相对论与非欧几何

●费保俊　著

科学出版社
www.sciencep.com

相对论与非欧几何

费保俊 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书首先介绍微分几何的基础知识和非欧几何的基本定理．然后系统论述狭义相对论与非欧几何的关系，将物理上的间隔不变性与几何上的线元不变性联系起来，并以此为基础严格地推导出狭义相对论动力学和电动力学理论．本书还简述了广义相对论的引力几何化和弯曲时空的非欧几何特性．最后从不变性或对称性的角度，分析了相对论和谐统一的理论结构．

本书注重物理与几何的结合，突出相对论理论体系严密的逻辑性和优美的对称性，可作为高等院校理工科学生和研究生的辅导教材，也可供科研工作者参考．

图书在版编目（CIP）数据

相对论与非欧几何/费保俊著．—北京：科学出版社，2005

ISBN 7-03-014485-6

Ⅰ．相…　Ⅱ．费…　Ⅲ．①狭义相对论②非欧几何　Ⅳ．①O412.1②O184

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 116155 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：张怡君
责任印制：钱玉芬／封面设计：王　浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2005 年 5 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2005 年 5 月第一次印刷　印张：11
印数：1—2 000　字数：197 000

定价：25.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

序

值此狭义相对论诞生100周年之际，我高兴地看到费保俊教授的专著得以问世，实在是可喜可贺．我认为该书是大学物理教学的一本很好的参考书，虽然篇幅不大，却很有特点．

该书将相对论与几何学的密切联系阐明得比较透彻和系统．既叙述了牛顿的绝对时空观与欧氏几何的关系，又介绍了狭义相对论时空与伪欧几何（闵氏几何）的关系，并明确提出了狭义相对论的速度空间与非欧几何之一——双曲几何的联系．虽然后一种观点早就有人（例如朗道）提到过，但并没有进行过系统的证明和论述，该书正好弥补了这一方面的缺陷．

实际上，相对论与几何学的血肉关系是先天具有的，正因为如此，爱因斯坦认为“几何学显然是一门自然科学”．这体现在，一旦我们证实真实的物理空间与某一个自洽的几何空间是统一的，则几何规律就表现为物理定律．广义（狭义）相对性原理认为，一切参考系（惯性系）中物理规律应保持形式不变，实际上是强调了物理规律的绝对性或不变性．

该书没有对广义相对论展开讨论，但对广义相对论与黎曼几何的结合，也就是引力几何化的问题介绍得比较简单明了．一般教科书强调4维时空与4维伪黎曼几何的关系，本书可能是为了突出相对论与非欧几何关系的主题，主要分析了三个时轴正交时空——爱因斯坦转盘、Schwarzschild时空和Robertson-Walker时空的纯空间度规与3维非欧几何的关系，可以引导读者对广义相对论有个比较清楚的轮廓．事实上，时轴正交系对于广义相对论具有很重要的意义，只有在此坐标系下，同时性才具有传递性，才能描述时间过程．但是广义相对论也允许非时轴正交系的存在，如果不能将其化成正交系，则时间和空间不能截然分离开，这种情况下我们只能从4维黎曼几何的角度来讨论时空的弯曲性质．

该书最后一章从不变性的角度探讨了相对论的理论结构，进一步论证了在引力理论和经典场论中相对性原理或不变性原理的重要性．这些内容对于认识相对论的本性，认识相对论优美和谐的理论结构是有帮助的．

愿此书能为有志于攀登科学高峰的勇士们助一臂之力！

刘辽

2005年元月

引　言

一

当代几何学大师陈省身先生对物理学与几何学的关系有过精辟的论述：

> “微分几何和理论物理都用微积分作工具，一者研究几何现象，一者研究物理现象，后者自然更广泛些．但任何物理现象都在空间发生，所以前者又是后者的基础．两者都用推理的方法，但理论物理还须有实验来支持．几何不受这个限制，因此选择问题比较自由，但推理要有数学的严格性，这个自由度把数学推到新的领域．有数学经验和远见的人，能在大海航行下达到重要的新的领域．例如，广义相对论所需要的黎曼几何和规范场论所需要的纤维空间内的联络，都在物理应用前为数学家所发展．这个‘殊途同归’的现象真令人有神秘之感．”

