



曹庄琪 著

导波光学中的 转移矩阵方法

上海交通大学出版社

2

上海交通大学“九五”重点教材

国家科学技术学术制作出版基金资助出版

导波光学中的转移矩阵方法

曹庄琪 著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书在介绍导波光学理论和转移矩阵技术的基础上,系统介绍了转移矩阵技术在各类光波导中的解析应用。内容涵盖多层波导、渐变折射率波导、周期性波导、多量子阱波导、泄漏波导、金属薄膜结构和金属覆盖波导,主要分析这些结构的色散特性。

本书可供理工院校光学、光电子技术和光纤通信等专业的研究生作为教材,也可作为有关专业研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

导波光学中的转移矩阵方法/曹庄琪著. - 上海:上海交通大学出版社,2000

ISBN 7-313-02440-1

I. 导… II. 曹… III. 转移函数矩阵-应用-导波光学 IV. TN25

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 23624 号

导波光学中的转移矩阵方法

曹庄琪 著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

常熟市印刷二厂印刷 全国新华书店经销

开本:890mm×1240mm 1/32 印张:7 字数:199千字

2000年9月第1版 2001年3月第2次印刷

印数:201~1210

ISBN 7-313-02440-1/TN·083 定价:13.50元

版权所有 侵权必究

序

随着光通信、光信息处理和光传感等技术的迅速发展,研究光在薄膜波导中调制、耦合、传输、放大、色散和非线性相互作用等现象的导波光学日益受到有关研究人员的重视。而导波光学领域内的研究成果对一系列薄膜光电子器件的发展也起到了巨大的推动作用。

曹庄琪同志自 1979 年进入上海交通大学应用物理系以后,师从我国著名的固体物理学家方俊鑫教授,从事集成光学和导波光学的研究,至今已在这个学术领域辛勤耕耘 20 余年。他理论基础扎实,学术思想活跃,在光波导和表面等离子波研究领域建树颇多,已在国内外学术刊物上发表论文 60 余篇。尤其对光学上常用的转移矩阵理论的研究,有自己独到的见解,在美国光学学会杂志上发表的关于多量子阱光波导和渐变折射率光波导的论文曾获得国外专家的高度评价。最近,他在光波导高速开关和有机聚合物波导电光调制器领域又有新的思维,有关论文也将在美国光学学会杂志发表。

《导波光学中的转移矩阵方法》是一本学术专著,是作者利用转移矩阵方法研究多类光波导特性取得创造性成果的系统总结,内容覆盖多层薄膜波导、渐变折射率波导、周期性波导、多量子阱波导、泄漏波导、金属覆盖波导以及金属与介质界面上的表面等离子波。本书内容新颖、物理概念清晰、运用的数学工具简单,可作为理工科大学物理系和电子工程系光学和光电子专业研究生教材,也可供有关专业研究人员参考,相信本书的出版会对导波光学的教学和研究起到一定的作用。

曹庄琪

前 言

30 年来,以导波光学为理论基础的光纤技术、平面型光波导技术、集成光电回路及集成光路技术获得了迅速的发展。半导体薄膜激光器、电光波导调制器和多路光电开关等一大批实用化光电元器件正以迅猛的势头走向市场。人类从 20 世纪向 21 世纪过渡的同时,正在实现从电子学时代向光子学时代的飞跃。

矩阵技术是光学专家十分钟爱的一种理论方法,它在多层薄膜、周期性材料和变折射率光学元件等结构中,已获得广泛的应用。由于平面光波导是一种薄膜结构,因此利用转移矩阵方法分析各类光波导的特性是一种十分自然的想法。近 20 年来,国际上有多个研究小组曾涉足这项技术,研究领域涵盖周期性波导、渐变折射率波导、量子阱和半导体超晶格等多种结构。由于电磁场波动方程与薛定谔方程的相似性,矩阵技术的应用还可扩展到势场中的粒子波。但在多数场合,矩阵技术仅被当作一种数值计算方法使用。物理量的数值计算可达到所期望的精确度,但缺少解析方法特有的洞察力,难以揭示实际问题蕴含的深刻物理本质。

