三角学

四川师范学院数学系

毛主席語录

教育必須为无产阶級政治服务，必須同生产劳动相結合。

事物矛盾的法則，即对立統一的法則，是自然和社会的根本法則，因而也是思維的根本法則。

理性認識依賴于感性認識。感性認識有待于发展到理性認識，这就是辯証唯物論的認識論。

学制要縮短。課程設置要精簡。教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

三　角　学

目　录

第一章 任意角的三角函数

第一节 角的概念的普遍化

一、角的概念的推广

在平面几何里，我们把角规定为由一点引出的两条射线所构成的几何图形，角的大小是限制在0°到360°之间的。但在人们的社会生产和实际生活中，常常遇到如飞轮的转动、时针的旋转等现象，要全面地反映这些物体的运动规律，上述角的定义就显得无能为力了。因此，我们必须把角的概念加以推广。怎样推广呢？我们先看看下面的实际例子：

各种机器上的齿轮，是用来变速或改变运动方向的重要条件。如图1—1是两个互相啣接的齿轮，主动轮和从动轮的齿数比为1：2，当主动轮转动一圈时，从动轮只转半圈。即是说、当主动轮旋转360°时，从动轮只转180°。当主动轮旋转720°时，从动轮转一圈即360°。

在这里齿轮的转角是由齿轮旋转成的，角的大小已经不再受0°到360°的限制，它可以是大于360°的角了

从这个例子中，我们还可以看出，它们旋转的方向是不同的、如果主动轮是按逆时针方向旋转时，则从动轮就按顺时针方向旋转。即是说、它们旋转的方向恰好是相反的。为了反映它们旋转方向的不同，和代数里有理数的情形一样，我们采用转角的正、负来加以区别。

类似这种情况，在生产实践中是很多的、这些客观事物的现象，在人们头脑中经过了多次的反复，使得我们能够摆脱事物的各种具体属性，而仅仅只顾及这些事物所共有的空间形式和数量关系，进行科学的抽象、形成了角的概念。

定义　平面上射线绕它的端点旋转时、射线所经过的部分叫做角。射线的起始位置叫做角的始边，最终位置叫做角的终边。射线的端点叫做角的顶点。

在图1—2中，OA是α角的始边、OC是α角的终边，O点是α角的顶点，α角也可记为$\angle AOC$。

当然、由于旋转，射线的起始位置和最终位置恰好构成以前称之为角的几何图形，在这一点上正是新旧定义间的关系。但是，按新的定义来说，射线可以从始边按两个不同的方向旋转到终边，（如图1—2中箭头所示的方向），而且可以继续旋转任何整周后再到终边位

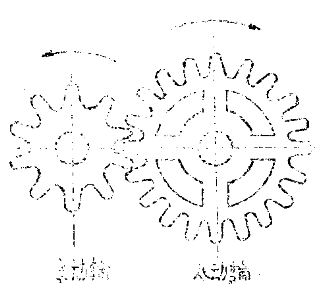


图　1—1

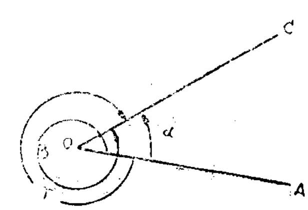


图　1—2

置、这就是说，无限个不同的角可以有相同的顶点、始边和终边。因此，要给出一个确定的角时，不但要给出它的顶点，始边和终边，而且要指出它是怎样由始边旋转到终边的。

角既是由始边到终边所作的旋转，而旋转又有两个相反的方向，为了区别旋转方向，通常在图形上我们规定：依逆时针方向旋转的角是正角，依顺时针方向旋转的角是负角。在图1—2中，α，β是正角，γ是负角。今后我们所说的角，都是这种具有方向的角。下面我们谈一谈有向角的相加问题。

二、有相角的相加法则

要把若干个有方向的角相加，我们采取与直线上有向线段相加的方法相类似的法则如下：

若干个有向角相加，是把第二个角的始边重合在第一个角的终边上（顶点应重合，以下皆同），第三个角的始边重合在第二个角的终边上，照此做下去，最后得到一个以第一个角的始边为始边，以最末一个角的终边为终边的有向角，此角即为诸角之和。

