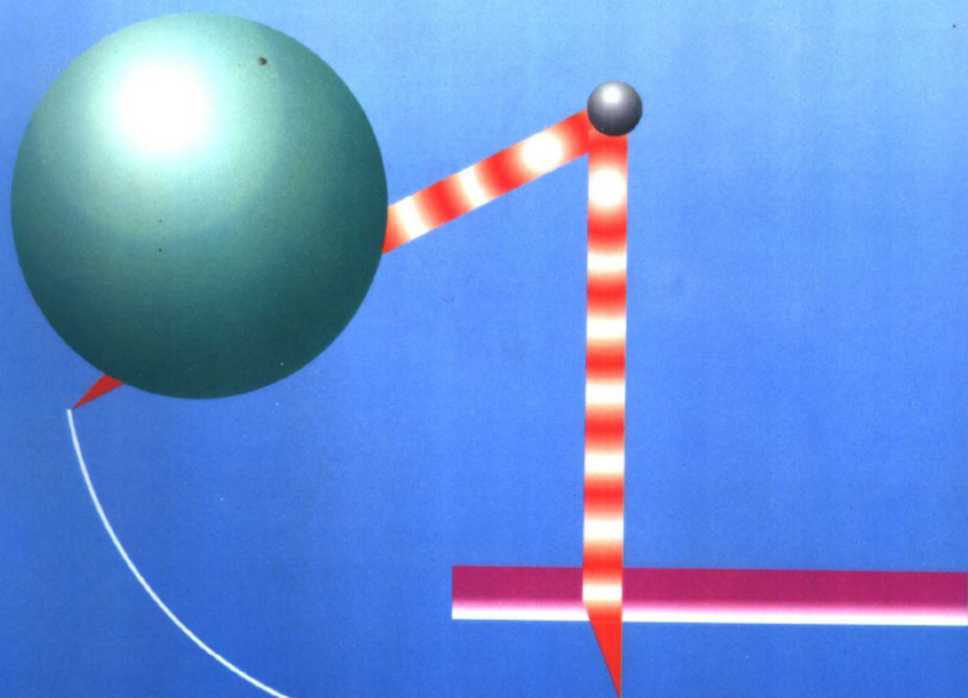
海淀名师导学助考丛书

九年义务教育

最新中考知识精要与强化训练

初中数学

北京市海淀区高级教师编写组　编



北京理工大学出版社

九年义务教育

最新中考知识精要与强化训练

初中数学

北京市海淀区高级教师编写组　编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书全面系统地帮助中学生学习、复习代数、几何知识。[重点·难点·考点]对教学大纲中要求学生掌握的知识和能力考查点进行了提炼概括；[典型题解]围绕基本概念的融汇贯通一步步展开；[强化训练]提供了灵活运用这些知识的机会。综合测试部分编入了综合试题及参考答案。

本书对广大中学生、中学生家长、中学教师及具有中等文化水平的自学读者具有重要的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

九年义务教育最新中考知识精要与强化训练：初中数学/北京市海淀区高级教师编写组编. 一北京：北京理工大学出版社，1998. 10

ISBN 7-81045-484-6

Ⅰ.九… Ⅱ.北… Ⅲ.数学课-初中-升学参考资料 Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 18945 号

责任印制：[illegible]京凤　责任校对：陈玉梅

北京理工大学出版社出版发行

（北京市海淀区白石桥路 7 号）

邮政编码 100081　电话（010）68912824

各地新华书店经售

北京房山先锋印刷厂印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　9.5 印张　227 千字

1998 年 10 月第 1 版　1998 年 10 月第 1 次印刷

印数：1—8000 册　定价：12.40 元

前　言

最新中考知识精要与强化训练丛书，是以九年义务教育初中各科教学大纲为依据，以人民教育出版社出版的九年义务教育三年制初级中学教科书为基础编写的。全套书有语文、英语、数学、物理、化学等五分册。

各分册均把初中各学科的基础知识科学地归纳梳理，使之系统化、条理化。[重点·难点·考点]对各章节知识的重点、难点和能力考查点进行简明扼要的说明和分析；[典型题解]通过剖析典型例题，使学生灵活运用所学的知识，掌握解题的思路和技巧，对学习、应考中容易出现的差错，作了必要的提示；[强化训练]编选了适量的习题（附参考答案），这些习题典型性、针对性极强，可供学生有效地检查、巩固所学知识，训练学生活用知识的能力。为了更好地满足广大读者的需要，书中的“综合测试”部分精选综合训练的试题（附参考答案），这些试题题型多样，其知识覆盖面广、针对性强，特别适合初三学生全面复习各科知识，准备中考之用，也可供中学教师参考。