70 年代末,笔者在方俊鑫教授的引导下,开始接触导波光学,至今已在这个全新领域耕耘 20 余年。多年的教学和科研工作,使我领悟到转移矩阵作为一个数学工具,其巨大的解析分析的潜力远未被开发和利用。作为一种尝试,我利用转移矩阵技术已在多层波导、渐变折射率波导、多量子阱波导、泄漏波导和金属覆盖波导等领域取得了一些初步的结果,其中大部分已总结成论文发表于国内外的学术刊物上。在许多同事和学生的建议和鼓励下,我觉得有必要对这些散乱的结果加以分析、总结和提高,编辑成一本学术著作。这一方面固然有利于有关专业研究生教学和科研工作的展开,同时也可起到抛砖引玉的作用。

在本书的编写过程中,我的学生刘晴、张爱华、袁波和黄澍帮我完

成了全部文字和图表的计算机输入工作,在此向他们表示衷心的感谢。由于本人学术水平有限,对书中的差错和不当之处,恳请广大读者批评指正。

曹庄琪

1999年12月于上海交通大学

目 录

第 1 章 介质平板波导基础理论	1
1.1 引言	1
1.2 平板波导的线光学模型	2
1.3 平板波导的电磁理论.....	15
第 2 章 转移矩阵理论	30
2.1 引言.....	30
2.2 转移矩阵及其基本性质.....	30
2.3 模式本征方程.....	41
第 3 章 多层平板波导	43
3.1 引言.....	43
3.2 非对称多层平板波导.....	43
3.3 对称多层平板波导.....	49
3.4 多沟道波导.....	56
第 4 章 渐变折射率波导	67
4.1 引言.....	67
4.2 光线近似方法.....	68
4.3 WKB 近似法	71
4.4 WKB 方法的近似实质	79
4.5 等效衰减系数方法.....	81
4.6 精确的分析矩阵方法.....	88
第 5 章 周期性波导	98
5.1 引言.....	98
5.2 矩形皱阶周期性波导.....	98
5.3 任意形状皱阶周期性波导	110
第 6 章 多量子阱光波导	121

6.1	引言	121
6.2	阶跃折射率分布多量子阱光波导	121
6.3	任意折射率分布多量子阱光波导	128
6.4	分层复合材料中的非线性增强效应	139
第7章	泄漏波导	147
7.1	引言	147
7.2	棱镜—波导耦合系统	147
7.3	弯曲波导	155
第8章	金属薄膜结构	171
8.1	引言	171
8.2	金属与介质界面中的表面等离子波(SPW)	171
8.3	金属薄膜结构	179
8.4	表面等离子波的应用	187
第9章	金属包覆介质波导	193
9.1	引言	193
9.2	非对称金属包覆介质波导	193
9.3	对称金属包覆介质波导	202
9.4	金属包覆介质波导中的长程表面波	208

第 1 章 介质平板波导基础理论

1.1 引言

介质光波导是在光波导器件和集成光路中用以限制和传播光的元件,一种为大家熟知的介质光波导就是通常具有圆形截面的光导纤维。然而,集成光学所注重的波导往往是平面薄膜所构成的平板波导。这一方面固然是由于平板波导几何形状简单,其导模和辐射模可以用简单的数学公式来描述,另一方面是由于平板波导是最常用最基本的介质光波导,因此本书将只讨论这种平板波导。

介质平板波导的结构如图 1.1 所示,它由三层材料组成。中间一层是折射率为 n_1 的波导薄膜,它淀积在折射率为 n_2 的衬底上,薄膜上层是折射率为 n_3 的覆盖层(或称包层)。薄膜的厚度一般为 μm 量级,可与光波长相比较。为了构成真正的波导,要求 n_1 必须大于 n_2 和 n_3 。不失一般性,可假定, $n_1 > n_2 \geq n_3$, 如果 $n_2 = n_3$, 则称该波导为对称平板波导, 如果 $n_2 \neq n_3$, 则波导是非对称的。

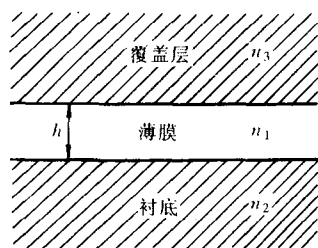


图 1.1 介质平板波导结构

由于对称平板波导仅仅是平板波导的特殊情况,故本章专门叙述非对称平板波导的光学性质。首先介绍光在平板波导中传播的线光学图像,使读者对介质平板波导有一个基本的认识,然后再利用光的电磁理论较为严格地处理光波导模式及场分布等基本性质,为以下几章奠定必要的理论基础。