我们将这段话的意思展开，归纳为以下几个方面：

第一，关于物理学和几何学的研究对象．几何学研究的是物体或空间的存在形式与坐标系的选择无关的性质．描述这种性质的与坐标系无关的量叫做几何量，由几何量表示的物体或空间形式的性质称作内蕴性质．例如，要确定空间一个点的位置就必须建立坐标系，在不同的坐标系中点的坐标不相同，但空间任意相邻两点的距离（线元）与坐标系无关，所以线元就是几何量，仅由线元就能表示的几何性质就是内蕴性质．

物理学研究的是自然界与人们的主观愿望无关的客观规律，是与观测者的运动状态（参考系）无关的客观存在．这种与参考系无关的物理量称作不变量，由不变量对客观世界的描述就是物理定律，它们的分量式在不同的参考系中具有相同的形式．例如对于不同的观测者，他们观测到某一事件发生的时间和空间位置不相同，但任意两事件的时空间隔是相同的，这个时空间隔就是不变量．物理学中的不变量是以几何学中的几何量为基础的，例如狭义相对论中的时空间隔就是 4 维伪欧几何的线元，广义相对论中的时空间隔就是伪 Riemann 几何的线元．因此物理规律就不可避免地和几何规律联系起来．另外，就研究内容来说，物理事件总是发生在一定的时间和空间，时空构成物理现象的背景或者说舞台，因此几何学研究的空间性质是物理学赖以生存的基础．

第二，关于物理学和几何学的理论结构．我国几何学家傅种孙先生将几何学概括为一句话："几何者——纯乎论理之演绎推测式也"．从几何基础的角度来看，几何学是建立在五条公理基础上的逻辑体系．这五条公理是关联(接合)、顺序、合同(运动)、连续和平行公理，前四条公理可以认为是不言而喻的，但第五条公理则纯粹是一种假设．欧氏几何和非欧几何的前四条公理都相同，不同的是平行公理．欧氏几何的平行公理是说，过已知直线外一点，只能作一条直线与已知直线不相交，而非欧几何中的双曲几何则认为可以作许多条不相交直线，椭圆几何则假定没有一条不相交直线．虽然它们相互矛盾，但各自在自己的公理体系内达到自洽．根据欧氏几何的公理体系，我们可以演绎推理出所有欧氏几何的定理，如三角形内角和以及圆周率等于 π；而根据双曲几何的公理体系，我们推理出三角形内角和小于 π，圆周率大于 π 等等．

物理学也是在几个基本原理或假设的基础上，经过演绎推理建立起来的理论体系，同样具有严密的逻辑性．例如经典力学和电磁学的基本假设分别是 Newton 定律和 Maxwell 方程组，狭义相对论则是建立在 Einstein 的相对性和光速不变性两条基本原理的基础之上．当然，物理学中的推导不是纯粹的数学证明和计算，必须考虑客观实际的可能性和合理性．

第三，关于物理学与几何学的基本原理．几何学的公理被认为是自明的、无法证明也无需实验检验的一种假设或者一种规则．我们不能也不必问它的公理是否正确，只能问公理之间是否自洽，推理是否严密，结论是否合理，这导致研究几何问题的自由性．例如欧氏几何和非欧几何的平行公理是相互矛盾的，但我们不能笼统地说哪一个正确，哪一个错误．我们只能说，如果承认欧氏几何的平行公理，则欧氏几何是正确的，反之亦然．我们还可以说，如果空间是平直的，则欧氏几何是正确的，如果空间是弯曲的，则非欧几何是正确的．至于空间是平直还是弯曲，取决于我们讨论的实际空间的真实性质，与几何本身无关．因为"正确"和"真实"是两个不同的概念！

物理学的基本原理虽然也是一种假设，但要经得起实验的检验．我们不能证明欧氏或非欧几何的平行公理，但我们可以用实验证实真实的空间服从哪一种几何的平行公理，而这是唯一的．例如 Michelson-Morley 实验的零结果表明 Newton 力学中的 Galileo 速度变换是错误的，也就否定了速度空间是欧氏几何空间的假设．于是 Einstein 提出光速不变性假设，这实际上就是假设速度空间是非欧的，经过无数的实验证实这个假设真实地反映了客观实在，我们就可以将此假设提升为"原理"，建立起一套逻辑体系，即狭义相对论．

