大学数学的内容、方法与技巧丛书

泛函分析

内容、方法与技巧

孙清华 侯谦民 孙昊

Fanhan Fenxi Neirong Fangfa Yu Jiqiao

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

大学数学的内容、方法与技巧丛书

泛函分析

内容、方法与技巧

孙清华　侯谦民　孙　昊

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析 内容、方法与技巧/孙清华 侯谦民 孙 昊
武汉:华中科技大学出版社,2005 年 6 月
ISBN 7-5609-3390-4

Ⅰ. 泛…
Ⅱ. ①孙… ②侯… ③孙…
Ⅲ. 泛函分析-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O177

泛函分析 内容、方法与技巧 孙清华 侯谦民 孙昊

策划编辑:徐正达
责任编辑:徐正达 张 钦 封面设计:刘 卉
责任校对:陈 骏 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司
印 刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:850×1168 1/32 印张:9.625 字数:230 000
版次:2005 年 6 月第 1 版 印次:2005 年 9 月第 2 次印刷 定价:13.80 元
ISBN 7-5609-3390-4/O · 350

内容简介

本书是“大学数学的内容、方法与技巧丛书”之一，是学习泛函分析课程的一本很好的辅导书. 本书编写顺序与一般的泛函分析教材同步，内容包括度量空间、线性有界算子、希尔伯特空间的几何学三大部分. 本书在凝练知识、释疑解难的基础上，用大量、全面的例题对度量空间、赋范线性空间、线性算子与线性泛函、内积空间与各种算子及它们的谱分解的概念、关系、性质进行了演绎、推导与论证，将极大地有益于读者掌握泛函分析知识与方法.

希望本书能成为您的良师益友，欢迎您选用本系列丛书.

前　言

泛函分析是高等学校数学专业本科与研究生的一门主要课程，是现代数学中一个较新的重要分支．泛函分析起源于经典数学、物理中的一些变分问题和边值问题，概括了经典数学分析、函数论中的某些重要概念、问题与成果，综合运用了分析的、代数的和几何的观点和方法．泛函分析的概念和方法对现代纯数学与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支，都已产生或正在产生重大的影响．

泛函分析分为线性泛函分析与非线性泛函分析两大部分，本书主要讨论线性泛函分析．本书编写顺序与大多数泛函分析教材同步，主要内容为度量(距离)空间、线性有界算子与希尔伯特空间的几何学．与本丛书其它书籍一样，本书按章节编写，每节分为主要内容，疑难解析，方法、技巧与典型例题分析三个部分，对问题逐个地进行讨论、分析、证明、演算与归纳，用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧和举证方法，使读者通过本书能更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法．由于泛函分析的概念比较抽象难懂，涉及的知识比较广泛而深刻，读者学习起来比较困难，因此本书尽可能做到由浅入深、循序渐进，用较浅显的语言、较详尽的方式阐述问题，希望读者通过学习有较大的收获．

本书在编写过程中参阅了一些作者的有关著作，同时得到了华中科技大学出版社的大力支持与帮助，在此向他们表示诚挚的谢意．

由于经验不足与学识所限，本书难免会有疏漏之处，欢迎批评指正．

孙清华

2005 年 2 月

目　　录

第一章 度量空间

度量空间又称距离空间，本章主要研究度量空间及空间中点集的性质，并引入压缩映射原理.

第一节 度量空间的基本概念

主要内容

1. 定义1 设X是一个非空集合，x和y是X中任意两个元素，若按某种法则，总有一个实数$\rho(x,y)$与之对应，且满足

(1)非负性 $\rho(x,y)\geqslant 0$ 又 $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$,

(2)对称性 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$,

(3)三角不等式 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$, $z\in X$,

则称$\rho(x,y)$是两点x,y间的**距离**(**度量**)，称X为**度量空间**(**或距离空间**). 也记做(X,ρ).

2. 定义2 设X是一个度量空间，x_n $(n=1,2,\cdots)$，$x\in X$，如果当$n\to\infty$时，数列$\rho(x_n,x)\to 0$，则称点列$\{x_n\}$按照距离$\rho(x,y)$收敛于x，记做$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 称$\{x_n\}$为**收敛点列**，称$x$为$\{x_n\}$的**极限**.

定理1 在度量空间中，任何一个点列至多只有一个极限，即收敛点列的极限是惟一的.

定理2 若$x_n\to x$，$y_n\to y$，则$\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$，即距离$\rho(x,y)$是两个变元$x,y$的连续函数.