本章始终假定导波光是相干单色光,并假定光波导是由无损耗、各向同性、非磁性的无源介质构成。

1.2 平板波导的线光学模型

本节讨论和研究光在平板波导中传播的线光学模型,并利用这个模型介绍介质波导理论的基本概念和术语,其中包括传播模的性质、导模、传播常数、导模的截止以及波导的有效厚度等。线光学图像是一种简明直观模型,但值得指出的是,为了解释波导中光的传播特性,还必须引入位相和相干等波动概念,再配以波导中锯齿光线传播的模型,这样才能得到光波导的色散方程和分立导模的结果。因为导波光是一维平面波,本节介绍的线光学模型是讨论介质平板波导时所特有的。

光在平板波导中传播的图像,是光线在薄膜—衬底和薄膜—覆盖层分界面上发生全内反射,而在薄膜中沿 Z 字形路径传播的图像。鉴于发生在这些介质界面上的折射和反射在导波光传播过程中起着重要作用,所以下面将简要分析折射与反射的物理过程,同时回顾有关的定律及其一些推论。

1.2.1 反射与折射^[1.1]

光通过两种不同的介质时,发生反射和折射现象。反射光与折射光是由以下过程所产生的:光透射到第二介质的一个薄层内完全地被吸收,透射的薄层厚度称为透射深度。被吸收的能量激起该介质内分子或原子电矩的受迫振动,产生瑞利散射。散射出来的瑞利次波相干后,在特征方向上给出极大值,这就是所观察到的反射光与折射光。因此,透射是第一性的,反射和折射是派生的,即第二性的。当光从光密介质射向光疏介质,而入射角大于临界角时,所出现的全反射并不是真正的“完全”反射。首先光必须透射,在不同的条件下,具有不同的透射深度;其次,全反射出来的光,在不同的条件下,经历着不同的相位突变和偏振变化。由此可见,光的反射与折射具有深刻的物理内容,它是光与界面物质相互作用的结果。

考虑如图 1.2 所示的分界面,其两侧是折射率分别为 n_1 和 n_2 ($n_2 < n_1$) 的两种无损耗、各向同性的均匀介质。由 n_1 介质向分界面入射一

相干光波,其波阵面法线与分界面法线成 θ_1 角。一般说来,具有复振幅 A 的光在分界面上,一部分被反射,一部分被折射。根据斯奈尔(Snell)定律,折射光的出射角 θ_2 (即通常所说的折射角)由下式给出:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1.1)$$

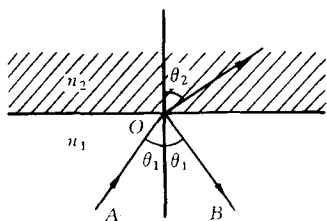


图 1.2 光线在两介质间的分界面上的反射和折射

反射光具有复振幅 B,在分界面处它与 A 通过反射系数 r 呈线性关系:

$$B = rA \quad (1.2)$$

反射系数的大小取决于入射角和光的偏振态,由菲涅耳公式给出。对 TE 偏振(即电场垂直于波阵面法线和分界面法线构成的入射面),则有

$$\begin{aligned} r_{TE} &= \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \\ &= \frac{n_1 \cos \theta_1 - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{n_1 \cos \theta_1 + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

对于 TM 偏振(即磁场垂直于入射面),相应的公式为:

$$\begin{aligned} r_{TM} &= \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \\ &= \frac{n_2^2 \cos \theta_1 - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{n_2^2 \cos \theta_1 + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

临界角 θ_c 由下式给出:

$$\sin \theta_c = n_2 / n_1 \quad (1.5)$$

若 $\theta_1 < \theta_c$, 则光只有部分被反射, r 取实数,一旦入射角超过临界角($\theta_1 > \theta_c$), 则 $|r| = 1$, 于是发生光的全反射。反射光产生相移 2ϕ , r 取复数, 可写为

$$r = \exp(-i2\phi) \quad (1.6)$$

因此可从菲涅耳公式中推出与两偏振态对应的半相移 ϕ_{TE} 和 ϕ_{TM} , 其

表达式分别为

$$\tan \phi_{\text{TE}} = \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_1} = \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}} \quad (1.7)$$

$$\tan \phi_{\text{TM}} = \frac{n_1^2 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_2^2 n_1 \cos \theta_1} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}} \quad (1.8)$$

式中, $\beta = k_0 n_1 \sin \theta_1$; $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ 是入射光的波长。

