应用电子计算机
计算暴雨时面深的方法

庚维德　　王家祁

水利部南京水文研究所

一九八一年四月

目录

提要 ——————————————— (1)

一、插补分段雨量资料 ——————————— (2)

二、绘制等值线 ——————————— (6)

三、计算暴雨时面深 ——————————— (14)

四、计算实例 ——————————— (16)

五、几点看法 ——————————— (19)

参考文献 ——————————— (21)

[附录] ——————————— (22)

提 要

本文扼要介绍应用电子计算机计算暴雨时面深的方法。这项工作在我国还是首次尝试。它对於插补分段雨量资料、绘制等值线和计算暴雨时面深关系提供了有效的方法。详细滑动计算时面深关系外包值，工作量极大，以往手工无法实现。本文应用计算机计算暴雨时面深为分析计算暴雨提供了有力的工具

本项工作得到谭维炎同志的热情帮助。

我国现行手工计算单次暴雨时面深关系，一般包括下列几个步骤：

1、对分段较粗的测站资料，按邻近自记或观测时段较细雨量站时程分配比例摘补成逐时或时段较细的雨量资料；

2、统计暴雨中心各种历时最大点雨量及相应起迄时间；

3、按暴雨中心最大点雨量的起迄时间，统计全部测站的同时段雨量；

4、徒手目估勾绘各种历时雨量等值线；

5、用求积仪或方格法计算等值线包围面积，然后计算面平均雨深。

由于工作量很大，无法用手工计算逐时滑动的各种历时面平均雨深的外包值，而且目估勾绘等值线，因人而异，对成果也有一定影响。为此，我们在CJ—719机上编制了“计算时面深”通用程序（简称DAD）。程序主要包括三个部分，即摘补分段雨量资料、绘制等值线和计算时面深。本程序计算了二场暴雨资料作为实例，根据计算成果，得到了一些认识。

一、摘补分段雨量资料

计算一个流域或地区暴雨时面深关系，其精度首先取决于雨量站网密度和观测时段长短：目前雨量站网密度一般为几十～几百平方公里／站，自记雨量站更少，同时，雨量观测时段不等，有1、3（2）、6、12、24小时等5种（对应每天24、8（12）、4、2、1段制），较长逐时资料较少。为了充分利用现有资料，根据暴雨特点、地形影响等因素，应当尽可能把日雨量或分段较粗的资料摘补成分段较细的资料，直至逐时或若干分钟的雨量资料。

这次计算中主要比较了二种不同的摘补资料方法，它们之间的差别，主要是计算摘值系数K的方法不同。有了K值，可

得插补值 $P_{xy}=\bar{u}P_x$。其中，P_{xy} 为插补历时雨量，P_x 为当历时雨量。

1、按距离加权平均插值

设插补站为 G(a，b)，首先按 G 所在位置为中心将其周围观测时段较细的测站划分成四个象限，见图 1-1。

在各个象限内，选择一个与 G 站距离最短的资料点据 (X_i, Y_i, u_i)，$i=1, 2, 3, 4$。它们分别与 G 的距离为

$$D_i=((X_i-a)^2+(Y_i-b)^2)^{1/2}$$

按距离加权平均插值系数 $\bar{u}$ 为

$$\bar{u}=\sum_{i=1}^{4} u_i D_i^{-2} \Big/ \sum_{i=1}^{4} D_i^{-2} \qquad (1-1)$$