限于水平和经验，对于本书的不足之处，欢迎广大读者给予批评指正。

编　者

目　　录

第一部分　代数

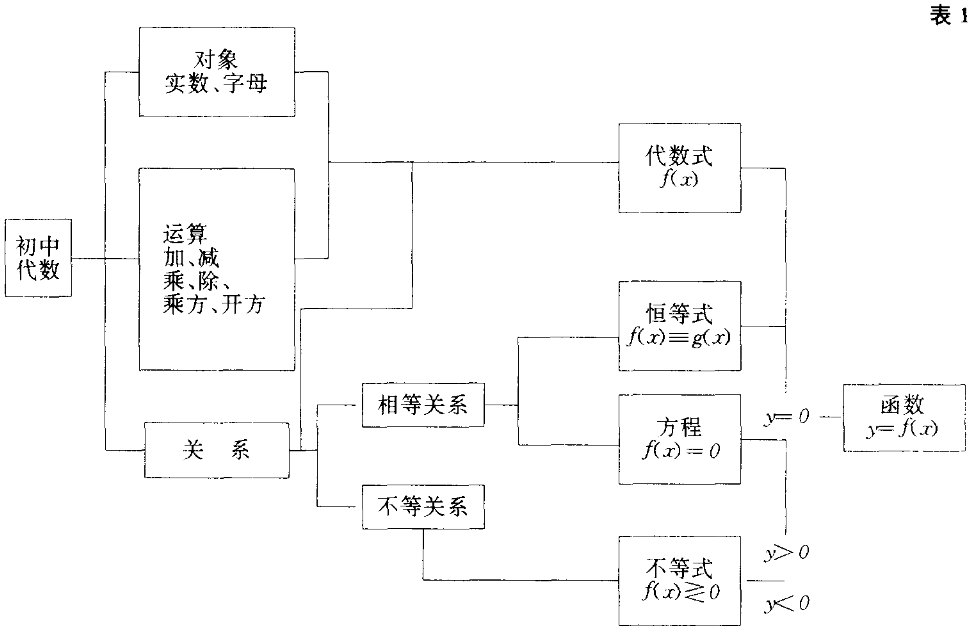
第二部分　平面几何

第三部分　综合测试

第一部分　代　数

初中代数所研究的对象是由全体实数和表示实数的字母组成；主要研究被研究对象之间的运算，如加、减、乘（包括乘方）、除、开方等等；还要研究对象间的关系，一般有相等关系和不等关系．初中代数的基本结构可用表 1-1 所列结构框图表示．

表 1-1



从结构框图可以看出，初中代数可以分为四部分：一、数与式；二、方程（组）与不等式（组）；三、函数及其图象；四、统计初步。而学习代数式、方程、一元一次不等式是学习函数的基础．直角坐标系的建立不仅使数形更紧密地结合，还使变数进入数学，运动进入数学，辩证法进入数学．可以用函数观点重新认识数、式、方程与不等式，把它们统一到函数概念之中．