定义3 设M是度量空间X中的点集，如果存在$x_0\in X$，使得$\sup\limits_{x\in M}\rho(x,x_0)<\infty$，则称$M$是$X$中的**有界集**.

定理3 设$\{x_n\}$是度量空间X中的收敛点列，则集合$\{x_n\}$是有界的.

3. **定理4** 度量空间R的任一非空子集M也是度量空间，称M为R的子空间.

疑难解析

如何理解度量空间概念？

答 度量空间是引入了度量函数$\rho(x,y)$的一个非空集合. 在一个非空集合X中，可以定义不同的度量函数$\rho(x,y)$和$\rho_1(x,y)$，从而得到不同的度量空间.

设(X,ρ)与(X_1,ρ_1)是两个度量空间，若存在从X到X_1的一一对应φ，使得对于每个$x,y\in X$，有$\rho(x,y)=\rho_1(\varphi x,\varphi y)$成立，则称$\varphi$是$(X,\rho)$到$(X_1,\rho_1)$上的**等距映射**，而称这两个空间是**等距同构**的. 两个度量空间，从形式上看，集合中的元素可以完全不同，但是如果它们是等距同构的，则可以将其中较为抽象的空间用另一个较为具体的空间来表示，从而在论证时可以在技巧上获得较大的便利.

方法、技巧与典型例题分析

要求熟悉度量空间的基本概念，能验证集合按规定的距离构成度量空间. 关键是三个条件，特别是三角不等式是否成立.

例1 在$\mathbf{R}^n$上，

(1)$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$， (2)$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，

(3)$\rho(x,y)=\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{1/2}$，

证明：$\mathbf{R}^n$是度量空间.

证 (1)、(2)显然成立，下证(3)成立. 利用柯西不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right),$$

得 $$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big)^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$
$$=\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big)^{1/2}\Big]^2.$$
于是，在 $\mathbf{R}^n$ 中任取 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，令 $a_k=\xi_k-\zeta_k$，$b_k=\zeta_k-\eta_k$，则有
$$\Big[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2\Big]^{1/2}\leqslant\Big[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2\Big]^{1/2}+\Big[\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-\eta_k)^2\Big]^{1/2},$$
即 $$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$
因此，$\mathbf{R}^n$ 关于 $\rho(x,y)$ 构成度量空间.

若令
$$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|,\quad \rho_2(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|,$$
则可以验证 $\mathbf{R}^n$ 关于 $\rho_1(x,y)$ 与 $\rho_2(x,y)$ 也分别构成度量空间.

若在 $\mathbf{R}^n$ 中，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的坐标是复数，按度量 $\rho(x,y)=\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\Big)^{1/2}$ 构成的度量空间是酉空间，记做 C^n.

例 2 设 X 是任意的非空集合，对 X 中的任意 x,y，令
$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & 当 x\neq y,\\ 0, & 当 x=y,\end{cases}$$
证明：X 是度量空间.

证 $\rho(x,y)$ 满足非负性与对称性是显然的.

当 $\rho(x,y)=0$ 时，$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ 成立.

当 $\rho(x,y)=1$ 时，对任何 $z\in X$，式 $x\neq z$ 与 $y\neq z$ 中至少有一个成立，从而 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ 成立，所以三角不等式成立.

综上知，X 是度量空间（称为**离散度量空间**）.

例 3 设 $\mathbf{R}^1$ 是实数全体，规定对 $x,y\in\mathbf{R}^1$，令 $\rho(x,y)=$

$\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$，证明：$\mathbf{R}^1$ 关于 $\rho(x,y)$ 构成度量空间.

证 满足非负性与对称性是显然的.要证明三角不等式成立，只需证明：对任意的实数 a,b，以下不等式成立：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

由于在 $(0,+\infty)$ 上定义的函数 $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 是单调增加函数，又由 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，可以得出

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}=\frac{|(x-z)+(z-y)|}{1+|(x-z)+(z-y)|}\\&\leqslant\frac{|x-z|}{1+|x-z|}+\frac{|z-y|}{1+|z-y|}=\rho(x,z)+\rho(z,y)\end{aligned}$$
成立，从而知 $\mathbf{R}^1$ 按 $\rho(x,y)$ 构成度量空间.

例 4 设 S 为实数列 $\{x_n\}$ 的全体(或复数列全体)所成的空间，称 x_i 为 $x=\{x_i\}$ 的第 i 个坐标，对于 $x,y\in S$，$x=\{x_i\}$，$y=\{y_i\}$，令

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|},$$

证明：(1) $\rho(x,y)$ 是 S 上的一个度量；

(2) 在 S 中点列按距离收敛等价于按坐标收敛.