显然，当 $i=1, 2$ 时，即只在第一、二象限内找到观测较细的资料点据，则式(1-1)为

$$\bar{u}=\sum_{i=1}^{2} u_i D_i^{-2} \Big/ \sum_{i=1}^{2} D_i^{-2}$$

亦可表示为

$$\bar{u}=u_1 C_1+u_2 C_2$$

其中

$$C_1=D_2^2/(D_1^2+D_2^2)$$

$$C_2=D_1^2/(D_1^2+D_2^2)$$

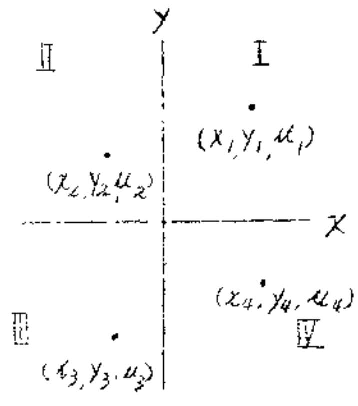

图 1-1

可见

(1) 若 $D_2>D_1$，则 $C_1>C_2$

(2) $C_1+C_2=1$

对于各象限内选择观测资

料较细的资料实据,还有其他方法,如以插补站为中心,一定距离为半径画圆,根据选择圆内资料较细的实据等。

另外,还有按距离加权最小二乘逼近法拟合曲面插值等,这里不再罗列。这类方法均考虑距离为权重,即权重大小与距离大小相反。由于暴雨等值线一般与暴雨走向、地形有关,而测站分布又不规则,上述方法不一定合适。本次尝试采用以下的插值方法。

2. 三角形线性插值

首先根据暴雨走向和地形特点选择相应的插值三角形,见图1-2,3。

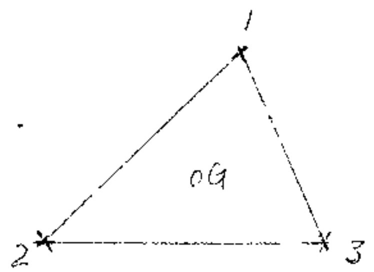

图1-2 暴雨东西走向

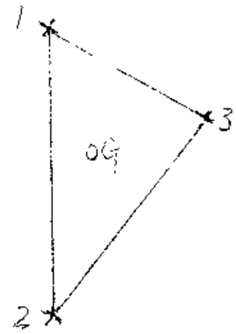

图1-3 暴雨南北走向

设插值三角形三顶点分别为(x_1, y_1, u_1),(x_2, y_2, u_2),(x_3, y_3, u_3)。插补站G(a,b)

求插补站G(a,b)处的u值。

令插值三角形平面方程为

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \qquad (1-2)$$

将三顶点座标代入(1-2)式,得三元一次方程组

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \end{cases}$$

解得

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta}(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta}(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta}(c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3)$$

式中

$$\Delta = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \qquad a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \qquad b_2 = y_3 - y_1 \qquad b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_2 \qquad c_2 = x_1 - x_3 \qquad c_3 = x_2 - x_1$$

将(a, b)代入式(1-2)，即可求得u值。

有二点应特别注意.

1)、插补站必须在相应的插值三角形内，一般不能外延；

2)、若插补站受地形或资料条件限制，选不到合适的插值三角形，则采用接邻近资料较好的一个站或二个站按其时程比例分配直接插补。

插值三角网有二种方法给出，一是根据三角形边长最好保持大致相等的条件，尽可能避免出现过小的锐角或过大的钝角，由计算机自动联成三角网；二是考虑暴雨走向、地形条件等手工联结三角网输入机器，亦可采用手工联结三角网。

在进行插补计算时，首先将计算地区雨量站按观测段长

短分类，然后把日雨量资料或分段较粗的资料由粗到细逐级插补，最后插得逐时雨量资料或对应本地区观测时段最细的雨量资料。

二、绘制暴雨等值线

绘制等值线的方法，常用的有二种：

1、网格法

主要步骤：

首先将计算地区，按一定步长划分网格。步长大小与计算机内存和对计算精度要求有关。

插补计算网格点各种历时暴雨量，可用上述方法由周围测站推算。

计算等值线Z与矩形网格棱边交点及其座标，见图2-1。

若 $(Z-P_A)\times(Z-P_B)\leq 0$　　(2-1)

