腰长为________.

22. (1) 点 $P(x,1)$ 在 $A(2,-4)$、$B(5,11)$ 两点连成的线段上，则 $x=$____；

(2) 连接 $P_1(2,y)$ 和 $P_2(x,6)$ 两点的线段中点是 $P(3,2)$，则 $x=$____，$y=$____.

23. 已知 l_1：$3x-2y+5=0$；　　l_2：$x-y-1=0$；

l_3：$3x-2y=1$；　　l_4：$4x+y-6=0$.

那么点 $A(-1,-7)$ 在________上；点 $B\left(\dfrac{1}{3},0\right)$ 在________上；点 $C(t,6-4t)$ 在________上；点 $D(\sec^2\alpha,\ \mathrm{tg}^2\alpha)$ 在

______上.

24. 直线 $ax+3y-5=0$ 过连接 $A(-1,-2)$、$B(2,4)$ 两点线段的中点，则 $a=$______.

25. (1) 若 $ab<0$，直线 $ax-by=c$ 的倾斜角的范围是______；

(2) 直线 l 过点 $A(2,1)$，倾角 α 满足 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 l 的方程是______；

(3) 直线 l 过点 $B(3,4)$，它的倾角是直线 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$ 倾角的两倍，则 l 的方程是______；

(4) 过点 $C(8,6)$ 引四条直线 l_1、l_2、l_3、l_4，它们的倾角之比为 $1:2:3:4$，若 l_2 的方程是 $3x-4y=0$，则另三条直线的方程是 l_1：______，l_3：______，l_4______.

26. (1) 将直线 $y=kx+b$ 的编号填入适当的括号内(图 3)：

$k>0$、$b>0$ 是 (　　)，

$k>0$、$b<0$ 是 (　　)，

$k<0$、$b>0$ 是 (　　)，

$k<0$、$b<0$ 是 (　　)；

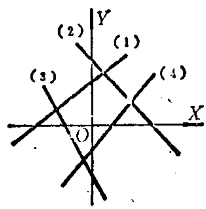


图 3

(2) 已知直线 $ax+by+c=0$，若 $ab>0$，$bc<0$，那么此直线是图 3 中的 (　　)；

(3) 当 $ab>0$ 且 $ac<0$ 时，直线 $ax+by+c=0$ 不通过第______象限.

三、基本技能训练题(27～35)

27. 求两点 $A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$、$B(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ 间的距离.

28. 求$\triangle ABC$的外心坐标，其中三角形的三顶点分别为：

(1) $A(8,-2)$，$B(-2,6)$，$C(-2,-2)$；

(2) $A(2,2)$，$B(-5,1)$，$C(3,-5)$.

29. (1) 已知三角形三边中点的坐标是$D(2,4)$、$E(-3,1)$、$F(1,2)$，求三个顶点的坐标；

(2) 若三角形的两顶点为$A(3,7)$，$B(-2,5)$，求第三个顶点C的坐标，使AC的中点在x轴上，BC的中点在y轴上；

(3) 在平行四边形$ABCD$中，已知两个顶点$A\left(-\frac{9}{2},-7\right)$，$B(2,6)$及对角线交点$M\left(3,\ 1\frac{1}{2}\right)$，求点$C$和点$D$的坐标.

30. (1) 利用线段的定比分点公式，求连接$A(4,1)$和$B(-2,4)$的直线与x轴、y轴交点的坐标；

(2) 经过两点$A(-3,2)$和$B(6,1)$的直线交直线$x+3y-6=0$于P点，求点P分线段AB所成的比.

31. (1) $\triangle ABC$中，$\angle B-\angle C=90°$（图4），求证：$k_{AB}\cdot k_{AC}=1$；

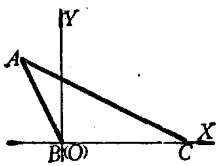


图4

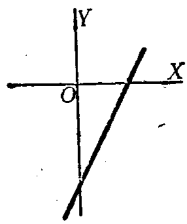


图5

(2) 求证：$A(3,4)$、$B(3,-6)$、$C(-1,2)$、$D(-1,-4)$四点共圆.

32. 直线 $y=f(x)=ax+b$ 的图象如图 5 所示，试分别画出 $y=|f(x)|$、$y=f(|x|)$、$y=f(-x)$、$y=-f(x)$ 的图象.

33. $OABC$为正方形，$OD /\!/ AC$，$|AD|=|AC|$，若$|OA|=a$（图 6），试求点D的坐标.

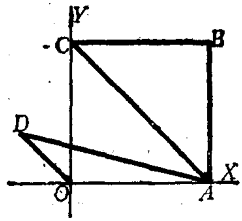


图 6

34. 求直线 l 的方程：

(1) l 过点 $P_1(1,2)$ 且与两轴围成等腰直角三角形；

(2) l 过点 $P_2(1,3)$ 且与两坐标轴分别交于 A,B 两点，P_2 恰是线段 AB 的中点；

(3) l 过点 $P_3(-3,4)$，且在两轴上的截距的和等于12.

35. 直线 l 的方程是 $y=3x-4$，试求直线 l' 的方程，若 l 与 l'

(1) 关于 x 轴对称；　(2) 关于 y 轴对称；

(3) 关于原点对称；　(4) 关于直线 $y=x$ 对称.

（B）

36. (1) 设 A、B、C 是 x 轴上的任意三点，

求证：$AB+BC=AC$；

(2) 设 P_1、P_2、P_3、P_4 是 x 轴上的任意四点，求证：

① $P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4=P_1P_4$，

② $P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4+P_4P_1=0$，

③ $P_1P_2\cdot P_3P_4+P_2P_3\cdot P_1P_4=P_1P_3\cdot P_2P_4$.

37. (1) 对任意实数 x_1、x_2、y_1、y_2，求证：

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

(2) 对任意实数 x_1、x_2、x_3、y_1、y_2、y_3，求证：

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$$
$$\geqslant\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2},$$

$$2(\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2})$$
$$\geqslant\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$$
$$+\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2};$$

(3) 你还能将以上不等式推广吗？

38. (1) 求证：无论 α 取什么实数，点 $P(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ $(R>0)$ 始终在一个定圆上；

(2) 点 $Q(3+5\cos\alpha, 4+5\sin\alpha)$ 始终在一个定圆上吗？为什么？

39. (1) 已知矩形 $ABCD$，相邻两顶点 A、B 的坐标分别是 $(-1, 3)$、$(-2, 4)$，它的对角线交点在 x 轴上，求点 C、D 的坐标；

(2) 已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 A、B、C 的坐标分别是 $(4, 2)$、$(5, 7)$、$(-3, 4)$，求顶点 D 的坐标；

(3) 平行四边形的三个顶点分别为 $(4, 2)$、$(5, 7)$、$(-3, 4)$，求第四个顶点的坐标.

40. (1) $\triangle ABC$ 中，三顶点 A、B、C 的坐标分别为：$(5, -1)$、$(-1, 7)$ 和 $(1, 2)$，试求 $\angle A$ 的平分线 AD 之长；

(2) $\triangle ABC$ 中，三顶点分别为：$A(2, 2\sqrt{6})$、$B(-3, 0)$、$C(3, 0)$，试求 $\triangle ABC$ 的内心坐标.