证 (1) ρ 满足非负性与对称性是显然的.

类似于例 3，可得三角不等式

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i+z_i-y_i|}{1+|x_i-z_i+z_i-y_i|}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}\right)\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$

所以 ρ 是 S 上的一个度量.

(2)设点列

$$x^{(n)}=\{x_i^{(n)}\}\in S,\ n=1,2,\cdots,$$

又 $x=\{x_i\}\in S$,则 $\rho(x^{(n)},x)\to 0\ (n\to\infty)$的充要条件是,对于每个自然数 i,有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i$.

因为,若

$$\rho(x^{(n)},x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0\ (n\to\infty),$$

则对于每个 i,有

$$\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0\ (n\to\infty),$$

从而

$$|x_i^{(n)}-x_i|\to 0\ (n\to\infty).$$

反之,设 $x_i^{(n)}\to x_i(n\to\infty)$, $i=1,2,\cdots$,即$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ m\in\mathbf{N}$,使得 $\sum\limits_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$. 又对于 $i=1,2,\cdots,m-1$,$\exists\ N_i\in\mathbf{N}$,使得当 $n>N_i$ 时,有 $|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_{m-1}\}$,则当 $n>N$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而,当 $n>N$ 时,有

$$\rho(x^{(n)},x)=\Big(\sum_{i=1}^{m-1}+\sum_{i=m}^{\infty}\Big)\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\varepsilon,$$

即

$$\rho(x^{(n)},x)\to 0\ (n\to\infty).$$

例 5 设 X 是非空集,对任何自然数 k,有 $X\times X$ 上函数 ρ_k,满足

(1)对任何 $x,y\in X$, $\rho_k(x,y)\geqslant 0$, $\rho_k(x,x)=0$;

(2)$\rho_k(x,y)\leqslant\rho_k(x,z)+\rho_k(y,z)$, $x,y,z\in X$.

又设对一切自然数 k,均有 $\rho_k(x,y)=0$ 时,必有 $x=y$. 证明:X 按照

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\rho_k(x,y)}{1+\rho_k(x,y)}$$

成为度量空间,且对 $\{x_n\}\subset X$,$\{x_n\}$按距离 ρ 收敛于 x 的充要条件

是对一切自然数k,均有$\rho_k(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$.

证 $\rho(x,y)\geqslant 0$是显然的. 若$\rho(x,y)=0$,则对于一切k, $\rho_k(x,y)=0$,从而$x=y$.

对于任何k和任何x,y,有

$$\rho_k(x,y)\leqslant\rho_k(x,x)+\rho_k(y,x)=\rho_k(y,x)$$

和
$$\rho_k(y,x)\leqslant\rho_k(y,y)+\rho_k(x,y)=\rho_k(x,y),$$

所以
$$\rho_k(x,y)=\rho_k(y,x)\Longrightarrow\rho(x,y)=\rho(y,x).$$

对$x,y,z\in X$,有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\rho_k(x,y)}{1+\rho_k(x,y)}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left[\frac{\rho_k(x,z)}{1+\rho_k(x,z)}+\frac{\rho_k(z,y)}{1+\rho_k(z,y)}\right]\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$

从而知X是一度量空间.

下证充要条件成立.

设对于一切$k\in\mathbf{N}$, $\rho_k(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$, $\forall\ \varepsilon>0$,取K,使得

$\sum\limits_{k=K}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2}$,再取$N\in\mathbf{N}$,使得当$n>N$时,有

$$\sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{2^k}\frac{\rho_k(x_n,x)}{1+\rho_k(x_n,x)}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而知,当$n>N$时,有$\rho(x_n,x)<\varepsilon$,即$\rho(x_n,x)\to 0$.

反之,由$\rho(x_n,x)\to 0$,易知

$$\frac{\rho_k(x_n,x)}{1+\rho_k(x_n,x)}\leqslant 2^k\rho(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty),$$

从而有
$$\rho_k(x_n,x)\to 0\quad(n\to\infty).$$

即$\{x_n\}$按距离ρ收敛于x的充要条件是,对于一切自然数k,均有$\rho_k(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$.

例6 取所有有界复数列作为元素组成集合X,对每个元素$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in X$(简记做$x=(\xi_j)$),都存在一个实数$C$,使得

$|\xi_j|<C\ (j=1,2,\cdots)$. 按 $\rho(x,y)=\sup\limits_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|$ 定义度量，令 $l^\infty=(X,\rho)$，证明：l^∞ 是度量空间.

