

大学数学的内容、方法与技巧丛书

泛函分析

内容、方法与技巧

► 孙清华 侯谦民 孙昊

Fanhan Fenxi
Neirong Fangfa Yu
Jiqiao

华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

大学数学的内容、方法与技巧丛书

泛 函 分 析

内容、方法与技巧

孙清华 侯谦



华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析 内容、方法与技巧/孙清华 侯谦民 孙 昊
武汉:华中科技大学出版社,2005 年 6 月
ISBN 7-5609-3390-4

I. 泛…

II. ①孙… ②侯… ③孙…

III. 泛函分析-高等学校-教学参考资料

IV. O177

泛函分析 内容、方法与技巧

孙清华 侯谦民 孙昊

策划编辑:徐正达

责任编辑:徐正达 张 钦

责任校对:陈 骏

封面设计:刘 卉

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:850×1168 1/32

印张:9.625

字数:230 000

版次:2005 年 6 月第 1 版

印次:2005 年 9 月第 2 次印刷

定价:13.80 元

ISBN 7-5609-3390-4/O · 350

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是“大学数学的内容、方法与技巧丛书”之一,是学习泛函分析课程的一本很好的辅导书. 本书编写顺序与一般的泛函分析教材同步,内容包括度量空间、线性有界算子、希尔伯特空间的几何学三大部分. 本书在凝练知识、释疑解难的基础上,用大量、全面的例题对度量空间、赋范线性空间、线性算子与线性泛函、内积空间与各种算子及它们的谱分解的概念、关系、性质进行了演绎、推导与论证,将极大地有益于读者掌握泛函分析知识与方法.

希望本书能成为您的良师益友,欢迎您选用本系列丛书.

前 言

泛函分析是高等学校数学专业本科与研究生的一门主要课程,是现代数学中一个较新的重要分支. 泛函分析起源于经典数学、物理中的一些变分问题和边值问题,概括了经典数学分析、函数论中的某些重要概念、问题与成果,综合运用了分析的、代数的和几何的观点和方法. 泛函分析的概念和方法对现代纯数学与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支,都已产生或正在产生重大的影响.

泛函分析分为线性泛函分析与非线性泛函分析两大部分,本书主要讨论线性泛函分析. 本书编写顺序与大多数泛函分析教材同步,主要内容为度量(距离)空间、线性有界算子与希尔伯特空间的几何学. 与本丛书其它书籍一样,本书按章节编写,每节分为主要内容,疑难解析,方法、技巧与典型例题分析三个部分,对问题逐个地进行讨论、分析、证明、演算与归纳,用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧和举证方法,使读者通过本书能更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法. 由于泛函分析的概念比较抽象难懂,涉及的知识比较广泛而深刻,读者学习起来比较困难,因此本书尽可能做到由浅入深、循序渐进,用较浅显的语言、较详尽的方式阐述问题,希望读者通过学习有较大的收获.

本书在编写过程中参阅了一些作者的有关著作,同时得到了华中科技大学出版社的大力支持与帮助,在此向他们表示诚挚的谢意.

由于经验不足与学识所限,本书难免会有疏漏之处,欢迎批评指正.

孙清华

2005 年 2 月

目 录

第一章 度量空间	(1)
第一节 度量空间的基本概念	(1)
主要内容	(1)
疑难解析	(2)
方法、技巧与典型例题分析	(2)
第二节 度量空间中的点集与映射	(11)
主要内容	(11)
疑难解析	(13)
方法、技巧与典型例题分析	(13)
第三节 赋范线性空间	(18)
主要内容	(18)
疑难解析	(20)
方法、技巧与典型例题分析	(20)
第四节 赋范线性空间的例子	(29)
主要内容	(29)
疑难解析	(30)
方法、技巧与典型例题分析	(31)
第五节 稠密性与可分性	(37)
主要内容	(37)
疑难解析	(38)
方法、技巧与典型例题分析	(39)
第六节 完备性	(46)
主要内容	(46)
疑难解析	(47)
方法、技巧与典型例题分析	(47)
第七节 不动点原理	(60)

