高等数学自学丛书

空间解析几何

李滋生 编

山东教育出版社

高等数学自学丛书

空间解析几何

李 滋 生 编

山东教育出版社
一九八三年·济南

高等数学自学丛书

空间解析几何

李滋生 编

*

山东教育出版社出版
（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　13.25印张　291千字
1983年10月第1版　1983年10月第1次印刷
印数1—6,000

书号 13275·10　定价 1.25元

内 容 提 要

本书系统地介绍了空间解析几何的基本知识，内容包括绪论（即预备知识）、空间内点和向量的坐标、向量代数、空间的平面和直线、曲面和曲线的方程、几种特殊的曲面、二阶曲面等。

本书适合中等学校数学教师、理工科大学生、工程技术人员和知识青年阅读，也可作为高等院校有关专业的教学参考书。

出版说明

为了满足广大读者自学高等数学的需要，我们出版了这套高等数学自学丛书，包括《数学分析基础》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《无穷级数》、《多项式代数》、《线性代数》、《抽象代数》、《空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《布尔代数》等十册。

这套丛书起点较低、系统性较强，次序的编排尽量作到由浅入深，由易到难，注意循序渐进，并适当渗透了一些现代数学的观点．在编写过程中，力求作到内容讲述详细，文字通俗流畅；书中安排了较多的例题和习题，书末附有习题答案或提示．因此，这套丛书适合自学，也可以作为这些课程的教学参考书．

这套丛书由山东师范大学数学系主持编写．此外，还得到山东大学数学系、曲阜师范学院数学系、聊城师范学院数学系等单位的大力支持和帮助，在此一并致谢．

一九八二年十月

目　　录

第一章　绪　论

为了能够比较正确地在平面上画二阶曲面的直观图，需要熟悉平面斜角坐标系和平面仿射坐标系，并知道在这些坐标系中二次方程所表示的曲线的形状。为此，先回顾一下直线上的坐标系和平面直角坐标系，并了解一般二次方程在直角坐标系中所表示的形状很有必要。

§1.1　有向线段和有向直线

一、有向线段

今后我们讨论线段时，不只考虑它的长度，而且要考虑它的方向。把一条线段的两个端点之一当作起点，另一个当作终点。由起点到终点的方向称为线段的正方向，简称正向。规定了正方向的线段称为有向线段。

以A点为起点B点为终点的有向线段记作$\overline{AB}$。有向线段$\overline{AB}$与$\overline{BA}$是不一样的，虽然它们的长度相等，但是它们的正向相反。

起点和终点相同的有向线段称为零线段，零线段的正向是不确定的，只是长度为零。

两个有向线段如果它们的长度相等正向相同，就称它们

相等．相等的两个有向线段可以用其中的一个代替另一个．如果两个有向线段$\overline{AB}$与$\overline{CD}$相等，就记作

$$\overline{AB}=\overline{CD}.$$

例如，在图1－1中$ABCD$和$CDEF$为两个平行四边形，并且有向线段$\overline{AB}$和$\overline{EF}$在一直线上．在这种情况下，我们有：

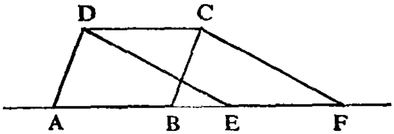

图 1—1

$$\overline{AB}=\overline{DC},\ \overline{DC}=\overline{EF},\ \overline{AB}=\overline{EF}.$$

同时也有：

$$\overline{AD}=\overline{BC},\ \overline{DE}=\overline{CF}.$$

二、有向直线

线段是直线上限于两点间直线的一部分，线段可以规定正向，直线也可以规定正向．一条直线向两个相反的方向无限延伸，把其中的一个方向规定为正向，用箭头表示，如图1—2．把规定了正向的直线叫做有向直线，也叫做轴．