一、数　与　式

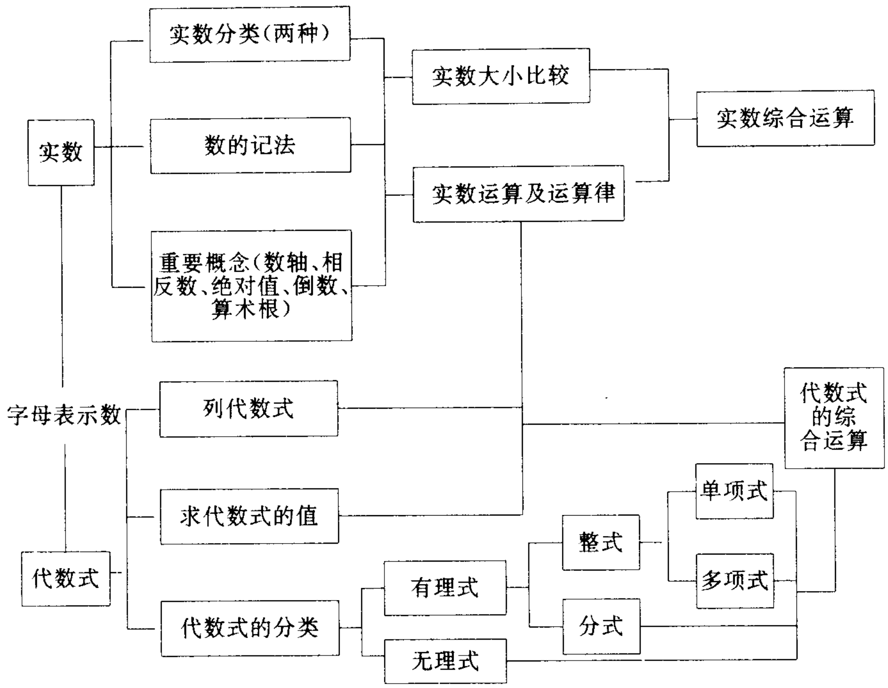
实数与代数式的运算是初中代数的基础．

本章知识结构框图如表 1-2 所列．

本章的重点是实数的有关重要概念、实数运算及运算律、整式的因式分解、整式、分式、根式的运算等．

本章的难点是绝对值、算术根的概念、用字母表示数以及实数、代数式的综合运算．

表 1-2



本章是初一、初二学习的重点内容,在中考中占较大比重,从北京近几年中考来看,考查实数与代数式内容的题目一般占中考试卷的 20%~24%,重点考查相反数、倒数、绝对值、算术根等概念及整式的因式分解,整式、分式、根式的运算等.另外在考查其它类型的题目(如解方程)时也要用到数、式的基本内容(如因式分解).

(一)实数

[重点·难点·考点]

1. 实数的有关概念

(1) 实数的分类:

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数

- 实数
  - 正实数
    - 正有理数
      - 正整数
      - 正分数
    - 正无理数
  - 零
  - 负实数
    - 负有理数
      - 负整数
      - 负分数
    - 负无理数

实数一般按照上述两种方法分类，但具体问题应具体分析.

(2) 数轴：规定了原点，正方向和单位长度的直线叫做数轴.

数轴上所有点与全体实数是一一对应的.

(3) 相反数：实数 a 和 $-a$ 互为相反数；零的相反数仍旧是零. 若实数 a 和 b 互为相反数，则有 $a+b=0$.

(4) 绝对值：一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零.

一个数的绝对值的几何意义是在数轴上表示与它所对应的点到原点的距离.

(5) 倒数：1 除以一个数的商，叫做这个数的倒数；零没有倒数.

(6) 实数比较大小：在数轴上表示的两个实数，右边的总比左边的大.

正数都大于零；负数都小于零；正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小.

2. 实数的运算

(1) 实数的运算：(略)

(2) 运算定律：

①加法交换律 $a+b=b+a$　　②加法结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$

③乘法交换律 $ab=ba$　　④乘法结合律 $(ab)c=a(bc)$

⑤分配律 $a(b+c)=ab+ac$　　$(a+b)\div c=a\div c+b\div c$

(3) 运算顺序：

①按照第三级运算(乘方、开方)，第二级运算(乘、除)，第一级运算(加、减)的顺序进行运算.

②有括号时，按照小括号，中括号，大括号的顺序进行运算.

[典型题解]

1. 选择题：(四选一)

已知下列运算：(1) $\frac{1}{2}$的相反数是 2；(2) $-2^{-2}=\frac{1}{4}$；(3) $\sqrt{9}$ 的平方根为 $\pm\sqrt{3}$；(4) $(0.5)^{1997}\cdot 2^{1998}=2$，其中错误的运算个数有(　　).

(A)1 个　(B)2 个　(C)3 个　(D)4 个

解：∵ $\frac{1}{2}$的相反数是$-\frac{1}{2}$，∴(1)错.　∵ $-2^{-2}=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$，∴(2)错.

∵ $\sqrt{9}=3$，3 的平方根为 $\pm\sqrt{3}$，∴(C)对.

∵ $(0.5)^{1997}\cdot 2^{1998}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1997}\cdot 2^{1997+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1997}\cdot 2^{1997}\cdot 2=\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^{1997}\times 2=2.$

∴ (D)对.　故选 B.

说明：此例主要考查有关概念和运算法则.

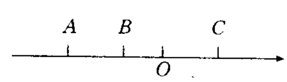


图1-1

2. 如图 1-1 所示，O 为原点，实数 a、b、c 在数轴上分别用点 A、B、C 表示，化简 $|b|-|a-c|+|a+b|-2|b|$.

解：由图 1-1 可知 $a<0$，$b<0$，$c>0$.

∴ $a-c<0$，$a+b<0$.

∴ $|b|-|a-c|+|a+b|-2|b|=-b-[-(a-c)]+[-(a+b)]-2(-b)$

$=-b+a-c-a-b+2b=-c.$

说明:此例主要利用数形结合思想,由点在数轴上的位置,判断它对应实数的正负,再根据绝对值的概念逐一化简.