图 1.3 画出了 ϕ_{TE} 对入射角 θ_1 的依赖关系。从图中可以看出, 相移从临界角时的 0 增加到掠入射角 ($\theta_1 = 90^\circ$) 时的 $\pi/2$ 。当 $\theta_1 = \theta_c$ 时, 曲线的斜率增至无穷大; 当 $\theta_1 = 90^\circ$ 时, 曲线的斜率为 $(1 - n_2^2/n_1^2)^{-1/2}$ 。 ϕ_{TM} 的变化性质与之十分相似, 故不再重复。

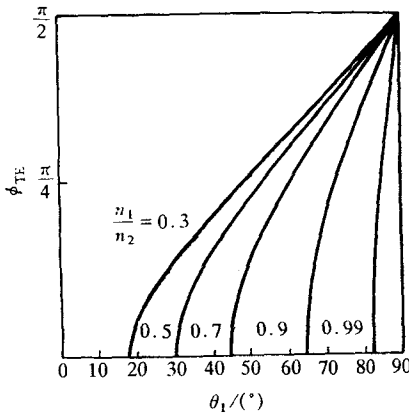


图 1.3 TE 模的相移 ϕ_{TE} 作为入射角 θ_1 的函数的曲线图

1.2.2 平板波导的模式

考虑图 1.4 所示的非对称平板波导结构, 其中薄膜的折射率为 n_1 , 衬底和覆盖层的折射率分别为 n_2 和 n_3 , 且设 $n_1 > n_2 > n_3$ 。薄膜—衬底分界面上的全反射临界角设为 θ_s , 而薄膜—覆盖层分界面上的全反射临界角设为 θ_c , 显然, $\theta_c < \theta_s$ 。当入射角 θ 逐渐增大时, 经分析可知, 存在着三种不同的情况, 如图 1.4 所示: (a) 对应于入射角 θ 小

的情况,即 $\theta < \theta_c < \theta_s$,从衬底一侧入射的光按照菲涅耳定律进行折射,并穿过覆盖层从波导逸出。此时,光没有受到限制,相应于这一图像的电磁模式称为“辐射模”(或称“包层模”)。(b)如图所示,入射角 θ 略为增大,使其满足 $\theta_c < \theta < \theta_s$ 。这时,自衬底入射的光在薄膜—衬底分界面上被折射,而在薄膜—覆盖层分界面上全反射,然后再发生折射,回到衬底,并最终逸出波导。这时,光仍然没有受到限制。这种传播方式称为“衬底辐射模”。(c)当入射角 θ 足够大时,满足 $\theta_c < \theta_s < \theta$ 。也就是光在两个分界面上都发生全反射,光一旦进入薄膜后就被封闭在里面沿 Z 字形路径传播。这种情况对应于传播的“导模”。

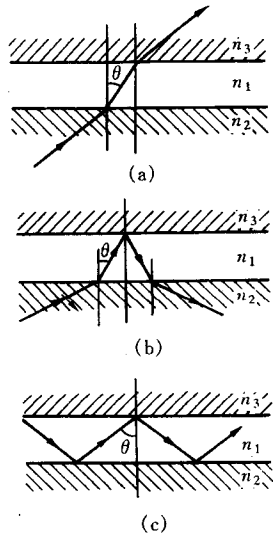


图 1.4 在平板波导中的图像

根据波动理论,在垂直于分界面方向上,导模在薄膜内形成驻波,而在覆盖层和衬底中形成指数衰减的迅衰波。以后还将会看到,并不是所有满足 $\theta > \theta_s > \theta_c$ 的光线都能在波导中传播,并构成导模。实际上,构成导模的 θ 角只能是有限个离散值,因此,导模属离散谱。而包层辐射模和衬底辐射模的 θ 角可取无限多个连续值,因此,辐射模属连续谱。

由于导模是实际在光波导中传播的光波,它是研究所有光波导器件的基础,因此以下将着重研究导模。

1.2.3 平板波导的导模

图 1.5 表示了平板波导的侧视图及坐标系,图中画出了对应于导模的 Z 字形波的波阵面。前面已指出,平板波导的导模可以用锯齿形光线图像描述,并且锯齿光线与界面法线的夹角 θ 只能取有限个离散值。设波导中的光沿坐标 z 方向传播,而在 x 方向受到限制。至于在垂直于 xz 平面的 y 方向上,由于波导的尺寸相对比较大,所以在理论上认为平板波导的几何结构和折射率分布沿 y 方向是不变的,并可进