根据这个法则，我们恒有下列等式成立：

$$\angle A_1OA_2+\angle A_2OA_3+\cdots\cdots+\angle A_nOA_{n+1}=\angle A_1OA_{n+1}$$

在图1——3中就是表示$n=4$的情形。最后，我们谈一下始边和终边相同的角的一般表示法：

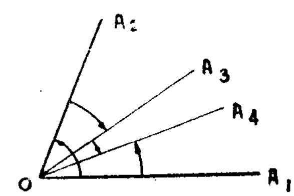


图 1—3

我们知道，和一个已知角具有相同的始边和终边的角有无限多个。设α是已知角，则

$360°+\alpha$，$2\times360°+\alpha$，……，$n\times360°+\alpha$，……，$-360°+\alpha$，$-2\times360°+\alpha$，……，$-n\times360°+\alpha$，……。（n为自然数）

这无穷多个角都和已知角α具有相同的始边和终边。总括的说，所有和α角具有相同的始边和终边的角连同α角在内的一般形式为：

$k.360°+\alpha$（$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots$）在以后的学习里，角常用弧度制度量，在《初等几何》里已学过：在一个园中，弧长等于半径r的一段弧，它所对的园心角，就是一弧度的角。

弧度制和角度制（即度、分、秒制）的换算关系是

2π弧度$=360°$

即1弧度$=\dfrac{180°}{\pi}=57°17'45''$，

$1°=\dfrac{\pi}{180°}=0.01745$弧度，

在书写时，一般把“弧度”二字省略，如写

$30°=\dfrac{\pi}{6}$，　$45°=\dfrac{\pi}{4}$，　$60°=\dfrac{\pi}{3}$，　$90°=\dfrac{\pi}{2}$，

$180°=\pi$；　$360°=2\pi$；

$1=57°17'45''$　$\dfrac{1}{2}=28°38'53''$；等等。

这样，如果α的单位是弧度，那么同一个终边代表的任意转角，可以写成

$2k\pi+\alpha$　　（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$）

在三角里，我们常把角放在直角坐标系里来研究，通常以坐标原点O作为角的顶点，Ox 轴的正半轴作为角的始边。当角的终边在那一象限内，我们就说这个角是那一象限的角，或者说这个角在那一象限内。如图1——4中∠AOB就是第一象限的角。∠AOC是第二象限的角。

（注）本课所讲内容，若无特别声明，都是就平面内讲的。

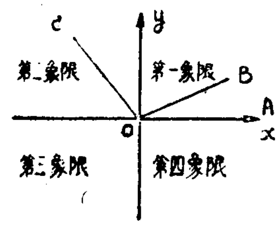


图 1—4

第二节 任意角的三角函数的概念定义域和符号

一、问题的提出和三角函数的定义

在平面几何里，我们研究了直角三角形的边角关系，引进了锐角三角函数，讨论了直角三角形的解法。由于生产的不断发展，许多问题锐角三角函数已显得不够用了，必须加以扩充，以适应新的形势。例如，我们常见的火车头或其它发动机上的曲柄连杆机构如图1——5当运动刚开始时，曲柄OC与连杆BC在一条直线上，即OC在OA的位置。当活塞运动时，B点跟着在水平直线上来回运动，从而推动曲柄OC绕O点转动，即推动飞轮作园周运动。现在要研究一下活塞B的运动规律。即活塞B与曲柄轴O之间的距离S随角α的变化规律，

我们把曲柄连杆机构放在直角坐标系里如图 1 —— 6，先假定转角 α 为锐角时，求 S 的变化规律。

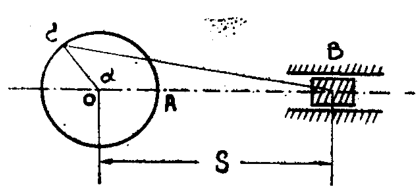


图 1—5

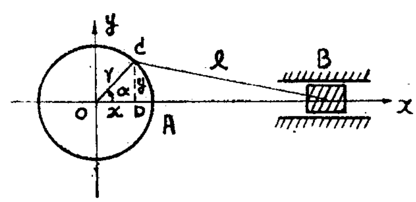


图 1—6

设BC之长为L，OC长为r，C点坐标为（x，y），作CD⊥OB。则S＝OD＋DB，在直角三角形OCD中，$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，　$\therefore\ y=r\sin\alpha$，$x=r\cos\alpha$，从而活塞B的运动规律可以用锐角三角函数表示出来：