3. 计算:$1\frac{2}{3}-\left\{5\frac{3}{4}-2^2\div\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(-\frac{3}{4}\right)\right]\times\frac{1}{8}\right\}$.

错解:原式$=1\frac{2}{3}-\left\{5\frac{3}{4}+4\div\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right)\times\frac{1}{8}\right\}=1\frac{2}{3}-\left\{5\frac{3}{4}+4\div(-2)\times\frac{1}{8}\right\}$

$=1\frac{2}{3}-\left\{5\frac{3}{4}-16\right\}=1\frac{2}{3}-10\frac{1}{4}=-8\frac{7}{12}$.

辨析:此例误把-2^2按照$(-2)^2=4$计算;在计算$4\div(-2)\times\frac{1}{8}$时,没有注意运算顺序,先做$(-2)\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}$,再做$4\div\left(-\frac{1}{4}\right)=-16$;大括号前是“$-$”号,在去括号时忘记变号.这三类错误是平时学生最易犯的错误,应引起注意.

正解:原式$=1\frac{2}{3}-\left[5\frac{3}{4}-4\div\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right)\times\frac{1}{8}\right]$

$=1\frac{2}{3}-\left[5\frac{3}{4}-4\div(-2)\times\frac{1}{8}\right]=1\frac{2}{3}-\left[5\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right]=1\frac{2}{3}-6=-4\frac{1}{3}$.

[强化训练]

1. 填空:

(1) 0的相反数是______,3.14$-\pi$的绝对值是______,$\sqrt{3}-2$的倒数是______;

(2)若$x<-2$,则$|3-x|-|2x+1|+|x+2|=$______;

(3) 比较大小:$-\sqrt{3}$ ______ -1.7,$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ______ $2+\sqrt{3}$.

2. 计算:$(-3)^2(-2)^3\div4\div2+\sqrt{(-2)^6}\div(-4)\times2$.

3. 化简:$|3a+1|+|2a-1|$.

〈参考答案〉

1. (1) 0,$\pi-3.14$,$-(\sqrt{3}+2)$;(2) 2;(3) $<$,$<$.　2. -13.

3. 当$a<-\frac{1}{3}$时,原式$=-5a$;当$-\frac{1}{3}\leqslant a<\frac{1}{2}$时,原式$=a+2$;当$a\geqslant\frac{1}{2}$时,原式$=5a$.

(二) 整式

[重点・难点・考点]

1. 代数式的有关概念

(1) 代数式:用运算(加、减、乘、除、乘方、开方)符号把数或表示数的字母连结而成的式子,叫做代数式.用数代替代数式里的字母,计算后所得的结果,叫做代数式的值.

(2) 有理式:只含有加、减、乘、除、乘方运算(包含数字开方运算)的代数式,叫做有理式.

(3) 无理式:含有关于字母开方运算的代数式,叫做无理式.

(4) 整式:除式中不含有字母的有理式叫做整式.

2. 整式的运算

(1) 幂的运算法则:(m,n都是正整数)

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　$(a^m)^n=a^{mn}$

$(ab)^n=a^nb^n$　　$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq0,m>n)$

(2) 乘法公式:

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　　$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

(3) 整式的加减：(略)

(4) 整式的乘除：(略)

3. 因式分解

(1) 因式分解定义：把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解.

分解因式要注意在什么数的范围内进行，一般若题目没有写要求，专指在有理数范围内分解.

因式分解要分解到每个因式都不能再分为止，若有重因式，写成幂的形式.

多项式所分成的因式必须是整式.

(2) 因式分解的方法：

①提取公因式法：$ma+mb+mc=m(a+b+c)$

②应用乘法公式法：(略)

③二次三项式的因式分解：一般用十字相乘法、配方法、利用求根公式分解因式.

④分组分解法：分组以后提出各组的公因式或应用乘法公式进行分解.

[**典型题解**]

1. 已知 $A=x^3-2x^2+x-4$，$B=2x^3-5x-4$，求 $A-2B$.

解：$A-2B=(x^3-2x^2+x-4)-2(2x^3-5x-4)$

$=x^3-2x^2+x-4-4x^3+10x+8=-3x^2-2x^2+11x+4.$

说明：括号前是负数，在去括号时不要忘记变号.

2. 计算 $(x+y-z)(x-y-z)-(x-y-z)^2$.