证 由题设知，$x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)$ 都是有界的复数列，所以 $|\xi_j-\eta_j|\,(j=1,2,\cdots)$ 有界，且存在上确界，即 $\rho(x,y)=\sup\limits_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|$ 是有限的非负实数.

$x=y\Longrightarrow\rho(x,y)=0$ 是明显的. 反之，若

$$\rho(x,y)=\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|=0,$$

则对每一 j，有

$$0\leqslant|\xi_j-\eta_j|\leqslant\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|=0,$$

从而

$$\xi_j=\eta_j(j=1,2,\cdots)\Longrightarrow x=y.$$

$\rho(x,y)=\rho(y,x)$ 显然成立.

对任意 $z=(\zeta_j)\in X$，有

$$\begin{aligned}|\xi_j-\eta_j|&=|(\xi_j-\zeta_j)+(\zeta_j-\eta_j)|\leqslant|\xi_j-\zeta_j|+|\zeta_j-\eta_j|\\&\leqslant\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\zeta_j|+\sup_{j\in\mathbf{N}}|\zeta_j-\eta_j|,\quad j=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

依上确界的定义，由上式有

$$\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\eta_j|\leqslant\sup_{j\in\mathbf{N}}|\xi_j-\zeta_j|+\sup_{j\in\mathbf{N}}|\zeta_j-\eta_j|,$$

即

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

所以 l^∞ 是度量空间.

例7 设 E 是勒贝格可测集，$m(E)<\infty$. 设 S 是 E 上实值（或复值）可测函数全体，当 $f(t)$，$g(t)$ 在 E 上几乎处处相等时，把 f 和 g 看做 S 中的同一点，且对于 $f,g\in S$，定义

$$\rho(f,g)=\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\mathrm{d}t,$$

证明：(1) $\rho(x,y)$ 是 S 上的一个度量；

(2) 在 S 中，$\rho(f_n,f)\to0$ 的充要条件是 f_n 依测度收敛于 f.

证 (1) 因为 $f(t)$，$g(t)$ 是可测函数，当 $f(t)$，$g(t)$ 在 E 上几乎处处相等时，可以把 f、g 看做 S 中的同一点，所以 $\dfrac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}$ 是有界可测函数. 因为 $m(E)<\infty$，所以 $\rho(f,g)$ 有

确定的意义，仿照例 6 可以证明，$\rho(f,g)$满足度量的三个条件.

(2)设f_n依测度收敛于f，则对于任何$\sigma>0$，有

$$E\left(\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}>\sigma\right)\subset E(|f_n-f|>\sigma),$$

所以 $$m\left(E\left(\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}>\sigma\right)\right)\leqslant m(E(|f_n-f|>\sigma))\to 0,$$

即$\dfrac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}$依测度收敛于零，因为$\dfrac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\leqslant 1$和$m(E)<\infty$，则由实变函数中有界控制收敛定理知，$\rho(f_n,f)\to 0\ (n\to\infty)$.

反之，若$\rho(f_n,f)\to 0\ (n\to\infty)$，则当$\sigma>0$时，有

$$\rho(f_n,f)\geqslant\int_{E(|f_n-f|\geqslant\sigma)}\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\mathrm{d}t$$

$$\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}m\quad(E(|f_n-f|\geqslant\sigma)).$$

令$n\to\infty$，即知$\{f_n\}$在E上依测度收敛于f.

例 8 判断在所有实数组成的集合上，下列$\rho(x,y)$是否为度量：

(1)$\rho(x,y)=(x-y)^2$； (2)$\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$.

解 (1)不是度量. 不满足三角不等式，如$x=1,z=0,y=-1$时，有

$$\rho(1,-1)>\rho(1,0)+\rho(0,-1).$$

(2)是度量. 非负性与对称性显然满足，而

$$|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|\leqslant(|x-z|^{1/2}+|z-y|^{1/2})^2,$$

所以 $$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

例 9 设ρ是X上的度量，x,y,z,t是X中任意四点，证明：

$$|\rho(x,z)-\rho(y,t)|\leqslant\rho(x,y)+\rho(z,t).$$

证 由三角不等式可得

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,t)+\rho(t,z),$$

故 $$\rho(x,z)-\rho(y,t)\leqslant\rho(x,y)+\rho(z,t).\qquad ①$$

在上式中，互换x与y，z与t可得