则Z与矩形棱边AB有交点I_N，称为等值点线节点，其座标采用线性插值得出。

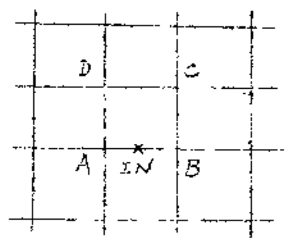

图2—1

$$x_{IN}=x_A+(x_B-x_A)\times M$$

$$y_{IN}=y_A+(y_B-y_A)\times M \qquad (2-2)$$

其中

$$M=(Z-P_A)/(P_B-P_A)$$

然后确定Z在网格内的走向，如图2-1，逐个网格检查并计算Z与网格各棱边有否交点及其交点的座标。若等值线节点的起点与终点相重合，则等值线闭合，否则不闭合，为开曲线。

最后采用光滑连接等值点的方法得到所求的等值线。

网格法适用资料点据较密，尤其是具有规格化的资料点据，无需插值网格点，比较方便。计算、绘制等值线精度取决于资料点据的密度和分布，网格多少，网格点计算方法，曲线光滑方法的适用性等。网格法应用在绘制地形图效果较好。

根据雨量站比较稀少且分布不规则，计算精度要求不是很高的特点，本次采用三角网法绘制等值线。

2、三角网法：

三角网法绘制等值线之基本思路相同于网格法。主要步骤为：连结三角网；统计并记下Z穿过的三角形编号、二条棱边及三角形总数；统计并记下Z各个分支穿过的三角形编号、总数并计算等值线节点座标等。

1) 连结三角网；

将暴雨发生地区雨量站连结成绘制等值线用的三角网（以下简称三角网）。本次采用手工连结三角网，原则同上述插值三角网。三角网见图2-5。

2) 判断Z与三角形棱边交点，用式(2-1)；

这里规定：Z穿过三角形系指Z通过三角形二条棱边。对其它三种情况，即Z通过三角形一顶点及其对边、二个顶点和三个顶点时，作如下处理：将其顶点（或等值线Z值）略加一个很小的数。这样限制Z穿过三角形顶点，又不影响计算精度。

3) 由2)逐一统计并记录Z穿过三角形的编号、二条棱边及穿过三角形总数V；

4) 等值线走向；

从Z穿过的三角形中，首先找边界三角形，如果没有，以编号最小的三角形作为起始三角形，找其棱边相同的相邻三角形，并采用非线性插值方法（详见后），计算Z穿过相邻两三角形公共边交点（等值线节点）的座标，依次进行。

若最后找到的相邻三角形与起始三角形重合，即该等值线闭合；

若最后找到的相邻三角形与起始三角形不重合，就是这二个三角形都在三角网边界上，等值线不闭合。

由此，得到Z的第1个分支，其穿过三角形数 $D_1 = m$，其节点座标为 (X_{1j}, Y_{1j}) $j=1,2,\cdots K$。当等值线闭合时 $K=m$，当等值线不闭合时 $K=m+1$。

5)、等值线分支；

由上计算，若 $D_1 = V$，则等值线Z只有一条分支，即暴雨只有一个中心。若 $D_1 < V$，则表示该雨深的等值线存在多中心，在 $(V-D_1)$ 三角形中，找边界三角形或编号较小三角形作为第二个分支的起始三角形，重复4)，最后满足

$$\sum_{i=1}^{N} D_i = V \qquad (2-3)$$

其中N为等值线Z分支数，

等值线Z计算结束。

6)、离散等值线节点连成光滑曲线

本次采用分段三次多项式曲线拟合法光滑曲线，即在每相邻两个等值线节点之间拟合一条三次多项式曲线，为了保证分段曲线之间光滑，要求等值线节点上一阶导数是连续的。

(1)、求等值线节点上的导数

1969年，AKIMA提出一个几何条件，用5个点估计中间点的导数，设平面上有五个节点1，2，3，4，5，求点3的导数。

公式

$$\sin\theta = \frac{b_0}{\sqrt{a_0^2+b_0^2}} \qquad (2-4)$$

$$\cos\theta = \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2+b_0^2}}$$

$$a_0 = W_2 a_2 + W_3 a_3$$

$$b_0 = W_2 b_2 + W_3 b_3$$

$$W_2 = |a_3 b_4 - a_4 b_3|$$
$$W_3 = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$
$$a_i = x_{i+1} - x_i$$
$$b_i = y_{i+1} - y_i \qquad (i=1,2,3,4)$$