解 1：原式 $=(x-z)^2-y^2-[(x-z)^2-2y(x-z)+y^2]$

$=(x-z)^2-y^2-(x-z)^2+2y(x-z)-y^2=-2y^2+2y(x-z)$

$=2xy-2yz-2y^2$.

解 2：原式 $=(x-y-z)[(x+y-z)-(x-y-z)]=(x-y-z)2y=2xy-2yz-2y^2$.

说明：解 1 是把 $x-z$ 视为一个整体，利用乘法公式进行计算，这实质是利用“换元”思想；解 2 是利用提取公因式达到化简的目的.

3. 分解因式 $a(x-y)+(ay-ax)y$.

解：原式 $=a(x-y)-a(x-y)y=a(x-y)(1-y)$.

说明：在提取公因式前，需调整正负符号；当多项式中的某一项被当做公因式提出时，提出后这项的位置上是 1.

4. 分解因式 $1-x^2-2xy-y^2$.

解：原式 $=1-(x^2+2xy+y^2)=1-(x+y)^2=(1+x+y)(1-x-y)$.

说明：对于多于三项的多项式，一般应考虑使用分组分解法进行，要抓住题目的特点进行分组，关键使所分各组之间有公因式可以提出或能应用乘法公式进行分解. 在添、去括号时注意符号的变化.

5. 已知多项式 x^3-kx+6 有一个因式是 $x+3$，当 k 为何值时，能分解成三个一次因式的积？并将它分解出来.

解：设 $x^3-kx+6=(x+3)(x+a)(x+b)$.

∴ $x^3-kx+6\equiv x^3+(a+b+3)x^2+(3a+3b+ab)x+3ab.$

$\therefore \begin{cases} a+b+3=0, \\ -k=3a+3b+ab, \\ 6=3ab. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=7, \\ a=-1, \\ b=-2; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k=7, \\ a=-2, \\ b=-1. \end{cases}$

$\therefore$ 当 $k=7$ 时，多项式 x^3-kx+6 能分解成三个一次因式的积，分解成 $(x+3)(x-2)(x-1)$.

说明：此例先假定一个含有待定的系数的恒等式，根据"多项式相等，必须对应项的系数相等"，再列出方程组，并解这个方程组，可以求得待定的系数值，这就是待定系数法.

6. 在实数范围内把下列各式分解因式：

(1) $x^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{6}$；

(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-8x+16\sqrt{2}$.

解：(1) $x^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{6}$

$=x^2+(-\sqrt{3}+\sqrt{2})x-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})$；

(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-8x+16\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2-8\sqrt{2}x+32)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}[x^2-2\cdot 4\sqrt{2}x+(4\sqrt{2})^2]=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-4\sqrt{2})^2$.

说明：一般分解因式是在有理数范围内分解因式，此例是要求在实数范围内分解因式. 第(1)题是用"十字相乘"的方法，第(2)题先提取公因式，再用"乘法公式"进行分解.

[**强化训练**]

1. 填空：

(1) 若 $5m^{3x-1}$ 和 $7m^{x+3}$ 是同类项，则 $x=$______；

(2) 计算 $(-3a^2)\left(5a^2-\frac{4}{9}a\right)=$______；

(3) 计算 $(-x^3)^3x^6\div(-x)^5=$______；

(4) 计算 $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=$______；

(5) 计算 $(-2m^n\cdot n^{m+1})\left(\frac{1}{2}n^m\cdot m^{n+1}\right)^3=$______；

(6) 计算 $(x-y-3)(x-y+4)=$______.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $-15x^3y^2+5x^2y^2-20x^2y^3$；　　(2) $m(a-2)+n(2-a)+(a-2)$；

(3) $(x^2+3x)^2-(2x+6)^2$；　　(4) x^3-x^2-2x；

(5) $4a^2-b^2+2b-1$；　　(6) x^2-4y^2+x+2y；

(7) $-x^2y+6xy-9y$；　　(8) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)-(x^3+1)^2$.

3. 已知 $x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$，求 x^2-xy+y^2.

4. 用竖式除法计算 $(3a^2+2a^5-a+1)\div(a^2-a+1)$.

5. 已知 $2x^4+2x^3+3x^2+ax+b$ 能被 x^2+2x+3 整除，求商式及 a、b.

6. 在实数范围内把下列各式分解因式：

(1) x^2-3；　　(2) $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$；

(3)$mx^2-2(m+1)x+m+2 \qquad (m\neq 0)$

〈参考答案〉

1. (1)2； (2)$-15a^4+\frac{4}{3}a^3$； (3)x^{10}； (4)7； (5)$-\frac{1}{4}m^{4n+3}n^{4m+1}$； (6)$x^2-2xy+y^2+x-y-12$.