二

物理学的各个分支几乎都与几何学有着千丝万缕的联系，如统计力学的相空

间、量子力学的 Hilbert 空间以及量子场论的纤维丛理论等等. 所有学科中与几何学关系最密切的应该是相对论,因为相对论研究的是物理学中最基本的时间和空间的观念. 但是如何将真实的时间和空间与数学的几何空间联系起来,却不是一件容易的事情. 对狭义相对论的建立起过重要作用的法国数学家和物理学家 Poincaré 鲜明地指出:

> "命题实际上由两种不同的真理构成:其一是数学的真理,其二是实验的真理. 唯有经验能够告诉我们,某个真实而具体的对象对应于或不对应于某个抽象的定义."

我们知道,经典力学的 3 维空间对应于欧氏几何空间,狭义相对论的 4 维时间和空间连续域对应于 4 维伪欧几何(或 Minkowski 几何)空间,而广义相对论的 4 维时空则是建立在伪 Riemann 几何的基础上. 这种将真实具体的物理空间与抽象的几何空间联系起来的做法实际上是一种"发明"(Einstein),至于该发明是否真实有效,则完全取决于实验的检验.

经典力学将 3 维位形空间等同于欧氏几何空间是有历史原因的,因为经典力学建立过程中只有欧氏几何可供选择,并且从当时的生产力水平来看,这种结合已经足够精确地反映了客观实际. 正如我们现在知道的,经典力学是以绝对时间观念为基础的,而 3 维欧氏几何不包含时间因素. 当 Einstein 提出光速不变性之后,时间和空间构成一个 4 维的、连续的、统一的整体——称作 4 维连续域或连续统. 与之相适应,Minkowski 将 3 维欧氏几何改造成 4 维伪欧几何,与狭义相对论的 4 维时空结合起来. 所以从几何学的观点来看,经典力学到狭义相对论就是 3 维欧氏几何向 4 维伪欧几何的进化.

然而,我们完全可以从速度的角度来讨论上面的问题:经典力学的 3 维速度空间也是欧氏几何空间,而相对论的 3 维速度空间则是非欧几何之一的双曲几何空间,光速不变性的作用就是将速度空间的 Euclid 性改造为非欧性——这个问题一直被物理学界所忽视,虽然在一些文献(例如 Landau 的"经典场论")中有所提及,但没有系统的论述. 在本书中,作者综合前人的成果和自己多年的一些研究体会(它们也曾在国内外的一些学术刊物上发表过),比较系统地阐述了相对论速度与双曲几何的关系,并且证明这种关系等价于相对论时空与伪欧几何的关系. 因此,我们也可以将狭义相对论的几何基础看成是双曲几何,相应地,经典力学到狭义相对论也可以看成是欧氏几何向非欧几何的过渡. 值得一提的是,伪欧几何是专门为相对论时空理论创立的,而双曲几何诞生于相对论建立之前的 19 世纪 30 年代,我们不得不为这种神秘的"殊途同归"感到惊叹!

如果说狭义相对论的进步是将时间和空间融为一体,那么广义相对论则是进

一步将质量(能量)与时空联系在一起,这是一场更加深刻的革命,它不仅对物理学而且对几何学的发展产生了重大的影响. 在深入探讨引力的过程中,Einstein 提出了著名的等效原理,从而导致了广义相对论与 Riemann 几何的结合. 即如果将引力场“融入”到时空之中,则时空就变成弯曲的 Riemann 空间。但是,几何学家只是告诉我们,弯曲空间中如何度量长度和角度以及如何鉴别空间的弯曲程度等等,他们并不关心真实空间是否弯曲和为什么弯曲. 广义相对论不仅证明了存在引力场的时空是弯曲的,并满足 Riemann 几何的定理,而且指明物质(场)的质量(能量)分布导致了时空的弯曲,物质分布的越密集则时空弯曲得越厉害.

由此可见,一旦物理学选择了一种几何,并且经历了实验的检验,则几何学就溶入到物理学中. 这时的几何就不仅仅是一种逻辑体系,而是对客观规律的真实反映. 正如 Einstein 所说,如果几何学接触到客观实在,它就成为物理学的分支,成为一门自然科学!