主要内容	(60)
疑难解析	(62)
方法、技巧与典型例题分析	(62)
第八节 致密集与紧性	(76)
主要内容	(76)
疑难解析	(78)
方法、技巧与典型例题分析	(79)
第二章 线性有界算子	(93)
第一节 线性算子与线性泛函	(93)
主要内容	(93)
疑难解析	(95)
方法、技巧与典型例题分析	(95)
第二节 连续线性泛函的表示	(111)
主要内容	(111)
疑难解析	(112)
方法、技巧与典型例题分析	(113)
第三节 线性泛函的延拓	(122)
主要内容	(122)
疑难解析	(125)
方法、技巧与典型例题分析	(125)
第四节 共轭空间与共轭算子	(134)
主要内容	(134)
疑难解析	(136)
方法、技巧与典型例题分析	(137)
第五节 逆算子与开映射定理	(151)
主要内容	(151)
疑难解析	(152)
方法、技巧与典型例题分析	(153)
第六节 共鸣定理	(166)
主要内容	(166)
疑难解析	(168)
方法、技巧与典型例题分析	(169)

第七节 线性算子的正则集与谱不变子空间	(178)
主要内容	(178)
疑难解析	(182)
方法、技巧与典型例题分析	(183)
第八节 全连续算子的谱分析	(190)
主要内容	(190)
疑难解析	(192)
方法、技巧与典型例题分析	(192)
第三章 希尔伯特空间的几何学	(197)
第一节 内积空间 希尔伯特空间	(197)
主要内容	(197)
疑难解析	(198)
方法、技巧与典型例题分析	(199)
第二节 投影定理	(209)
主要内容	(209)
疑难解析	(211)
方法、技巧与典型例题分析	(212)
第三节 内积空间中的直交系	(220)
主要内容	(220)
疑难解析	(223)
方法、技巧与典型例题分析	(224)
第四节 共轭空间与共轭算子	(240)
主要内容	(240)
疑难解析	(242)
方法、技巧与典型例题分析	(243)
第五节 投影算子	(257)
主要内容	(257)
疑难解析	(259)
方法、技巧与典型例题分析	(259)
第六节 谱系、谱测度和谱积分	(268)
主要内容	(268)
疑难解析	(271)

方法、技巧与典型例题分析	(272)
第七节 酉算子的谱分解定理	(278)
主要内容	(278)
疑难解析	(281)
方法、技巧与典型例题分析	(281)
第八节 自共轭算子的谱分解	(287)
主要内容	(287)
疑难解析	(291)
方法、技巧与典型例题分析	(291)
第九节 正常算子的谱分解	(295)
主要内容	(295)
疑难解析	(297)
方法、技巧与典型例题分析	(298)

第一章 度量空间

度量空间又称距离空间,本章主要研究度量空间及空间中点集的性质,并引入压缩映射原理.

第一节 度量空间的基本概念

主要内容

1. 定义1 设 X 是一个非空集合, x 和 y 是 X 中任意两个元素,若按某种法则,总有一个实数 $\rho(x, y)$ 与之对应,且满足

(1)非负性 $\rho(x, y) \geq 0$ 又 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(2)对称性 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(3)三角不等式 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), z \in X$,

则称 $\rho(x, y)$ 是两点 x, y 间的距离(度量),称 X 为度量空间(或距离空间). 也记做 (X, ρ) .

2. 定义2 设 X 是一个度量空间, x_n ($n=1, 2, \dots$), $x \in X$, 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, 则称点列 $\{x_n\}$ 按照距离 $\rho(x, y)$ 收敛于 x , 记做 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 称 $\{x_n\}$ 为收敛点列, 称 x 为 $\{x_n\}$ 的极限.

定理1 在度量空间中, 任何一个点列至多只有一个极限, 即收敛点列的极限是惟一的.

定理2 若 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, 则 $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y)$, 即距离 $\rho(x, y)$ 是两个变元 x, y 的连续函数.

定义3 设 M 是度量空间 X 中的点集, 如果存在 $x_0 \in X$, 使得 $\sup_{x \in M} \rho(x, x_0) < \infty$, 则称 M 是 X 中的有界集.

定理3 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的收敛点列,则集合 $\{x_n\}$ 是有界的.

3. 定理4 度量空间 R 的任一非空子集 M 也是度量空间,称 M 为 R 的子空间.

疑难解析

如何理解度量空间概念?