2. (1)$-5x^2y^2(3x-1+4y)$； (2)$(a-2)(m-n+1)$； (3)$(x+3)^2(x+2)(x-2)$； (4)$x(x-2)(x+1)$； (5)$(2a+b-1)(2a-b+1)$； (6)$(x+2y)(x-2y+1)$； (7)$-y(x-3)^2$； (8)$-2(x+1)(x^2-x+1)$.

3. 13.

4. $2a^3+2a^2+1$(过程略).

5. 商式$=2x^2-2x+1$，$a=-4$，$b=3$.

6. (1) $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$； (2) $(x-1)(x-\sqrt{2})$； (3) $(x-1)(mx-m-2)$.

(三)分式

[重点·难点·考点]

1. 分式的定义　除式中含有字母的有理式，叫做分式.只有当分母不等于零时，分式才有意义.

2. 分式的基本性质　分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不等于零的代数式，分式的值不变.

分子、分母和分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变.

3. 分式的运算

(1) 分式的加减法　(2) 分式的乘除法(繁分式的化简)　(3)分式的乘方

注意分数线的两重作用：除法作用；括号作用.

[典型题解]

1. 当 x 取何值时，分式$\frac{|x|-5}{x-5}$的值是零.

解：根据题意，得　$\therefore \begin{cases}|x|-5=0,\\ x-5\neq 0.\end{cases}$

解得　$\begin{cases}x=\pm 5,\\ x\neq 5.\end{cases}$　$\therefore$　当 $x=-5$ 时，分式$\frac{|x|-5}{x-5}$的值是零.

说明：分式要注意分母不等于零的隐含条件.

2. 先化简，再求值$\frac{1+x}{x^2+x-2}\div\left(x-2+\frac{3}{x+2}\right)$，其中 $x=\frac{1}{2}$.

解：原式$=\frac{x+1}{(x+2)(x-1)}\div\frac{(x-2)(x+2)+3}{x+2}$

$$=\frac{x+1}{(x+2)(x-1)}\cdot\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{(x-1)^2}.$$

当 $x=\frac{1}{2}$时，原式$=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=4$.

说明：在整式与分式相加时，一般把整式视为整体，分母为1，先通分，变为同分母的分式，然后再加减；分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘；分式的约分，要把分式的分子、分母都化成因式的积的形式，才能进行.

3. 计算：$\frac{2x+6}{x^2-4x+4}\div(x+3)\cdot\frac{x^2+x-6}{x+3}$.

错解：原式$=\frac{2(x+3)}{(x-2)^2}\div(x^2+x-6)$

$=\frac{2(x+3)}{(x-2)^2}\cdot\frac{1}{(x+3)(x-2)}=\frac{2}{(x-2)^3}$.

辨析：乘、除属于同级运算，在本题中，应先"除"后"乘"，而不能先算后面的乘法.

正解：原式$=\frac{2(x+3)(x+3)(x-2)}{(x-2)^2(x+3)(x+3)}=\frac{2}{x-2}$.

4. 已知：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$，求：$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$的值.

解：∵ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$，$a\neq0$，$b\neq0$，$a+b\neq0$.

∴ $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$　　∴ $(a+b)^2=ab$　　且 $ab\neq0$.

∴ 原式$=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{ab-2ab}{ab}=\frac{-ab}{ab}=-1$.

说明：求分式值的关键是把分子、分母中含有 a、b 的因式约去，而结论中分母是"ab"，显然应把条件同解变形出"$ab=$某代数式"的形式，把结论恒等变形出"某代数式"，再整体代入达到化简消元目的. 此例是把同解变形与恒等变形有机地结合在一起，在恒等变形时使用了配方法，注意 $ab\neq0$，$a+b\neq0$ 是保证同解变形，恒等变形必不可少的条件.

5. 先化简，再求值$\frac{x}{(x-y)^2}\cdot\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}+\left(\frac{2x+2}{x-y}-2\right)$.

其中 x、y 满足方程组$\begin{cases}x+2y=3,\\x-y=-2.\end{cases}$

解：原式$=\frac{x}{x-y}+\frac{2y+2}{x-y}$

$=\frac{x+2y+2}{x-y}$；

当 $x+2y=3$，$x-y=-2$ 时，原式$=\frac{3+2}{-2}=-\frac{5}{2}$.

另解：同理得，原式$=\frac{x+2y+2}{x-y}$.