(2) 计称首末端点的导数

对於封闭曲线，如计称点1导数时，用 $m-1, m, 1, 2, 3$ 五点，计称点 m 时，用 $m-2, m-1, m, 1, 2$ 五点代入式(2-4)计称即可得到。

对於开曲线，需要在两个端点以外再各补足两个点，才能确定端点的导数。

设端点 (x_3, y_3) 和两个相邻点 (x_2, y_2)，(x_1, y_1) 以及需补足的两个点 (x_4, y_4) (x_5, y_5) 俱在曲线

$$\begin{cases} x = g_0 + g_1 t + g_2 t^2 \\ y = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 \end{cases}$$

上，这里 g, h 均为常数，t 为参数，并设 $t = i$ 时 $x = x_i$ $y = y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$。从而可以定出

$$\begin{cases} (x_4 - x_3) = 2(x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \\ (x_5 - x_4) = 2(x_4 - x_3) - (x_3 - x_2) \\ (y_4 - y_3) = 2(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) \\ (y_5 - y_4) = 2(y_4 - y_3) - (y_3 - y_2) \end{cases} \qquad (2-5)$$

将式(2-5)代入式(2-4)即可求得点 (x_3, y_3) 的导数。

(3) 在多值函数情况下，两点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 及其导数 $(\sin\theta_1, \cos\theta_1)$，$(\sin\theta_2, \cos\theta_2)$ 拟合三次多项式曲线参数方程为

$$\begin{cases} x = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + P_3 t^3 \\ y = Q_0 + Q_1 t + Q_2 t^2 + Q_3 t^3 \end{cases} \qquad (2-6)$$

其中

$P_0=x_1$

$P_1=R\cos\theta_1$

$P_2=3(x_2-x_1)-R(\cos\theta_2+2\cos\theta_1)$

$P_3=-2(x_2-x_1)+R(\cos\theta_2+\cos\theta_1)$

$Q_0=y_1$

$Q_1=R\sin\theta_1$

$Q_2=3(y_2-y_1)-R(\sin\theta_2+2\sin\theta_1)$

$Q_3=-2(y_2-y_1)+R(\sin\theta_2+\sin\theta_1)$

$R=\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right]^{1/2}$

参数 $0\leq t\leq 1$，对应 $x_1\leq x\leq x_2$，$y_1\leq y\leq y_2$。

7）关于非线性插值方法。

计算等值线节点坐标，如采用式（2—2）线性插值公式得到的雨量剖面是一次呈线性关系，而实际暴雨等值线图的剖面 $Z\sim x$ 一般为非线性关系，见图2—2。

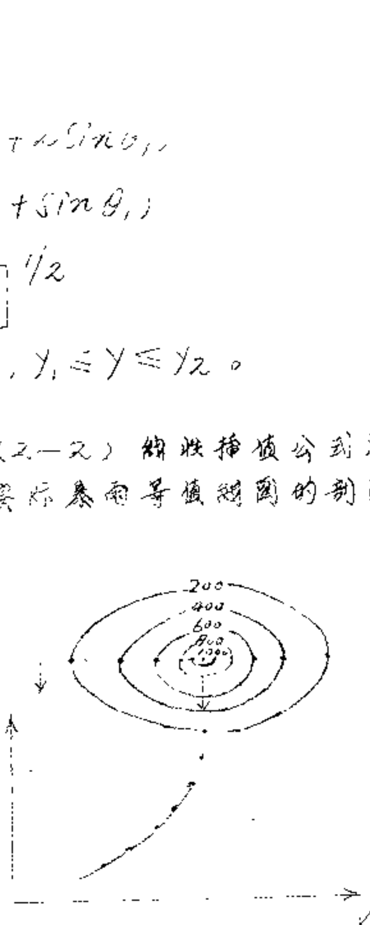

图2—2

本次计算中采用非线性插值并加上限制，使计算机绘出的等值线图比较接近暴雨等值线的实际情况。

设相邻两三角形四个顶点A，C，B，D的坐标和雨深分别为 (x_1,y_1,P_1)，(x_2,y_2,P_2)，(x_3,y_3,P_3) 及 (x_4,y_4,P_4)，两三角形公共边为AC，见图2—3。