三

对于初次接触相对论的读者,常常感觉它难以理解. 在很大程度上,这是由于人们习惯于欧氏几何定理并下意识地认定它是唯一正确的. 因此要想真正领会相对论的实质,应该懂一点非欧几何,它们都是严密的逻辑体系同时也是对完美境界的追求. 本书前两章简单介绍了微分几何的基础知识和非欧几何(特别是双曲几何)的基本定理. 虽然主要是为后面几章提供数学准备,但它们自成体系,能够使我们对非欧几何有一个比较完整的认识.

第 3 章扼要叙述了狭义相对论的 4 维时空与伪欧几何的关系,重点讨论相对论的 3 维速度与双曲几何的关系并证明这两种关系是相容的,由此得到时空和速度间隔不变性. 第 4 章应用这两个间隔不变性,由局域惯性系的经典物理定律系统地推导出狭义相对论的动力学和电动力学理论,使得经典物理和相对论统一在一个框架之中. 第 5 章简单介绍了广义相对论的基本知识,主要讨论广义相对论的核心问题——引力几何化和时空弯曲,说明引力导致纯空间是非欧几何空间. 最后一章从不变性或对称性的角度讨论相对论的理论结构,认为相对论的实质是间隔不变性,相对论实际上就是不变性理论. 这一章对于深刻理解相对论的理论实质,对于深入体会相对论与几何学结合的优美结构是有教益的.

我们认为,一个理论体系应该具有严格明确的逻辑性和优美的和谐感,不应该有东拚西凑的感觉. 因此本书在叙述相对论基本内容和推导基本定理时,始终坚持以间隔不变性为主线,坚持采用几何的方法. 无论是相对论运动学还是相对论动力学和电动力学的各个定律,都将它们与间隔不变性联系在一起. 当然,正因为强调逻辑性和统一性,可能叙述的不够全面和细致.

本书之所以强调物理学与几何学的血肉关系，强调相对论与非欧几何的紧密结合，是因为我们坚信它们都是自然界美的体现，是因为——

> “这是我们的一种信条，相信描述自然界基本规律的方程必定有显著的数学美．这对我们像是一种宗教，奉行这种宗教是很有益的，可以把它看成是我们的许多成功的基础．”(Dirac)

目　　录

引言

第 1 章　微分几何基础 …… 1

1.1　欧氏空间 …… 1

1.2　曲面上的度量 …… 6

1.3　测地线和测地坐标 …… 11

1.4　联络和协变微分 …… 14

1.5　曲面的曲率 …… 18

1.6　非欧空间 …… 23

第 2 章　非欧几何的基本定理 …… 30

2.1　双曲面上的度量 …… 31

2.2　双曲三角形和双曲圆 …… 35

2.3　双曲几何的射影模型 …… 38

2.4　双曲变换和双曲射影变换 …… 42

2.5　椭圆几何的基本定理 …… 46

第 3 章　狭义相对论与非欧几何 …… 50

3.1　狭义相对论的建立 …… 50

3.2　绝对时空与欧氏几何 …… 56

3.3　相对论时空与伪欧几何 …… 60

3.4　相对论速度与双曲几何 …… 68

3.5　Lorentz 变换与双曲变换 …… 73

3.6　双曲几何与伪欧几何的关系 …… 77

3.7　关于光速不变性的讨论 …… 79

第 4 章　狭义相对论的理论体系 …… 84

4.1　从经典物理到相对论 …… 84

4.2　速度间隔不变性与相对论动力学 …… 88

4.3　间隔不变性与相对论 Lagrange 力学 …… 91

4.4　时空间隔不变性与电动力学 …… 97

第 5 章　广义相对论与非欧几何 …… 103

5.1　引力几何化 …… 103

5.2　引力与时空弯曲 …… 109

5.3　球对称静态时空 …… 114

5.4　均匀和各向同性宇宙 …… 121

5.5　相对论在 GPS 中的应用 …… 127

第 6 章 相对论——不变性理论 …… 133
6.1 时空对称变换与时空对称性 …… 133
6.2 Hamilton 原理与 Lagrange 方程 …… 139
6.3 守恒定律与时空对称性 …… 145
6.4 相对论经典场的不变性 …… 149
参考文献 …… 155
索引 …… 157
致谢 …… 163

数学，数学的秩序，是能用来说明现象的多样性的基本原则.