一步认为光场沿 y 方向也是均匀一致的。于是可以看出,锯齿光线实际上是两个重叠的均匀平面波的图像,一个是斜上传播的,另一个是斜向下传播的,其波阵面法线是图 1.5 所示的锯齿形光线。设这两个平面波是单色并相干的,其角频率为 ω ,自由空间的波长为 λ ,则自由空间的波数为:

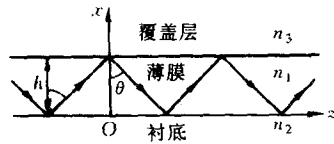


图 1.5 平板波导的侧视图

$$k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda \quad (1.9)$$

式中, c 为真空中的光速。图 1.5 所示的平面波的波矢量为:

$$|k| = k_0 n_1 \quad (1.10)$$

$$\kappa = k_0 n_1 \cos\theta \quad (1.11)$$

$$\beta = k_0 n_1 \sin\theta \quad (1.12)$$

式中, κ 和 β 分别为波矢 k 的 x 分量和 z 分量。由此可见,薄膜中的波动场按以下方式变化:

$$\exp[i(\pm \kappa x + \beta z)] \quad (1.13)$$

式中, κ 前面的正负号分别对应于斜向上和斜向下传播的平面波。考察某一 z 为常数的波导截面,这时只能看到光波沿 x 方向的上下运动,因而可不考虑光波沿 z 方向的运动,以下从这个观点出发推导平板波导维持导模的条件,设一光波从薄膜下界面($x=0$)出发向上行进到薄膜上界面($x=h$),在上界面经历全反射后返回到下界面,在下界面又经历全反射后与原先从下界面出发的光波叠加在一起,将此过程中光波所经历的相移累加起来,可以看到,为了达到相干加强(谐振)的结果,这个相移累加总和必须是 2π 的整数倍。对于厚度为 h 的薄膜,光线第一次横向穿过薄膜的相移是 κh ,在薄膜—覆盖层分界面上的全反射相移是 $-2\phi_{13}$,另一次向下横穿薄膜的相移也是 κh ,在薄膜—衬底分界面上的全反射相移是 $-2\phi_{12}$ 。因此,光波能在薄膜中传播的条件,即平板波导能维持导模的条件是

$$2\kappa h - 2\phi_{13} - 2\phi_{12} = 2m\pi \quad (1.14)$$

式中, m 为模序数,它取从零开始的有限个正整数。相移 ϕ_{12} 和 ϕ_{13} 是

由式(1.7)和(1.8)所描述的角度 θ 的函数。由此可看出,只有满足方程(1.14)的入射角 θ 才为波导所接受,即波导对光线的入射角是有选择性的。在厚度 h 确定的情况下,平板波导所能维持的导模数量是有限的,因此 m 只能取有限个正整数。方程(1.14)称为平板波导的模式本征方程,该方程的未知数是 β 或 θ 。对于给定的 m ,一定有 β_m 或 θ_m 与之对应。 β_m 叫作 m 阶导模的传播常数, θ_m 叫作 m 阶导模的模角。当然上述方程也可以表示成光频 ω 与传播常数 β 的关系,故上式也称为平板波导的色散方程。

将式(1.7)和(1.8)代入方程(1.14),可得到与两种偏振态有关的平板波导模式本征方程。

对 TE 模,有

$$\kappa h = m\pi + \arctan\left(\frac{p}{\kappa}\right) + \arctan\left(\frac{q}{\kappa}\right) \quad (1.15)$$

式中,

$$\kappa = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (1.16)$$

$$p = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} \quad (1.17)$$

$$q = (\beta^2 - k_0^2 n_3^2)^{1/2} \quad (1.18)$$

对 TM 模,有

$$\kappa h = m\pi + \arctan\left(\frac{n_1^2 p}{n_2^2 \kappa}\right) + \arctan\left(\frac{n_1^2 q}{n_3^2 \kappa}\right) \quad (1.19)$$

由式(1.5)和(1.12)可以看出,导模的传播常数 β 介于平面波在衬底和薄膜的波数之间,即有

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1 \quad (1.20)$$

为了方便,定义波导的有效折射率

$$N = \beta/k_0 = n_1 \sin\theta$$

N 又可称为模折射率或模指数,根据式(1.20),可知它的取值范围是

$$n_2 < N < n_1 \quad (1.21)$$

利用有效折射率,可将平板波导的模式本征方程改写成意义更明确的形式,即

TE 模:

$$(n_1^2 - N^2)^{1/2} k_0 h = m\pi + \arctan\left(\frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2} + \arctan\left(\frac{N^2 - n_3^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2} \quad (1.22)$$