答 度量空间是引入了度量函数 $\rho(x, y)$ 的一个非空集合. 在一个非空集合 X 中,可以定义不同的度量函数 $\rho(x, y)$ 和 $\rho_1(x, y)$,从而得到不同的度量空间.

设 (X, ρ) 与 (X_1, ρ_1) 是两个度量空间,若存在从 X 到 X_1 的一一对应 φ ,使得对于每个 $x, y \in X$,有 $\rho(x, y) = \rho_1(\varphi x, \varphi y)$ 成立,则称 φ 是 (X, ρ) 到 (X_1, ρ_1) 上的等距映射,而称这两个空间是等距同构的. 两个度量空间,从形式上看,集合中的元素可以完全不同,但是如果它们是等距同构的,则可以将其中较为抽象的空间用另一个较为具体的空间来表示,从而在论证时可以在技巧上获得较大的便利.

方法、技巧与典型例题分析

要求熟悉度量空间的基本概念,能验证集合按规定的距离构成度量空间. 关键是三个条件,特别是三角不等式是否成立.

例1 在 $\mathbf{R}^n$ 上,

$$(1) x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (2) y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

$$(3) \rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2 \right]^{1/2},$$

证明: $\mathbf{R}^n$ 是度量空间.

证 (1)、(2)显然成立,下证(3)成立. 利用柯西不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right),$$

$$\begin{aligned}
\text{得} \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\
&= \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2} \right]^2.
\end{aligned}$$

于是, 在 $\mathbf{R}^n$ 中任取 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$, 令 $a_k = \xi_k - \zeta_k$, $b_k = \zeta_k - \eta_k$, 则有

$$\left[\sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{k=1}^n (\xi_k - \zeta_k)^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^n (\zeta_k - \eta_k)^2 \right]^{1/2},$$

即 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

因此, $\mathbf{R}^n$ 关于 $\rho(x, y)$ 构成度量空间.

若令

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|, \quad \rho_2(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - \eta_k|,$$

则可以验证 $\mathbf{R}^n$ 关于 $\rho_1(x, y)$ 与 $\rho_2(x, y)$ 也分别构成度量空间.

若在 $\mathbf{R}^n$ 中, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的坐标是复数, 按度量 $\rho(x, y) =$

$\left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{1/2}$ 构成的度量空间是酉空间, 记做 C^n .

例 2 设 X 是任意的非空集合, 对 X 中的任意 x, y , 令

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \neq y, \\ 0, & \text{当 } x = y, \end{cases}$$

证明: X 是度量空间.

证 $\rho(x, y)$ 满足非负性与对称性是显然的.

当 $\rho(x, y) = 0$ 时, $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ 成立.

当 $\rho(x, y) = 1$ 时, 对任何 $z \in X$, 式 $x \neq z$ 与 $y \neq z$ 中至少有一个成立, 从而 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ 成立, 所以三角不等式成立.

综上所述, X 是度量空间 (称为离散度量空间).

例 3 设 $\mathbf{R}^1$ 是实数全体, 规定对 $x, y \in \mathbf{R}^1$, 令 $\rho(x, y) =$

$\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$, 证明: $\mathbf{R}^1$ 关于 $\rho(x, y)$ 构成度量空间.

证 满足非负性与对称性是显然的. 要证明三角不等式成立, 只需证明: 对任意的实数 a, b , 以下不等式成立:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

由于在 $(0, +\infty)$ 上定义的函数 $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ 是单调增加函数, 又由 $|a+b| \leq |a| + |b|$, 可以得出

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \rho(x, y) &= \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|(x-z)+(z-y)|}{1+|(x-z)+(z-y)|} \\ &\leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|} = \rho(x, z) + \rho(z, y) \end{aligned}$$

成立, 从而知 $\mathbf{R}^1$ 按 $\rho(x, y)$ 构成度量空间.

例4 设 S 为实数列 $\{x_n\}$ 的全体 (或复数列全体) 所成的空间, 称 x_i 为 $x = \{x_i\}$ 的第 i 个坐标, 对于 $x, y \in S, x = \{x_i\}, y = \{y_i\}$, 令

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|},$$

证明: (1) $\rho(x, y)$ 是 S 上的一个度量;

(2) 在 S 中点列按距离收敛等价于按坐标收敛.