Heisenberg

第1章 微分几何基础

本章首先介绍欧氏空间中的点和曲线的一些基本概念，然后讨论欧氏空间的曲面，也就是2维非欧空间的性质，最后推广到3维非欧空间. 我们认为在很少的篇幅内介绍微分几何的基本内容，这种主要介绍2维情况的做法是一种很好的捷径，其优点是直观而便于理解，并且我们并不追求数学上的严格性.

1.1 欧氏空间

1. Cartesian 坐标及其变换

首先考虑欧氏空间的点. 为了确定欧氏空间一点的位置，需要建立一个坐标系，如图1.1所示的是普遍使用的 Cartesian 坐标系$\{O,x,y,z\}$. 设空间任意一点 P 的坐标为(x,y,z)，则它位置由下面的 Euclid 矢量确定：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x,y,z), \tag{1.1-1}$$

在 Cartesian 坐标系中表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z.$$

我们以后采用两个约定：

(1) 将 x,y,z 分别记作 x^1,x^2,x^3，当 x,y,z 是上下标时就用1,2,3表示，并用拉丁字母表示 $i,j,k,l=1,2,3$，在2维情况取 $m,n,p,q=1,2$，在4维情况采用希腊字母 $\mu,\nu,\sigma,\rho=0,1,2,3$.

(2) 当表达式中有一个上指标和一个下指标相同时，表示该指标对1,2,3求和（在2维情况对1,2求和，在4维情况对0,1,2,3求和），并省略求和号. 注意重复指标本身没有实际意义，可以用任意的字母表示，这叫 **Einstein 求和惯例**.

在此约定下上式记作

$$\boldsymbol{r}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+x^3\boldsymbol{e}_3=\sum_{i=1}^{3}x^i\boldsymbol{e}_i\equiv x^i\boldsymbol{e}_i\equiv x^j\boldsymbol{e}_j, \tag{1.1-2}$$

式中 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$是沿坐标轴的单位矢量，称作（**坐标**）**基矢**. 它也可以表示为矢

径对坐标的偏导数,对式(1.1-1)和(1.1-2)分别微分($\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i=0$)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i=\mathrm{d}x^i\boldsymbol{e}_i,$$

比较两边矢量得到

$$\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}. \tag{1.1-3}$$

Cartesian 坐标系的坐标基矢是**正交归一的**,用下式统一表示为

$$\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k=\delta_{jk}=\begin{cases}1(j=k),\\0(j\neq k),\end{cases} \tag{1.1-4}$$

式中的 δ_{ij} 称作 **Euclid 度规(张量)**,其分量用矩阵表示为

$$\delta_{ij}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}. \tag{1.1-5}$$

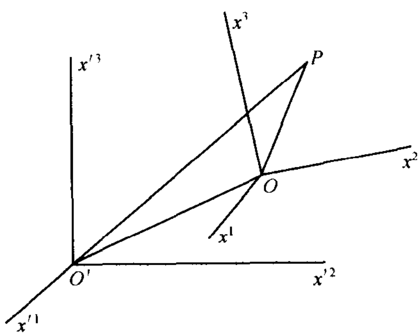

图 1-1　Cartesian 坐标变换

如图 1-1 所示,设有两个坐标系 $S(O,\boldsymbol{e}_j)$和 $S'(O',\boldsymbol{e}'_i)$,空间任意一点 P 在 S 和 S'系中坐标分别为(x^j)和(x'^i),则它的位置矢量为

$$\overrightarrow{OP}=x^j\boldsymbol{e}_j,\quad \overrightarrow{O'P}=x'^i\boldsymbol{e}'_i.$$

令 S 系的原点 O 在 S'中的坐标为(a_0^1,a_0^2,a_0^3),表示坐标原点的平移;S 系的坐标基矢 $\boldsymbol{e}_j$ 在 S'中的分量为(a_j^1,a_j^2,a_j^3),表示坐标轴的空间转动. 即

$$\overrightarrow{O'O}=a_0^i\boldsymbol{e}'_i,\quad \boldsymbol{e}_j=a_j^i\boldsymbol{e}'_i.$$

由矢量关系$\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OP}$和上面的关系式得到

$$x'^i\boldsymbol{e}'_i=a_0^i\boldsymbol{e}'_i+a_j^ix^j\boldsymbol{e}'_i,$$

所以 S'与 S 的坐标变换关系为

$$x'^i=a_0^i+a_j^ix^j, \tag{1.1-6}$$

或者写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}x'^1\\x'^2\\x'^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0^1\\a_0^2\\a_0^3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_1^1&a_2^1&a_3^1\\a_1^2&a_2^2&a_3^2\\a_1^3&a_2^3&a_3^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{bmatrix},$$

式中的 a_0^i,a_i^i 称作**变换系数**.