由 $x+2y=3$，$x-y=-2$　得　$x=-\frac{1}{3}$，$y=\frac{5}{3}$.

∴ 原式$=-\frac{5}{2}$.

说明：此例给出两种解法. 一种是利用方程的消元功能整体代入达到消元求值目的；一种是先求出方程组的解，再代入化简以后的代数式中，求代数式的值，可通过此例加强学生解题的优化意识和对方程消元、降次、换元功能的认识.

6. 已知：$\frac{8}{x^2-16}\equiv\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-4}$，求 A、B.

解：$\frac{8}{x^2-16}\equiv\frac{(A+B)x+4(B-A)}{(x+4)(x-4)}$.　　∴ 当 $x\neq4$，$x\neq-4$ 时

$8\equiv(A+B)x+4(B-A)$.　　∴ $\begin{cases}A+B=0,\\4(B-A)=8\end{cases}$

解得　$A=-1$，$B=+1$.

∴ 当 $A=-1, B=+1$ 时，$\frac{8}{x^2-16} \equiv \frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-4}$成立.

说明：此例利用待定系数法求 A、B.

［强化训练］

1. 填空：

(1) 当 $x=$______时，分式$\frac{|x|-2}{x^2+x-6}$的值为零；

(2) 当 $x=$______时，分式$\frac{x-3}{x^2-9}$有意义；

(3) 当 $x=$______时，分式$\frac{2+x}{2-\frac{6}{2x+3}}$无意义.

2. 选择题：(每题有且仅有一个答案正确)

(1) 如果分式$\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$的值为零，那么 x 的值是(　　)；

(A) 1 或 3　　(B) 1　　(C) 3　　(D) -3

(2)将$\frac{a+b}{a-b}+\frac{2b+1}{b-a}$化简，正确结果是(　　).

(A) $\frac{a+3b+1}{a-b}$　　(B) $\frac{1}{a-b}$　　(C) $\frac{a-b-1}{a-b}$　　(D) $\frac{a-b+1}{a-b}$

3. 化简：

(1) $\frac{-14x^3y}{2xy^2}$；　(2) $\frac{(3x^3)^3}{x^6}$；　(3) $\frac{x^2+7xy}{xy+7y^2}$；　(4) $\frac{x^2+x+1}{1-x^3}$.

4. 计算：$\frac{x^3}{x-1}-x^2-x-1$.

5. 计算：$\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}\left(\frac{x^2+y^2}{y}-x\right)$.

6. 计算：$\frac{2a+3b}{a+b}-\frac{a-b}{a+2b}\div\frac{a^2-b^2}{a^2+4ab+4b^2}$.

7. 计算：$\frac{2-x}{x^2-9}\cdot\left(1+\frac{2x-7}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{1}{x+3}$.

8. 计算：$\frac{x}{x-3}+\frac{6x^2+9x}{2x^2-3x-9}\cdot\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{3x-x^2}$　$(x>3)$.

9. 先化简，再求值：$\frac{3x-1}{x^2-2x}\cdot\frac{x-2}{9x^2-6x+1}+\frac{1}{x}$，其中 $x=-2$.

10. 已知：$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=7$，求$\frac{2x+24xy-2y}{y-2xy-x}$的值.

11. 已知：$\frac{20-x}{x^2-5x-6}\equiv\frac{A}{x-6}+\frac{B}{x+1}$，求 A、B.

〈参考答案〉

1. (1)-2；(2)$x\neq\pm3$ 的一切实数；(3)$-\frac{3}{2}$或 0.　2. (1)C；(2)C.

3. (1)$-\frac{7x^2}{y}$；(2)$27x^3$；(3)$\frac{x}{y}$；(4)$\frac{1}{1-x}$.　4. $\frac{1}{x-1}$.　5. $\frac{x-y}{y}$.　6. 1.　7. $\frac{x+1}{2-x}$.

8. 1.　9. $-\frac{3}{7}$　10. 2.　11. $A=2, B=-3$.

(四)根式

[重点·难点·考点]

1. 有关概念

(1) 平方根与算术平方根:如果 $x^2=a$,那么 x 就叫做 a 的二次方根(或平方根).正数 a 的平方根有两个,它们互为相反数;零的平方根是零;负数没有平方根.正数 a 的正的平方根,也叫做 a 的算术平方根(简称算术根).零的算术根是零.

(2) 二次根式:一般地,式子 $\sqrt{a}\ (a\geqslant 0)$ 叫做二次根式.