求等值线Z与AC边交点坐标 (x,y)。

令纵坐标代表雨深的曲面方程为不完全的二次多项式

$$Z=P(x,y)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4xy \qquad (2\text{-}7)$$

由已知四个顶点座标代入上式，得四元一次方程组

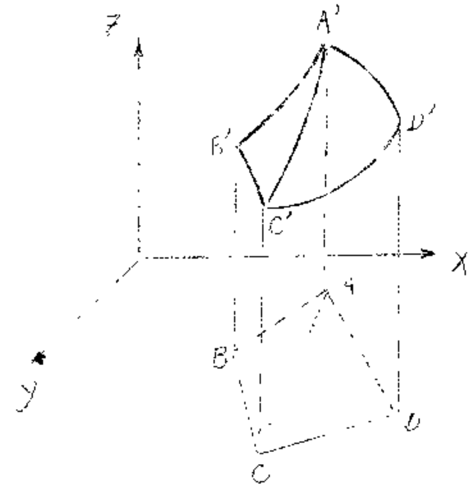

图2-3

$$
\begin{cases}
P_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 x_1 y_1 \\
P_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 x_2 y_2 \\
P_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 x_3 y_3 \\
P_4 = \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 x_4 y_4
\end{cases}
$$

采用高斯消去法解方程组，解得系数α_1，α_2，α_3，α_4。
又令AC边的直线方程为

$$y = b + mx \qquad (2\text{-}8)$$

其中 $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$

$b = y_1 - m x_1$

将式(2-8)代入式(2-7)，整理得。

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \qquad (2\text{-}9)$$

其中

$a_0 = \alpha_4 m$

$a_1 = \alpha_2 + \alpha_3 m + \alpha_4 b$

$a_2 = \alpha_1 + \alpha_3 b - Z$

解式(2-9)，求得一元二次方程的实根，选取在区间(x_1, x_2)

内之一个实根为所求的x值，再用式（2-8），计算得y值。

讨论：

上述方法计算等值线Z及其与AC边交点x的关系曲线有三种情况，即上凸、下凹和直线三种。参照图2-2暴雨等值线图$Z\sim x$关系，一般呈下凹形曲线，随着Z值减小，渐近直线。因此，对Z与AC边交点x座标作了如下的规定：

设A'C'边在$Z-x$平面上投影的中心座标为$(\bar{x},\bar{Z})$，见图2-4。用式（2-9），由$\bar{x}$推求Z值。根据暴雨分布性质，规定满足$Z_上 \geq Z \geq Z_下$

其中

$$Z_上 = \bar{Z} = Z_E$$

$$Z_下 = Z_C + (Z_A - Z_C)/4 = Z_F$$

若$Z > Z_上$，则$Z\sim x$为上凸曲线，直接用线性插值计算(x, y)。

若$Z < Z_下$，虽$Z\sim x$满足下凹曲线要求，但曲率太大。修正的办法是由A，F，C三点拟合二次曲线，由Z推求x值再计算y值。

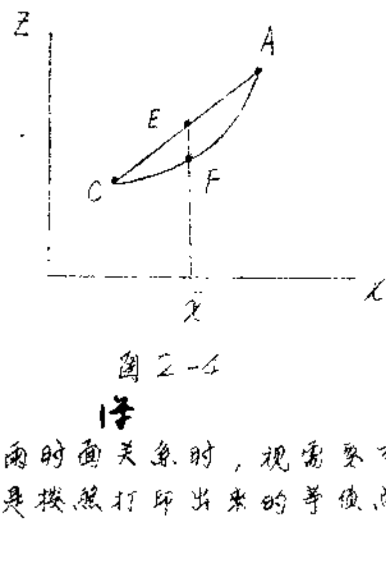

图2-4

通过以上步骤，借助计算机上配备的绘图仪，即可绘制出暴雨等值线图。但限于目前国产绘图仪尚未过关，本次计算暴雨时面关系时，视需要可将等值线节点座标打印出来，图2-5是按照打印出来的等值点徒手连线的暴雨等值线图。