下面我们证明,变换系数中的 a_i^i 不是任意的. 因为

$$\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k=(a_j^i\boldsymbol{e}'_i)\cdot(a_k^l\boldsymbol{e}'_l)=a_j^ia_k^l(\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'_l),$$

由坐标基矢的正交归一性

$$e_j \cdot e_k = \delta_{jk}, \quad e_i' \cdot e_l' = \delta_{il},$$

因而有以下的关系式

$$\delta_{il} a_j^i a_k^l = \delta_{jk}. \tag{1.1-7}$$

满足式(1.1-7)的变换式(1.1-6)就是 Euclid 空间的 **Cartesian 坐标变换**.

2. 曲线的线元

曲线的定义有许多种,为了和物理学的概念统一,我们采用如下的定义:设 Euclid 空间任意一点 P,随着参数 t 的变化在空间的运动轨迹就是一条**空间曲线**,也就是所谓的"动点成线".

在 Cartesian 坐标系下,P 点的位置矢量与参数 t 的关系为

$$\boldsymbol{r}(t) = x^i(t)\boldsymbol{e}_i, \tag{1.1-8}$$

这是曲线方程的矢量表示. 将上式微分则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t) = \mathrm{d}x^i(t)\boldsymbol{e}_i. \tag{1.1-9}$$

对于曲线上连结两个邻近点 $P_1(\boldsymbol{r})$和 $P_2(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})$的矢量,它的大小与这两点的曲线弧长 $\mathrm{d}s$ 相差高阶无穷小,当两点相距无穷小时二者相等 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$,于是曲线的无穷小弧长的平方为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^i\boldsymbol{e}_i\cdot\mathrm{d}x^j\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \tag{1.1-10}$$

我们将 $\mathrm{d}s$ 称作曲线的 **Euclid 线元(线素)**. 对于有限长的曲线弧长 PQ,则为

$$s = \int_P^Q \mathrm{d}s = \int_P^Q \sqrt{\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}. \tag{1.1-11}$$

线元是一个重要的几何量,我们有如下的定理:在 Euclid 空间中曲线的线元 $\mathrm{d}s$ 是一个不变量,即对不同的坐标系其值不变. 设线元 $\mathrm{d}s$ 在 $S(x^i)$中的表示为式(1.1-10),另有一坐标系为 $S'(x'^i)$,由坐标变换式(1.1-6)可知曲线的线元在 S'中的表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s'^2 &= \delta_{ij}\mathrm{d}x'^i\mathrm{d}x'^j = \delta_{ij}(a_k^i\mathrm{d}x^k)(a_l^j\mathrm{d}x^l)\\ &= (\delta_{ij}a_k^i a_l^j)\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l = \delta_{kl}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l,\end{aligned}$$

最后一步用到式(1.1-7). 于是得到

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2 = \mathrm{inv.}. \tag{1.1-12}$$

这就是 Euclid 空间的**线元不变性**.

上面求得的 Euclid 度规 δ_{ij}具有最简单形式,如果线元在曲线坐标系中表示,则度规不一定如此简单. 我们可以通过坐标系的变换得到曲线坐标下的度规. 设曲线坐标为$\{O, u^1, u^2, u^3\}$,与 Cartesian 坐标$\{O, x^1, x^2, x^3\}$的关系为

$$x^i = x^i(u^j), \quad \mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j}\mathrm{d}u^j, \tag{1.1-13}$$

代入式(1.1-10),则线元为

$$ds^2 = \delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^k}\frac{\partial x^j}{\partial u^l}du^k du^l = g_{kl}du^k du^l, \tag{1.1-14}$$

式中的

$$g_{kl} = \delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^k}\frac{\partial x^j}{\partial u^l}, \tag{1.1-15}$$

就是曲线坐标下的度规.