TM 模:

$$(n_1^2 - N^2)^{1/2} k_0 h = m\pi + \arctan\left[\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\right)\left(\frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2}\right] + \arctan\left[\left(\frac{n_1^2}{n_3^2}\right)\left(\frac{N^2 - n_3^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2}\right] \quad (1.23)$$

这些不同形式的平板波导模式本征方程可用来研究波导的各种不同性质。

1.2.4 平板波导的传播常数

为了研究光在平板波导中的传播特性,必须根据模式本征方程(1.15)和(1.19)求得导模的传播常数。本小节将讨论平板波导模式本征方程的图解方法和数值分析方法,并通过实例说明光在平板波导中传播的图像。

(1) **模式本征方程的图解方法** 对于平板波导中的基模($m=0$),模式本征方程(1.15)或(1.19)变为

$$\kappa h = \phi_{12} + \phi_{13} \quad (1.24)$$

若波导是对称的,即 $n_2 = n_3$,则 $\phi_{12} = \phi_{13}$,于是上式化为

$$\kappa h = 2\phi_{13} \quad (1.25)$$

图 1.6 表示对称和非对称波导基模的模式本征方程图解。图中画出了关于 θ 角的两相移曲线,即光在薄膜中的横向穿越相移 $k_0 n_1 \cos\theta \cdot h$ (图中以点线画出)和光在薄膜上下分界面上的全反射相移之和($\phi_{12} + \phi_{13}$)。下面就($\phi_{12} + \phi_{13}$)的两种情况,即 $\phi_{12} = \phi_{13}$ 的对称波导(图中以实线画出)和非对称波导(图中以虚线画出)分别加以分析。对于对称波导,图中实线和点线的交点给出了基模的 Z 字形路径的 θ 角值。随着 h/λ 变得越小,Z 字形就显得越尖锐(θ 角越小)。但是,尽管薄膜厚度取得很小(或光波长很长),也总存在着一个解。这就

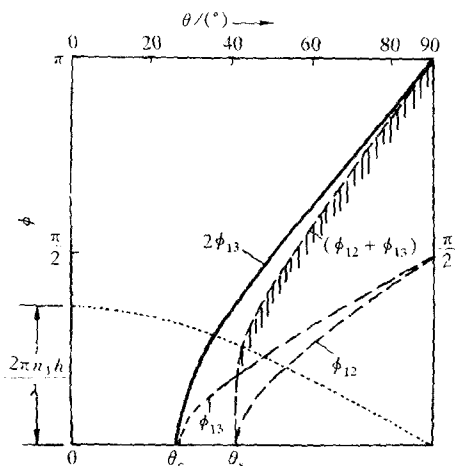


图 1.6 平板波导的基模的色散方程图解示意图

意味着,对称平板波导的基模是不会截止的。对于非对称平板波导,从图上考察点线与虚线之间的交点,可以看到,在 $(\phi_{12} + \phi_{13})$ 曲线中只有用阴影线表示的那一部分才大于薄膜—衬底分界面上的临界角 θ_c 。于是,对于较薄的薄膜(或较长的波长),无法得到点线和虚线的交点。这意味着非对称平板波导并不总能维持导模,即使是基模,也存在着截止条件 $\beta = k_0 n_2$ 。

下面研究多模的情况。以 TE 模为例,把平板波导模式本征方程(1.15)改写为

$$\tan(\kappa h) = \frac{\kappa(p+q)}{\kappa^2 - pq} \quad (1.26)$$

利用关系式

$$p = [k_0^2(n_1^2 - n_2^2) - \kappa^2]^{1/2} \quad (1.27)$$

$$q = [k_0^2(n_1^2 - n_3^2) - \kappa^2]^{1/2} \quad (1.28)$$

可将式(1.26)的右端改写为

$$F(\kappa h) = \frac{\kappa h \{ [(n_1^2 - n_2^2)(k_0 h)^2 - (\kappa h)^2]^{1/2} + [(n_1^2 - n_3^2)(k_0 h)^2 - (\kappa h)^2]^{1/2} \}}{(\kappa h)^2 - [(n_1^2 - n_2^2)(k_0 h)^2 - (\kappa h)^2]^{1/2} [(n_1^2 - n_3^2)(k_0 h)^2 - (\kappa h)^2]^{1/2}} \quad (1.29)$$