证 (1) ρ 满足非负性与对称性是显然的.

类似于例3, 可得三角不等式

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i + z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i + z_i - y_i|} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \left(\frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |z_i - y_i|} \right) \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y), \end{aligned}$$

所以 ρ 是 S 上的一个度量.

(2) 设点列

$$x^{(n)} = \{x_i^{(n)}\} \in S, n=1, 2, \dots,$$

又 $x = \{x_i\} \in S$, 则 $\rho(x^{(n)}, x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 的充要条件是, 对于每个自然数 i , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = x_i$.

因为, 若

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1 + |x_i^{(n)} - x_i|} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

则对于每个 i , 有

$$\frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1 + |x_i^{(n)} - x_i|} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

从而

$$|x_i^{(n)} - x_i| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

反之, 设 $x_i^{(n)} \rightarrow x_i (n \rightarrow \infty)$, $i=1, 2, \dots$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}$, 使得 $\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. 又对于 $i=1, 2, \dots, m-1, \exists N_i \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N_i$ 时,

有 $|x_i^{(n)} - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. 取 $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_{m-1}\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1 + |x_i^{(n)} - x_i|} < \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon/2}{1 + \varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而, 当 $n > N$ 时, 有

$$\rho(x^{(n)}, x) = \left(\sum_{i=1}^{m-1} + \sum_{i=m}^{\infty} \right) \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1 + |x_i^{(n)} - x_i|} < \varepsilon,$$

即

$$\rho(x^{(n)}, x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

例 5 设 X 是非空集, 对任何自然数 k , 有 $X \times X$ 上函数 ρ_k , 满足

$$(1) \text{ 对任何 } x, y \in X, \rho_k(x, y) \geq 0, \rho_k(x, x) = 0;$$

$$(2) \rho_k(x, y) \leq \rho_k(x, z) + \rho_k(y, z), x, y, z \in X.$$

又设对一切自然数 k , 均有 $\rho_k(x, y) = 0$ 时, 必有 $x = y$. 证明: X 按照

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x, y)}{1 + \rho_k(x, y)}$$

成为度量空间, 且对 $\{x_n\} \subset X, \{x_n\}$ 按距离 ρ 收敛于 x 的充要条件

是对一切自然数 k , 均有 $\rho_k(x_n, x) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$.

证 $\rho(x, y) \geq 0$ 是显然的. 若 $\rho(x, y) = 0$, 则对于一切 k , $\rho_k(x, y) = 0$, 从而 $x = y$.

对于任何 k 和任何 x, y , 有

$$\rho_k(x, y) \leq \rho_k(x, x) + \rho_k(y, x) = \rho_k(y, x)$$

和
$$\rho_k(y, x) \leq \rho_k(y, y) + \rho_k(x, y) = \rho_k(x, y),$$

所以
$$\rho_k(x, y) = \rho_k(y, x) \Rightarrow \rho(x, y) = \rho(y, x).$$

对 $x, y, z \in X$, 有

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x, y)}{1 + \rho_k(x, y)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left[\frac{\rho_k(x, z)}{1 + \rho_k(x, z)} + \frac{\rho_k(z, y)}{1 + \rho_k(z, y)} \right] \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y), \end{aligned}$$

从而知 X 是一度量空间.

下证充要条件成立.

设对于一切 $k \in \mathbb{N}$, $\rho_k(x_n, x) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$, $\forall \varepsilon > 0$, 取 K , 使得

$$\sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2},$$
 再取 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x_n, x)}{1 + \rho_k(x_n, x)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而知, 当 $n > N$ 时, 有 $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, 即 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$.

反之, 由 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, 易知

$$\frac{\rho_k(x_n, x)}{1 + \rho_k(x_n, x)} \leq 2^k \rho(x_n, x) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty),$$

从而有 $\rho_k(x_n, x) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$.

即 $\{x_n\}$ 按距离 ρ 收敛于 x 的充要条件是, 对于一切自然数 k , 均有 $\rho_k(x_n, x) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$.

例 6 取所有有界复数列作为元素组成集合 X , 对每个元素 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in X$ (简记做 $x = (\xi_j)$), 都存在一个实数 C , 使得

$|\xi_j| < C$ ($j=1, 2, \dots$). 按 $\rho(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j|$ 定义度量, 令 $l^\infty = (X, \rho)$, 证明: l^∞ 是度量空间.