$$S=r\cos\alpha+\sqrt{L^2-r^2\sin^2\alpha}。$$

当活塞B 继续推动飞轮绕O点转动时，角α就成了大于９０°的任意角了，这时活塞的运动规律就不能再用锐角三角函数来表示，因此，需要将三角函数扩充到任意角三角函数。但怎样将三角函数的概念扩充到任意角呢？人们把角放在直角坐标系里来考查，经过反复的实践，找到了一种定义三角函数的新方法。比如在上述问题中，当 α 角是锐角时，

$$\sin\alpha=\frac{\text{C点的纵坐标}}{\text{OC的长}}。$$

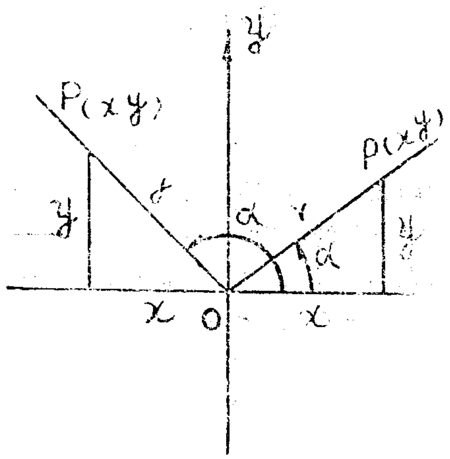
$$\cos\alpha=\frac{\text{C点的横坐标}}{\text{OC的长}}。$$

这样启发我们想到当 α 是任意角时，仍然用这样的定义，长期实践证明：这种认识是符合客观规律的。这样规定后，不论α角为什么角，活塞的运动规律，恒可用关系式

$$S=r\cos\alpha+\sqrt{L^2-r^2\sin^2\alpha}$$

反映出来。现在我们给出任意角的三角函数的定义如下：：

定义　　如图 1——7，设 α 是任意角，在 α 角的终边上任意取一异于O的点 P，设P点的横坐标是x、纵坐标是y，原点O到P点距离是r，横坐标x与纵坐标y的正负和直角坐标系里一样，距离r规定恒为正。



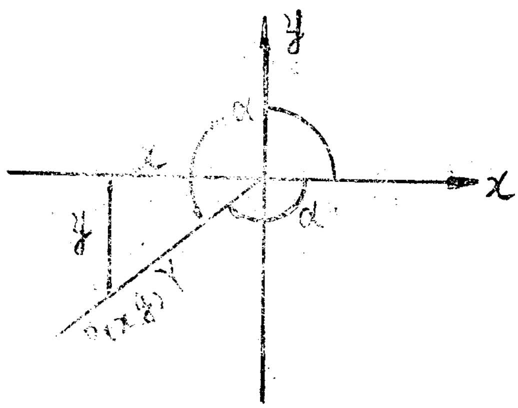


图　1—7

我们把比 $\frac{y}{r}$ 叫做α角的正弦，用sinα来表示，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

比 $\frac{x}{r}$ 叫做α角的余弦，用cosα来表示，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

比 $\frac{y}{x}$ 叫做α角的正切，用tgα 来表示，即 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x}$；

比 $\frac{x}{y}$ 叫做α角的余切，用ctgα来表示，即 $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$；

比 $\frac{r}{x}$ 叫做α角的正割，用secα来表示，即 $\sec\alpha=\frac{r}{x}$；

比 $\frac{r}{y}$ 叫α角的余割，用 cscα 来表示，即 $\csc\alpha=\frac{r}{y}$。

容易证明，上述定义中的六个比值，只与α角的大小有关，而与P点在α角终边上位置无关。

事实上，如图1 —8，

如果我们在α角的终边上再取一点P′ (x′，y′)（异于O点）。设OP′＝r′，显然，x′与x同号，y′与y同号，且△OP′Q′∽△OPQ，所以

$$\frac{y'}{r'}=\frac{y}{r},\quad \frac{x'}{r}=\frac{x}{r},\quad \frac{y'}{x'}=\frac{y}{x},$$