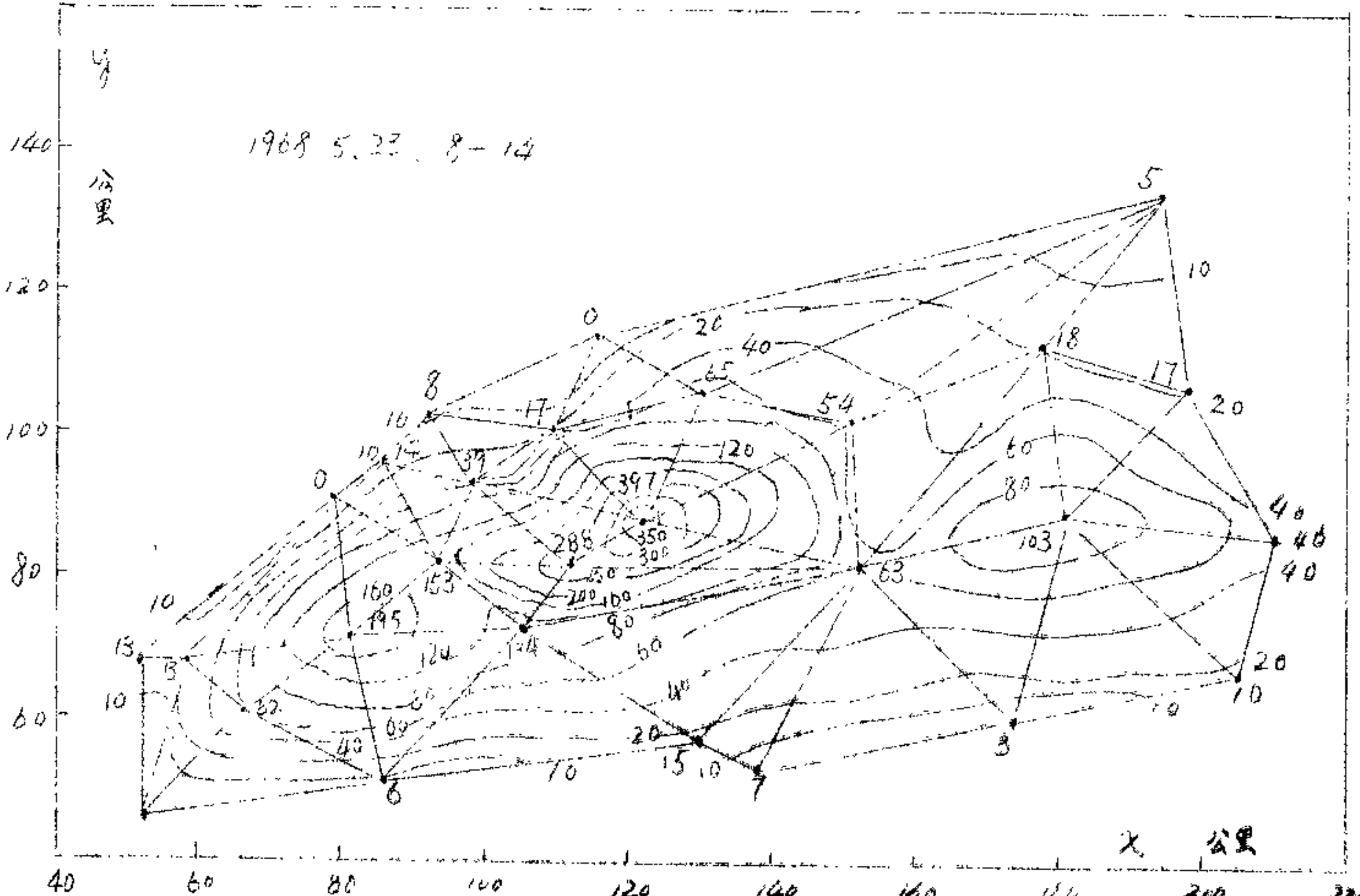

图2-5　广东潢步头6小时最大雨量(T_1=25)