图 1—2

三、有向线段的数值

如果有一条有向线段在一根轴上，那末有向线段的正向与轴的正向可能相同，也可能相反．例如，在图1－3中，有向线段AB的正向与轴的

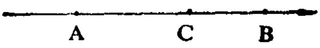

图 1—3

正向相同，而有向线段BC的正向与轴的正向相反。

当一条有向线段在一根轴上时，使这条有向线段的长度带有一定的符号："+"号或"-"号，这带有符号的长度叫做有向线段的数值。当有向线段的正向与轴的正向相同时，取"+"号；反之，取"-"号。零线段的数值为零。

有向线段$\overline{AB}$的数值用符号AB表示。有向线段$\overline{AB}$的长度等于它的数值的绝对值，用符号$|AB|$表示。根据上面的规定，有关系：

$$AB=-BA,\quad |AB|=|BA|。\tag{1}$$

轴上有向线段$\overline{AB}$的数值AB与它的长度$|AB|$的关系为：

$$AB=\begin{cases}|AB|\text{，}\overline{AB}\text{与轴的正向相同；}\\ 0\text{，}\overline{AB}\text{为零线段；}\\ -|AB|\text{，}\overline{AB}\text{与轴的正向相反。}\end{cases}\tag{2}$$

在图1-3中，设A、B两点间有5个单位，B、C两点间有2个单位。在这种情况下，

$$AB=5,\quad BC=-2.$$

§1.2 直线上点的坐标

这一节介绍直线上的坐标系，并利用点的坐标讨论直线上线段的一些性质。最后讨论坐标变换。

一、直线上的坐标系

设有一直线，现在要用一个实数来确定这直线上点的位置。我们在直线上取定一点，叫做原点，用字母O表示；把

这直线的两个方向之一规定为正向，用箭头表示；选定一个线段作为长度单位（如图1－4）．于是对于直线上任一点 P，根据所取的长度

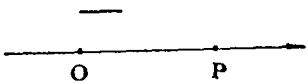

图 1—4

单位，就可以用有向线段$\overline{OP}$的数值OP表示P点在直线上的位置．当有向线段$\overline{OP}$的正向与直线的正向相同时，OP为正，反之，OP为负；当P点合于原点时，OP为零．这样，直线上任一点P，确定一个实数x：

$$x=OP. \qquad (1)$$

反之，对于任何一个实数 x，可以在直线上确定一个点P，使有向线段 $\overline{OP}$的数值

$$OP=x. \qquad (2)$$

当 $x>0$ 时，有向线段$\overline{OP}$的正向与直线的正向相同；当 $x<0$ 时，有向线段$\overline{OP}$的正向与直线的正向相反；当 $x=0$ 时，P点合于原点O．