例如,对于球坐标,取 $u^1 = r, u^2 = \theta, u^3 = \varphi$,则它们与 Cartesian 坐标的关系为

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, x^3 = r\cos\theta,$$

由式(1.1-15)可得球坐标下的度规为

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{1.1-16}$$

或者表示为线元形式

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \tag{1.1-17}$$

这就是我们常见的球坐标下的(无穷小)弧长公式.

3. 曲线的切矢量

在用参数 t 表示时,曲线方程及其导数分别为

$$\boldsymbol{r}(t) = x^i(t)\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{r}'(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{dx^i(t)}{dt}\boldsymbol{e}_i.$$

在几何上 $\boldsymbol{r}'(t)$表示曲线的切线,显然,切线的长度$|\boldsymbol{r}'(t)|$与参数 t 有关. 为此,我们选取曲线的弧长 s 作为参数,称作**自然参数**. 则曲线方程和切线分别为

$$\boldsymbol{r}(s) = x^i(s)\boldsymbol{e}_i, \quad \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} = \frac{dx^i(s)}{ds}\boldsymbol{e}_i.$$

因为$|d\boldsymbol{r}| = ds$,故以自然参数表示的切线 $d\boldsymbol{r}/ds$ 是一个单位矢量:方向与 $d\boldsymbol{r}$ 的方向相同,大小为 1,称之为**切矢(量)**,记作

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} = \frac{dx^i(s)}{ds}\boldsymbol{e}_i \tag{1.1-18}$$

由于 $d\boldsymbol{r}$ 的方向与坐标系的选择无关,所以切矢 $\boldsymbol{\tau}$ 是一个与坐标无关的几何量.

因为切矢量的大小$|\boldsymbol{\tau}| = 1$,故有

$$d|\boldsymbol{\tau}|^2 = d(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}) = 2\boldsymbol{\tau}\cdot d\boldsymbol{\tau} = 0.$$

这表明 $d\boldsymbol{\tau}$ 与切矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 正交,由于它的大小为$|d\boldsymbol{\tau}|$,故

$$\boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{|d\boldsymbol{\tau}|} \tag{1.1-19}$$

也是一个单位矢量:方向与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直,大小为 1,称之为**法矢(量)**.

有了切矢量和法矢量的概念,我们就可以研究曲线的形状了. 以下仅讨论平面曲线的情况.

4. 平面曲线的曲率

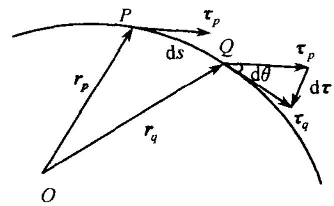

图 1-2 平面曲线的曲率

形象地看,一条曲线的弯曲情况由切矢量的变化来反映,由此我们引出曲率的概念. 如图 1-2 所示,设空间两个相邻点 P、Q 的矢径分别为

$$\boldsymbol{r}_p=\boldsymbol{r}(s),\quad \boldsymbol{r}_q=\boldsymbol{r}(s+\mathrm{d}s),$$

其切矢量分别为

$$\boldsymbol{\tau}_p=\boldsymbol{\tau}(s),\quad \boldsymbol{\tau}_q=\boldsymbol{\tau}(s+\mathrm{d}s).$$

将 $\boldsymbol{\tau}_p$ 平行移动,使其起点与 $\boldsymbol{\tau}_q$ 的起点重合,二者的夹角为 $\mathrm{d}\theta$. 因为两个矢量的大小均为 1,故二者矢量差的大小为

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}|=|\boldsymbol{\tau}(s+\mathrm{d}s)-\boldsymbol{\tau}(s)|=|\mathrm{d}\theta|.$$

但这并没有完全反映曲线的弯曲情况,因为它还与 P、Q 之间的距离有关. 因此我们将上式除以弧长 $\mathrm{d}s$,就有以下的定义:

曲线在一点的切矢量对弧长的 1 次导数的大小,称作曲线在该点的**曲率 $\boldsymbol{\kappa}$**,其倒数为**曲率半径 $\boldsymbol{\rho}$**

$$\kappa=\frac{1}{\rho}=\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}. \tag{1.1-20}$$

通俗地说,曲率或曲率半径表征了曲线的弯曲情况,曲线在一点的弯曲程度越大,则它在该点的曲率越大,曲率半径越小. 对于直线来说,每一点的曲率 $\kappa=0$,曲率半径 $\rho=\infty$. 因为切矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 和弧长 $\mathrm{d}s$ 都是与坐标无关的几何量,所以曲率 κ 和曲率半径 ρ 也都是几何量.