三、计算暴雨时面深关系

根据暴雨等值线图计算时面深关系。

1、选择滑动时段

为了统计时面深关系外包值时，采用统计法选择滑动计算时段。

1)、对某个历时，统计各站自身最大雨深并计算其算术平均值（简称"均值"）；

2)、选择单站自身某历时最大雨深大于等于"均值"的测站作为"选时测站"；

3)、对"选时测站"某历时最大雨深所相应的起始时刻按先后排队，并计算站数累积分布；

$$P_x = N_2/(N_1+1) \qquad (3-1)$$

其中

N_1 —"选时测站"总数

N_2 —晚於某起始时刻的站数

4) 取 $0.25 \leq P_x \leq 0.75$ 对应时间为计算时段滑动范围；检查其中是否包括雨深最大的三个测站的起始时刻，如果没有包括，一直延伸到包括为止。

2、计算封闭等值线面积

根据等值线相邻节点座标及其导数分段拟合三次多项式函数，积分计算曲线包围面积，逐块面积相加得到封闭等值线包围的总面积 S。

$$S = \sum_{j=1}^{m} S_j \qquad (3-2)$$

$$S_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$$

计算面积，本次采用龙贝格积分。

3、计算面平均雨深

根据计算面平均雨深原则：当暴雨只有一个中心时，直接计算面平均雨深；当暴雨有几个中心时，按最大暴雨中心计算

面平均雨深。

计算封闭等值线 Z_K 内面平均雨深 H_K 公式为

$$H_K = W_{K,C}/S_{K,C} \qquad (3-3)$$

$$W'_{K,i} = W_{K-1} + 0.5(Z_K + Z_{K-1})(S_{K,i} - S_{K-1}) \qquad (3-4)$$

$$W_{K-1} = \sum_{j=1}^{M} W_{K-1,j}$$

$$S_{K-1} = \sum_{j=1}^{M} S_{K-1,j}$$

式中

Z — 等值线值。

H — 等值线包围的平均雨深。

S — 等值线包围的面积。

W — 等值线包围的水量。

下标 i — 等值线分支编号（$i=1,2,\cdots N$）。

j — 被下一级等值线某分支包围的各等值线分支编号（$j=1,2\cdots M$）。

C — 最大暴雨中心所在等值线的分支编号，

在实际计算中，逐条计算等值线 Z_K 及对应的时面深关系分为三个步骤：

1)、每标出一条等值线分支 $Z_{K,i}$ 后，由式（3-2）计算其面积 $S_{K,i}$；

2)、根据 $Z_{K,i}$ 与上一条等值线各分支 $Z_{K-1,i}$ 的关系，见(图3-1 a，b，c)，计算 $W_{K,i}$ 及其中心座标和雨深；

(1)、当 $Z_{K,i}$ 等值线内只有一条 $Z_{K-1,i}$ 封闭等值线时（图3-1a）直接用 $Z_{K-1,i}$ 的中心座标及雨深作为 $Z_{K,i}$ 的中心座标及雨深并用式（3-4）计算 $W_{K,i}$；

(2) 对一个暴雨中心计算其第一条等值线时，$Z_{K,i}$ 内没有 $Z_{K-1,i}$ 等值线（图3-1b），则统计该暴雨中心座标及雨深，用式（3-4）计算 $W_{K,i}$，其中 $W_{K-1}=0$，$S_{K-1}=0$，Z_{K-1} 为暴