

(人大第三版)

# 线性代数

## 辅导与习题详解

杨泮池

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$



西安交通大学出版社  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

经济应用数学辅导丛书

(人大第三版)

# 线 性 代 数

## 辅导与习题详解

杨 泮 池

西安交通大学出版社  
· 西安 ·

## 内容提要

本书是与高等学校文科教材“经济应用数学基础(二)”《线性代数》(人大第三版)配套的辅导参考书。

本书内容分为三部分:第一部分是各章开头给出了与教材相应章节一致的内容概要;第二部分是各章全部习题((A)和(B))的解答,解答步骤详细,一题多解,并有注释;第三部分精选了部分对应各章内容的考研试题,并给出了解题的基本方法与技巧。

本书可供使用上述教材的学生和教师参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导与习题详解(人大第三版)/杨洋池编著.  
西安:西安交通大学出版社,2004.4  
(经济应用数学辅导丛书)  
ISBN 7-5605-1775-7

I. 线… II. 杨… III. 线性代数-高等学校-教  
学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 100300 号

|      |                                                            |
|------|------------------------------------------------------------|
| 书 名  | 线性代数辅导与习题详解(人大第三版)                                         |
| 作 者  | 杨洋池                                                        |
| 出版发行 | 西安交通大学出版社                                                  |
| 地 址  | 西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049)                                    |
| 电 话  | (029)82668357 82667874(发行部)<br>(029)82668315 82669096(总编办) |
| 印 刷  | 西安万花印务有限责任公司                                               |
| 字 数  | 225 千字                                                     |
| 开 本  | 850 mm×1 168 mm 1/32                                       |
| 印 张  | 8 875                                                      |
| 版 次  | 2004 年 4 月第 1 版 2004 年 4 月第 1 次印刷                          |
| 印 数  | 0001~5000                                                  |
| 书 号  | ISBN 7-5605-1775-7/O·203                                   |
| 定 价  | 12 00 元                                                    |

---

版权所有 侵权必究

## 前 言

线性代数是高等学校财经类专业必修的基础课程,也是硕士研究生入学考试的必考科目。作为数学科学的一个独立分支,“线性代数”有其自身的特点和规律,掌握这些特点与规律不仅应当正确理解教科书的基本理论和熟悉各种方法,还必须演算相当数量的习题,因为习题本身是对教科书内容的扩充与拓展。演算习题是培养学生理解能力和解题能力的重要步骤。

本书给出人大版“经济应用数学基础(二)”《线性代数》(第三版)全书所有习题的解答,尽可能给出详细的解题步骤,这是为了帮助那些初学有困难的读者。在一些题目前我们给出了解题分析,以启发读者的思维,对某些题目还给出重要的注释,以达举一反三之效果。

在每章的习题后,还精选了近年来考研中线性代数的相关试题,并给出分析与解答,这些内容对有志于考研的同学无疑会有所帮助。

本书主要是满足经济类大学生之用,也适用于自学者及广大的科技工作者。

我们希望本书能对读者有所帮助,并希望得到同行和读者的批评指正。

编 者

2003 年 10 月

# 目 录

## 前言

## 第一章 行列式

|          |      |
|----------|------|
| 习题一详解    | (1)  |
| (A)      | (1)  |
| (B)      | (45) |
| 精选考研试题解析 | (51) |

## 第二章 矩阵

|          |       |
|----------|-------|
| 习题二详解    | (57)  |
| (A)      | (57)  |
| (B)      | (102) |
| 精选考研试题解析 | (115) |

## 第三章 线性方程组

|          |       |
|----------|-------|
| 习题三详解    | (128) |
| (A)      | (128) |
| (B)      | (171) |
| 精选考研试题解析 | (184) |

## 第四章 矩阵的特征值

|          |       |
|----------|-------|
| 习题四详解    | (203) |
| (A)      | (203) |
| (B)      | (225) |
| 精选考研试题解析 | (230) |

## 第五章 二次型

|          |       |
|----------|-------|
| 习题五详解    | (243) |
| (A)      | (243) |
| (B)      | (264) |
| 精选考研试题解析 | (270) |

# 第一章 行列式

本章给出行列式的定义,行列式的性质,行列式的计算及应用行列式求解线性方程组的方法——克莱姆法则.重点是行列式的计算和克莱姆法则的应用.

做习题是加深理解数学概念,熟练掌握数学方法的重要途径和不可或缺的步骤.下面给出的习题详解,希望对读者有所帮助.