利用曲率半径,法矢量式(1.1-19)又可表示为

$$\boldsymbol{n}=\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s},\quad \boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}. \tag{1.1-21}$$

对于平面曲线来说,切矢量和法矢量构成曲线上一点的**自然标架$\{\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n}\}$**. 曲线上任意一个矢量都可以表示为自然标架的分量形式,当然也可以在 2 维 Cartesian 标架 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 中表示.

作为一例,我们来看它们在经典物理学中应用. 在 2 维 Cartesian 标架 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 和自然标架 $\{\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n}\}$ 下,一个粒子的位移可以分别表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x^1\boldsymbol{e}_1+\mathrm{d}x^2\boldsymbol{e}_2=\mathrm{d}s\boldsymbol{\tau},$$

最后一步用到式(1.1-21). 两边同除 $\mathrm{d}t$ 即得到粒子的运动速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=v^1\boldsymbol{e}_1+v^2\boldsymbol{e}_2=v\boldsymbol{\tau},$$

式中 v^1、v^2 是速度 $\boldsymbol{v}$ 在 Cartesian 标架上的分量,$v=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|/\mathrm{d}t=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 是速度的大小. 上式两边对时间微分,注意 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1=\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2=0$ 但 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}\neq0$,则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1+\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t},$$

利用式(1.1-21)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{\rho}\boldsymbol{n},$$

我们得到

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=a^1\boldsymbol{e}_1+a^2\boldsymbol{e}_2=a_\tau\boldsymbol{\tau}+a_n\boldsymbol{n}.$$

式中 a^1、a^2 是加速度 $\boldsymbol{a}$ 在 Cartesian 标架 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 上的分量;

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\quad a_n=\frac{v^2}{\rho}$$

则是在自然标架 $\{\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n}\}$ 上的分量,分别称作切向和法向加速度.

1.2 曲面上的度量

1. 曲面上的曲线坐标

欧氏空间的曲面当然可以在欧氏空间的 Cartesian 坐标系中表示,但是我们最终是要摆脱欧氏空间的,所以必须在曲面上建立自己的坐标系. 例如在地球表面不含南北两极的一个区域中的任意一点,可以用以地心为原点的球坐标表示,也可以用经纬线度来确定,这里的经纬线就是该区域的曲线坐标线.

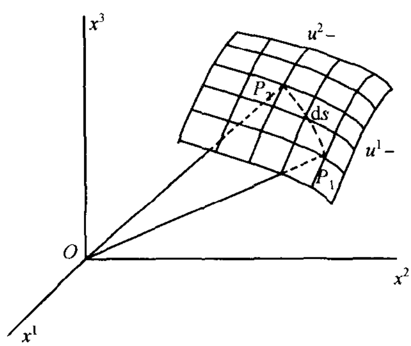

图 1-3 曲面上的曲线坐标及线元

设 2 维欧氏空间(平面)E^2 的一个区域 D,在其上建立坐标系 $\{u^1,u^2\}$,例如 Cartesian 坐标或极坐标等等. 将它伸缩、弯曲变形(但不能撕裂和重叠),成为欧氏空间的曲面 S,则 $\{u^1,u^2\}$ 就构成曲面 S 上的一个**曲线坐标系**. 曲面上任意一点 P 在欧氏空间的矢径

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2),\tag{1.2-1}$$

或者写成参数方程

$$x^i=x^i(u^m)\quad(i=1,2,3,m=1,2).\tag{1.2-2}$$

这是曲面上的点在欧氏空间的坐标(x^1,x^2,x^3)与曲面的曲线坐标(u^1,u^2)的关系.

让 $u^2=u_0^2=\text{const.}$, u^1 连续变动得到的曲线就是 u^1 坐标线,同理可得 u^2 坐标线,它们的方程分别为

$$u^1:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u_0^2),\quad u^2:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0^1,u^2).\tag{1.2-3}$$

参考式(1.1-3),定义(**曲线坐标**)**基矢**分别为