按照上面的说法，直线上的点与全体实数之间建立了一一对应．就是说，直线上的每一点只对应（确定）一个实数；反之，每一个实数也只对应（确定）直线上的一个点．

在直线上取定了原点，规定了正向和选定了长度单位之后，就叫做在直线上建立了一个坐标系．用ox表示．

在直线上建立了坐标系之后，一个实数 x 就完全确定了一点P在直线上的位置．实数 x 就叫做P点的坐标．坐标为 x 的点P记作$P(x)$．这条直线叫做坐标轴．

注意：

1．有时在坐标轴上从原点O沿正方向的一侧取一点，用

E表示，或者用数字1来标这个点，意思是以原点和这点为端点的线段作为长度单位，并称这点为单位点。

2.有时把坐标轴上点的坐标写在该点的下面。这样，既可省略标出长度单位，又清楚地知道该点的坐标。

3.有时在讨论问题时，用不着具体的长度单位，为了图形的简洁起见，不标出长度单位。

二、坐标轴上有向线段的性质

现在我们讨论坐标轴上有向线段的数值与它的端点的坐标之间的关系。

定理1 对于坐标轴上任何两点$A(a)$和$B(b)$，有向线段AB的数值AB与它的两个端点的坐标a和b有关系：

$$AB=b-a. \tag{3}$$

证明：三点O、A和B的相互位置共有六种（如图1－5）。在前三种情况中，有向线段$\overline{AB}$的正向与坐标轴的正向相同，由§1.1(2)式知：

$$AB=|AB|.$$

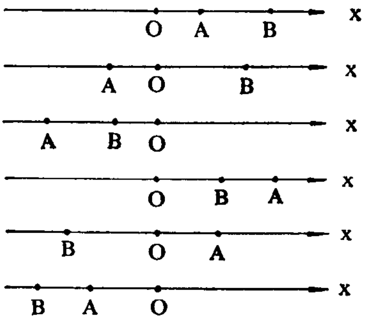

图 1—5

根据§1.1中的(2)式，对于第一种情况，我们有

$$AB=|AB|=|OB|-|OA|=OB-OA=b-a;$$

对于第二种情况，我们有

$$AB=|AB|=|OB|+|OA|=OB-OA=b-a;$$

对于第三种情况，我们有

$$AB=|AB|=|OA|-|OB|=-OA+OB=b-a.$$

在后面三种情况中，有向线段$\overline{AB}$的正向与坐标轴的正向相反，根据§1.1中的(2)式知：

$$AB=-|AB|.$$

按照同样的方法可以证明

$$AB=b-a.$$

所以，对于坐标轴上任意两点$A(a)$和$B(b)$，不论它们的位置怎样，总有

$$AB=b-a.$$

因为两点A和B间的距离就是有向线段$\overline{AB}$的长，而有向线段的长又等于它的数值的绝对值，所以，从定理1可以立即推出下面的结论。

推论 坐标轴上两点$A(a)$和$B(b)$间的距离

$$|AB|=|b-a|. \tag{4}$$

根据定理1，我们来证明下述关于坐标轴上三点的一个性质。

定理2 设A、B和C是坐标轴上的三个点，不论它们的相互位置怎样，都有

$$AB+BC=AC. \tag{5}$$

证明：设三点A、B和C的坐标分别为a、b和c。根据定理1应有

$$AB=b-a, \quad BC=c-b.$$

相加得：

$$AB+BC=c-a.$$

同样，根据定理1也有

$$AC=c-a.$$

所以

$$AB+BC=AC。$$

例1 设A、B、C和D为一条直线上的四个点，不论它们的相互位置怎样，都有关系：

$$AB\cdot CD+BC\ AD+CA\cdot BD=0。$$

证明： 我们在直线上建立坐标系，取D点为原点，并设A、B和C三点的坐标分别为a、b和c，根据定理1有

$$AB=b-a,\quad CD=-c,\quad BC=c-b,$$
$$AD=-a,\quad CA=a-c,\quad BD=-b。$$

所以

$$AB\cdot CD=(b-a)(-c)=ac-bc,$$
$$BC\cdot AD=(c-b)(-a)=ab-ac,$$
$$CA\cdot BD=(a-c)(-b)=bc-ab。$$

相加得

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD+CA\cdot BD=0。$$

三、坐标变换

直线上点的坐标是与直线上所建立的坐标系有关，直线上同一点P对不同的坐标系ox和$o'x'$会有不同的坐标x和x'。下面我们来导出同一点P在不同的坐标系ox和$o'x'$中，它的坐标x和x'之间的关系。或者说，用坐标x'来表示x。反过来，也可用x来表示x'。我们只介绍下面的二种。

1.原点的改变。坐标系ox和$o'x'$的长度单位一样，坐标轴的正向相同，只是原点的位置改变（如图1－6）。

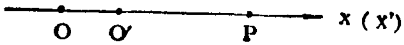

图 1—6

设坐标系$o'x'$的原点o'在坐标系ox中的坐标为 x_0。又设P点在坐标系ox和$o'x'$中的坐标分别为 x 和 x'。则

$$OO'=x_0,\quad OP=x,\quad O'P=x'.$$

根据(5)式得

$$OP=OO'+O'P,$$

于是有

$$x=x_0+x'.$$

这样，我们就得到用坐标 x'表示坐标 x 的公式：

$$x=x'+x_0. \qquad (6)$$

由(6)式移项,就得到用坐标 x 表示坐标 x'的公式：

$$x'=x-x_0. \qquad (7)$$

例 2 两坐标系有相同的长度单位和相同的坐标轴正向．设坐标系 ox的原点o 在坐标系$o'x'$ 中的坐标为 8，求坐标系$o'x'$的原点o'在坐标系ox中的坐标。