## 习题一详解

### (A)

1. 计算下列二阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \quad (5) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$$

$$(6) \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} \quad (7) \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$$

解 (1) 按定义,  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 1 = 1.$

(2) 按定义,  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times (-1) = 5.$

(3) 按定义,  $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 6 \times 12 - 9 \times 8 = 0.$

按性质,  $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 3 \times 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

(4) 按定义,  $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab^2 - ba^2 = ab(b-a).$

按性质,  $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = ab(b-a).$

(5) 按定义,  $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$   
 $= (x-1)(x^2+x+1) - x^2$   
 $= x^3 - x^2 - 1.$

(6) 按定义,  $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$   
 $= \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(-\frac{2t}{1+t^2}\right)$   
 $= \frac{1}{(1+t^2)^2}((1-t^2)^2 + 4t^2)$   
 $= \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1.$

按性质,  $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{vmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{vmatrix}$   
 $= \frac{1}{(1+t^2)^2}((1-t^2)^2 + 4t^2) = 1.$

(7) 按定义  $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_b a \log_a b = 1 - 1 = 0.$

注 本题是行列式最基本的练习, 注意行列式的最终结果是一个代数式或一个数.

2. 计算下列三阶行列式:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & (2) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix} \\
 (3) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} & (4) \quad & \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

解 (1) 按定义, 即按课本第 3 页图 1-2 的方法, 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 \\
 - 3 \times 1 \times 2 - 2 \times 3 \times 1 - 1 \times 2 \times 3 \\
 = 1 + 8 + 27 - 6 - 6 - 6 = 18.$$

(2) 按定义,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 32 + 27 - 8 - 15 - 36 = 5.$$

用性质, 化行列式为三角形行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 8r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\
 \xrightarrow[r_3 + \frac{r_2}{2}]{r_3 + \frac{r_2}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} \\
 = 1 \times (-2) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 5.$$

(3) 按定义,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -7.$$

(4) 按定义,

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

按第 1 行展开,

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

或按第 1 列展开,

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} a & 0 \\ d & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

注  $r_i + kr_j$  表示行列式的第  $j$  行的  $k$  倍加到第  $i$  行.  $c_i + kc_j$  表示行列式的第  $j$  列的  $k$  倍加到第  $i$  列.  $r_i \leftrightarrow r_j$  表示第  $i$  行与第  $j$  行互换,  $c_i \leftrightarrow c_j$  表示第  $i$  列与第  $j$  列互换.

3. 证明下列等式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

证法 1 根据定义, 左端

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 a_3 c_2 + c_1 a_2 b_3 \\ - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

而右端

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) \\ = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - b_1 a_2 c_3 + b_1 a_3 c_2 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3$$

左端 = 右端, 等式得证.

证法 2 根据定理 1.4,

$$D = a_1 A_{11} + b_1 A_{12} + c_1 A_{13}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

由此证得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

4.  $k$  为何值时,

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**分析** 行列式是一个代数式,按定义将行列式展成代数式后,令其为零再求  $k$  值.

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 4k + 3 = 0$$

解得  $k=3$  或  $k=1$ . 所以  $k=3$  或  $k=1$  时,行列式为零.

5. 当  $x$  为何值时

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 3x^2 - x^2 - 4x = 2x^2 - 4x \neq 0$$

所以  $x \neq 0$  且  $x \neq 2$ .

$$6. \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0 \text{ 的充分必要条件是什么?}$$

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 4 - a^2$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow 4 - a^2 > 0 \Leftrightarrow |a| < 2.$$

所以,该行列式大于零的充要条件是  $|a| < 2$ .

7. 求下列排列的逆序数:

(1) 41253 (2) 3712456 (3) 36715284

(4)  $n(n-1)(n-2)\cdots 21$

解 (1) 41253 所含逆序为 41, 42, 43, 53, 逆序数为 4.

(2) 3712456 所含逆序为 31, 32, 71, 72, 74, 75, 76, 则逆序数为 7.

(3) 36715284 所含逆序为 31, 32, 61, 65, 62, 64, 71, 75, 72, 74, 52, 54, 84, 则逆序数为 13.

(4)  $n(n-1)(n-2)\cdots 21$  的逆序为  $n(n-1), n(n-2), \cdots, n2, n1, (n-1)(n-2), \cdots, (n-1)2, (n-1)1, \cdots, 21$ . 逆序数为

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{(n-1)+1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

8. 在六阶行列式  $|a_{ij}|$  中, 下列各元素乘积应取什么符号?