根式,无理式是有关联而不完全相同的两个概念,根式强调表示方根的代数式,无理式强调根号下含有字母. $\sqrt{x^2+1}$ 即是根式,又是无理式; $\sqrt{2}$ 是根式,而不是无理式; $x+\sqrt{x^2+1}$ 是无理式,而不是根式.

(3)二次根式的性质:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}\qquad \sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad (a\geqslant 0,b>0)$$

(4) 最简二次根式:满足以下两条的二次根式称为最简二次根式.

①被开方数的因数是整数,因式是整式;

②被开方数中不含能开得尽方的因数或因式;

(5) 同类二次根式:化成最简二次根式后,被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式.

(6) 分母有理化:把分母中的根号化去叫做分母有理化,分母的一般形式为 $\sqrt{a}$,它的有理化因式是 $\sqrt{a}$;分母的一般形式为 $a\sqrt{x}\pm b\sqrt{y}$,它的有理化因式是 $a\sqrt{x}\mp b\sqrt{y}$.一般采用分子、分母同乘以分母的有理化因式达到分母有理化的目的.

2. 二次根式的运算

(1) 二次根式的加减:二次根式的加减,先把各个根式化成最简二次根式,再合并同类根式.

(2) 二次根式的乘除:二次根式相乘除,把被开方数相乘除,根指数不变.

[典型题解]

1. 选择题:(每题有且仅有一个答案正确)

(1) 已知 $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$,求 x 的取值范围是(　　).

(A)$x>2$　　(B)$x\geqslant 2$　　(C)$x\leqslant 2$　　(D)$x<2$

(2) 化简 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 得(　　).

(A) $\sqrt{a}$　　(B) $\sqrt{-a}$　　(C)$-\sqrt{a}$　　(D)$-\sqrt{-a}$

解:(1)∵ $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$　∴ $2-x\geqslant 0$,∴ $x\leqslant 2$ 故选 C.

(2)∵ $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 有意义,∴ $a<0$　∴ 根号外应为负,根号内应为正.

观察(A)、(B)、(C)、(D)四个答案只有(D)符合此要求,故选(D).

说明：(1) 利用算术根非负这一概念得知 $2-x\geqslant 0$.

(2) 由二次根式隐含被开方式大于等于零，由分式隐含分母不等于零，得知 $a<0$，这是解此例的关键. 另外上述解法没有按常规方法先化简再“对号入座”选择正确答案，而是根据选择题有且仅有一个答案正确的特点，利用二次根号内外的符号来判断选择正确答案.

2. 计算：$3\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{2}-\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}$.

解：原式 $=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}-(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)$

$=2\sqrt{3}-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2=2\sqrt{3}$.

3. 计算：$\left[\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right]\times\frac{1}{\sqrt{6}}$.

解：原式 $=\left[\frac{7-4\sqrt{3}}{4}+\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}\right]\times\frac{1}{\sqrt{6}}$

$=\frac{7-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-4}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{8}$.

4. 计算：$(a+2\sqrt{ab}+b)\div(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{b}-\sqrt{a})$.

解：原式 $=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\div(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{b}-\sqrt{a})$

$=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{b}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$.

说明：在多项根式除以多项根式时，往往采取分解因式、约分的方法，在这里因式分解作为一种工具，不再要求每个因式必须是整式.

5. 已知 $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$，$y=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，求 $\frac{x+y}{x^2+y^2}$ 的值.

解：∵ $x=\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\times 2+2^2}=\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=2-\sqrt{3}$，

$y=\frac{1\times(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$，

∴ $x+y=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$； $xy=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$.

∴ 原式 $=\frac{x+y}{(x+y)^2-2xy}=\frac{4}{4^2-2\times 1}=\frac{2}{7}$.

说明：此例是条件求值问题，条件较复杂，所以必须从化简条件入手，难点是化简 $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 需要把 7 拆成 $(\sqrt{3})^2$，2^2 两项，配方后利用算术根的概念进行化简；此例结论是关于 x、y 的对称式，所以先计算 $x+y$，xy，把结论进行配方用 $x+y$，xy 表示，这样可以简化计算过程.

6. 若 a、b 是非负实数，且 $\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}=ab$.

求证：$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$.

证明：∵ a、b 是非负实数，∴ $ab\geqslant 0$.

把条件两边平方，得 $(1-a^2)(1-b^2)=a^2b^2$.

∴ $a^2+b^2=1$，$a^2=1-b^2$，$b^2=1-a^2$，

∴ $(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})^2=a^2(1-b^2)+2ab\sqrt{1-b^2}\cdot\sqrt{1-a^2}+b^2(1-a^2)$