解：已知点O在坐标系$o'x'$中的坐标$x'=8$．它在坐标系ox中的坐标为$x=o$，设点o'在坐标系ox中的坐标为x_0。则由(6)式得

$$x_0=x-x'=-8.$$

2.长度单位的变更 坐标系ox和$o'x'$的原点相同,坐标轴的正向相同，只是长度单位不同(如图1—7)。

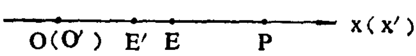

图 1—7

设在坐标系ox中，坐标系$o'x$的单位点E'的坐标为 k、P点的坐标为 x，即

$$OE'=k,\quad OP=x.$$

由于

$$OP=OE'\frac{OP}{OE'}.$$

而$\frac{OP}{OE'}$表示有向线段$\overline{OP}$用长度单位OE'去度量而得的数值，就是P点在坐标系$o'x'$中的坐标x'。于是就有

$$x=kx'. \qquad (8)$$

这就是在单位变更的情况下，用坐标x'表示坐标x的公式。

例 3 两坐标系有相同的原点和正向。设坐标系ox的单位点E在坐标系$o'x'$中的坐标为 3 .求坐标系$o'x'$的单位点E'在坐标系ox中的坐标。

解：已知点E在坐标系$o'x'$中的坐标为$x'=3$. 它在坐标系ox中的坐标为$x=1$. 设点E'在坐标系ox中的坐标为k，则由（8）式得

$$1=3k.$$

于是

$$k=\frac{1}{3}.$$

习 题 1·2

1.坐标轴上两点P_1和P_2的坐标分别为x_1和x_2，设

（1） $x_1=11$， $x_2=8$； （2） $x_1=-6$， $x_2=7$；

（3） $x_1=-5$， $x_2=0$； （4） $x_1=-2$， $x_2=-3$.

求P_1P_2、P_2P_1和$|P_1P_2|$.

2.设A、B、C、D、E和F是直线上的六个点，求证：

$$AB+BC+CD+DE+EF+FA=0.$$

3.设A、B、C和D是一直线上的四个点，P和Q分别为有向线段$\overline{AB}$和$\overline{CD}$的中点，试证：

$$2PQ=AC+BD=AD+BC.$$

4.试计算P_1点的坐标，已知：

(1) $P_2(3)$和$P_1P_2=5$；　　(2) $P_2(2)$和$P_1P_2=-3$；

(3) $P_2(-1)$和$P_1P_2=2$；　　(4) $P_2(-5)$和$P_1P_2=-3$。

5. 在直线上有两个坐标系ox和$o'x'$。已知它们的原点相同，长度单位一样，只是坐标轴的正向相反。求同一点P在这两个坐标系中的坐标之间的关系。

§1.3 平面上点的直角坐标

关于平面解析几何的内容，在中学数学中已经介绍了很多。这一节我们只介绍平面上的直角坐标系的建立、关于坐标轴和原点的对称点以及直角坐标变换。

一、平面直角坐标系

在平面上任取一点，用字母O表示，叫做原点，过O点引两条互相垂直的直线，规定它们的正向，用箭头表示，并分别标以字母x和y。在两直线上选取相同的长度单位。通常一条直线画成水平的，从左向右的方向作为正向，另一条直线从下向上的方向作为正向，如图1—8。互相垂直的这两条直线叫做坐标轴。水平的那一条叫做横轴，也叫做x轴。另一条叫做纵轴，也叫做y轴。

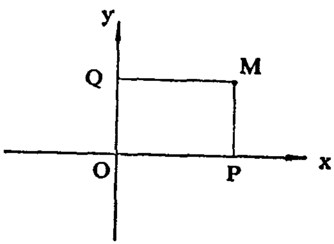

图 1—8

设M为平面上的任一点，过点M分别作x轴和y轴的垂线，它们的垂足相应地用P和Q表示。P点在x轴上的坐标系中，它的坐标用$x(x=OP)$表示。Q点在y轴上的坐标系中，它的坐标用$y(y=OQ)$表示。因为两个垂足P和Q各是唯一的。所以对