(1)  $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$

(2)  $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$

(3)  $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$

(4)  $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$

(5)  $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$

解 (1)  $N(123456) + N(532416) = 0 + 8 = 8$

$(-1)^8 = +1$ , 则该乘积应取正号.

$$(2) N(123456) + N(162435) = 0 + 5 = 5$$

$(-1)^5 = -1$ , 则该乘积应取负号.

$$(3) N(251463) + N(136254) = 6 + 5 = 11$$

$(-1)^{11} = -1$ , 则该乘积应取负号.

$$(4) N(531462) + N(123456) = 8 + 0 = 8$$

$(-1)^8 = +1$ , 则该乘积应取正号.

$$(5) N(654321) + N(123456) = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 + 0 = 15$$

$(-1)^{15} = -1$ , 则该乘积应取负号.

9. 选择  $k, l$  使  $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$  成为五阶行列式  $|a_{ij}|$  中带有负号的项.

$$\text{解 } N(12345) + N(3k42l) = N(3k42l)$$

欲使  $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$  带负号, 必须  $N(3k42l)$  为奇数, 由于  $k, l$  只能取 1, 5 或 5, 1, 那么

$$k=1, l=5 \text{ 时, } N(31425) = 3$$

$$k=5, l=1 \text{ 时, } N(35421) = 8$$

所以  $k=1, l=5$  时,  $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55}$  带有负号.

10. 设  $n$  阶行列式中有  $n^2 - n$  个以上元素为零, 证明该行列式为零.

证  $n$  阶行列式有  $n^2$  个元素, 它若有  $n^2 - n$  个以上的元素为零, 表明它至多有  $n - 1$  个非零元素, 根据行列式的定义, 它的展开式的每一项都是行列式的  $n$  个不同行不同列的元素的乘积, 其中至多有  $n - 1$  个非零元素, 即行列式至少有一行全为零, 因而行列式的每一项均为零, 故行列式为零.

注 对于稀疏行列式(即零元素很多的行列式), 检查其非零元素个数, 若它少于其阶数, 则行列式一定为零, 这是本题所证明的.

本题的条件仅是充分的.

11. 用行列式定义计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解 (1) 按定义, 按第 1 行展开, 逐次降阶

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{1+n} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+n} (-1)^{1+(n-1)} \cdots (-1)^{1+2} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \\
&= (-1)^{n-1+\frac{(n+2)(n-1)}{2}} n! = (-1)^{\frac{n^2+3n-4}{2}} n! \\
&= (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} n!
\end{aligned}$$

**另解** 按行列式性质, 交换行列式的各列, 使  $1, 2, \cdots, n$  位于行列式的主对角线上

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} n!
\end{aligned}$$

这里进行的列交换次数为

$$\begin{aligned}
(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 &= \frac{(n-1)+1}{2} (n-1) \\
&= \frac{n^2-n}{2}
\end{aligned}$$

**注** 应用本题的方法可同样证明

$$\begin{vmatrix} & & & & \lambda_1 \\ & & & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & \ddots & & \\ & \lambda_{n-1} & & & \\ \lambda_n & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

(2) 先按第 1 列展开

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & n-1 & \end{vmatrix} \\ = (-1)^{1+n} n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = (-1)^{n+1} n!$$

(3) 证法 1 该行列式展开式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$$

其中下标  $j_1, j_2, j_3$  中至少有一个是数 3, 4, 5 中的一个, 则  $a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$  中至少有一个数为零, 故行列式的展开式中任一项都为零, 所以该行列式等于零.

证法 2 由拉普拉斯定理, 按第 1 行和第 2 行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} a_{32} & 0 & 0 \\ a_{42} & 0 & 0 \\ a_{52} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} a_{32} & 0 & 0 \\ a_{42} & 0 & 0 \\ a_{52} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{15} \\ a_{21} & a_{25} \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+1+5} \begin{vmatrix} a_{32} & 0 & 0 \\ a_{42} & 0 & 0 \\ a_{52} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} a_{31} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} a_{31} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{22} & a_{25} \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+2+5} \begin{vmatrix} a_{31} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{23} & a_{25} \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+3+5} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+4+5} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

注1 若以第3,4,5行展开,方法更为简洁.

注2 有一行(列)为零的行列式的值是零.

(4) 解法1 按定义

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

解法2 应用行列式性质

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

解法3 该行列式惟一的非零元素乘积是

$$a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1.$$

逆序数  $N(1234) + N(3241) = 4$ , 则该乘积前取正号, 于是

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} = 1.$$

注 本题虽然简单却给出了三种解法, 目的在于开拓读者思路, 这些方法可运用于其它类似的题目.

(5) 应用行列式性质

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$