证 由题设知, $x = (\xi_j), y = (\eta_j)$ 都是有界的复数列, 所以 $|\xi_j - \eta_j|$ ($j=1, 2, \dots$) 有界, 且存在上确界, 即 $\rho(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j|$ 是有限的非负实数.

$x=y \Rightarrow \rho(x, y)=0$ 是明显的. 反之, 若

$$\rho(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j| = 0,$$

则对每一 j , 有

$$0 \leq |\xi_j - \eta_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j| = 0,$$

从而 $\xi_j = \eta_j$ ($j=1, 2, \dots$) $\Rightarrow x=y$.

$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ 显然成立.

对任意 $z = (\zeta_j) \in X$, 有

$$\begin{aligned} |\xi_j - \eta_j| &= |(\xi_j - \zeta_j) + (\zeta_j - \eta_j)| \leq |\xi_j - \zeta_j| + |\zeta_j - \eta_j| \\ &\leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \zeta_j| + \sup_{j \in \mathbb{N}} |\zeta_j - \eta_j|, \quad j=1, 2, \dots \end{aligned}$$

依上确界的定义, 由上式有

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \zeta_j| + \sup_{j \in \mathbb{N}} |\zeta_j - \eta_j|,$$

即

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

所以 l^∞ 是度量空间.

例7 设 E 是勒贝格可测集, $m(E) < \infty$. 设 S 是 E 上实值(或复值)可测函数全体, 当 $f(t), g(t)$ 在 E 上几乎处处相等时, 把 f 和 g 看做 S 中的同一点, 且对于 $f, g \in S$, 定义

$$\rho(f, g) = \int_E \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dt,$$

证明: (1) $\rho(x, y)$ 是 S 上的一个度量;

(2) 在 S 中, $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ 的充要条件是 f_n 依测度收敛于 f .

证 (1) 因为 $f(t), g(t)$ 是可测函数, 当 $f(t), g(t)$ 在 E 上几乎处处相等时, 可以把 f, g 看做 S 中的同一点, 所以

$\frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|}$ 是有界可测函数. 因为 $m(E) < \infty$, 所以 $\rho(f, g)$ 有

确定的意义,仿照例6可以证明, $\rho(f, g)$ 满足度量的三个条件.

(2) 设 f_n 依测度收敛于 f , 则对于任何 $\sigma > 0$, 有

$$E\left(\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} > \sigma\right) \subset E(|f_n - f| > \sigma),$$

所以 $m\left(E\left(\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} > \sigma\right)\right) \leq m(E(|f_n - f| > \sigma)) \rightarrow 0$,

即 $\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}$ 依测度收敛于零, 因为 $\frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \leq 1$ 和 $m(E) < \infty$, 则由实变函数中有界控制收敛定理知, $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

反之, 若 $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 则当 $\sigma > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \rho(f_n, f) &\geq \int_{E(|f_n - f| \geq \sigma)} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} dt \\ &\geq \frac{\sigma}{1 + \sigma} m(E(|f_n - f| \geq \sigma)). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 即知 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f .

例8 判断在所有实数组成的集合上, 下列 $\rho(x, y)$ 是否为度量:

$$(1) \rho(x, y) = (x - y)^2; \quad (2) \rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}.$$

解 (1) 不是度量. 不满足三角不等式, 如 $x = 1, z = 0, y = -1$ 时, 有

$$\rho(1, -1) > \rho(1, 0) + \rho(0, -1).$$

(2) 是度量. 非负性与对称性显然满足, 而

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \leq (|x - z|^{1/2} + |z - y|^{1/2})^2,$$

所以

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

例9 设 ρ 是 X 上的度量, x, y, z, t 是 X 中任意四点, 证明:

$$|\rho(x, z) - \rho(y, t)| \leq \rho(x, y) + \rho(z, t).$$

证 由三角不等式可得

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, t) + \rho(t, z),$$

故

$$\rho(x, z) - \rho(y, t) \leq \rho(x, y) + \rho(z, t). \quad (1)$$

在上式中, 互换 x 与 y, z 与 t 可得