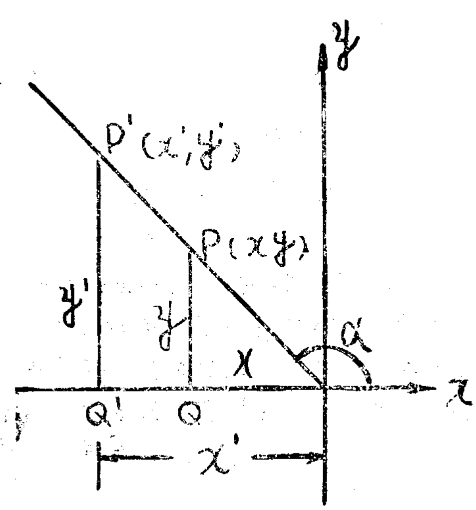


图　1—8

$$\frac{x'}{y'}=\frac{x}{y},\quad \frac{r'}{x'}=\frac{r}{x},\quad \frac{r'}{y'}=\frac{r}{y},$$

即是说，对于一个确定的α角，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{ctg}\alpha$，$\sec\alpha$，$\csc\alpha$都有唯一确定的值。根据函数的定义，因此，α角的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割都是α角的函数，这些函数我们就叫做三角函数。

很明显，如果α角是锐角，上述定义的三角函数和平面几何里所定义的锐角三角函数是完全一样的。因此，锐角三角函数是任意角的三角函数的特例，而任意角的三角函数是锐角三角函数的发展。

我们知道对于锐角三角函数来说，自变量α是在0°到90°（0到$\frac{\pi}{2}$）之间取值，这时所有的三角函数值都是有意义的，（即唯一确定的），因此，在这种情况下，锐角函数的定义域，勿需进行特别研究。现在自变量α的变化范围扩大了，即α可以是任意的值，是否对于所对应的三角函数值都有意义呢？下面我们就来讨论这个问题，这就是三角函数的定义域问题。（在下面的讨论里，我们对三角函数的自变量α采用弧度制，而且相应地把α看作取实数值）。

为了今后书写的简便，我们引入区间记号，设a、b是二实数，且$a<b$，我们把满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的一切实数x，用记号$[a,b]$表示，并称它为闭区间$[a,b]$。

满足不等式$a<x<b$的一切实数x，用记号(a,b)表示，并称它为开区间(a,b)。

对于所有实数，我们用记号$(-\infty,+\infty)$表示。

现在我们来讨论，对于自变量α的哪些值，三角函数才有意义，由三角函数定义可知，对于任意的α，不管点$P(x,y)$（异于O点）在α的终边上的位置如何，$OP=r$恒为正数，故比$\frac{y}{r}$与$\frac{x}{r}$恒有意义，即$\sin\alpha$与$\cos\alpha$恒有意义，所以正弦函数与余弦函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$。

由正切函数的定义，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$，可知当$x=0$时，正切函数失去意义，即是当点$P(x,y)$的横坐标为0时，$\operatorname{tg}\alpha$就没有意义了。只有当α角的终边与纵坐标轴oy重合时，点$P(x,y)$的横坐标才为0，而终边与oy轴重合的角的一般形式为：$k\pi+\frac{\pi}{2}$　$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$

因此，正切函数$\operatorname{tg}\alpha$的定义域是$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，或者说正切函数的定义域是除$k\pi+\frac{\pi}{2}$（k为整数）以外的一切实数，把它写成开区间的形式为：

$\cdots\cdots$，$\left(-\frac{3\pi}{2}、-\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(-\frac{\pi}{2}、\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2}、\frac{3\pi}{2}\right)$　$\cdots\cdots$。

对于余切函数的定义域可类似地求出。$\operatorname{ctg}\alpha$的定义域是$\alpha\neq k\pi$（k为整数），写成开区间的形式为：

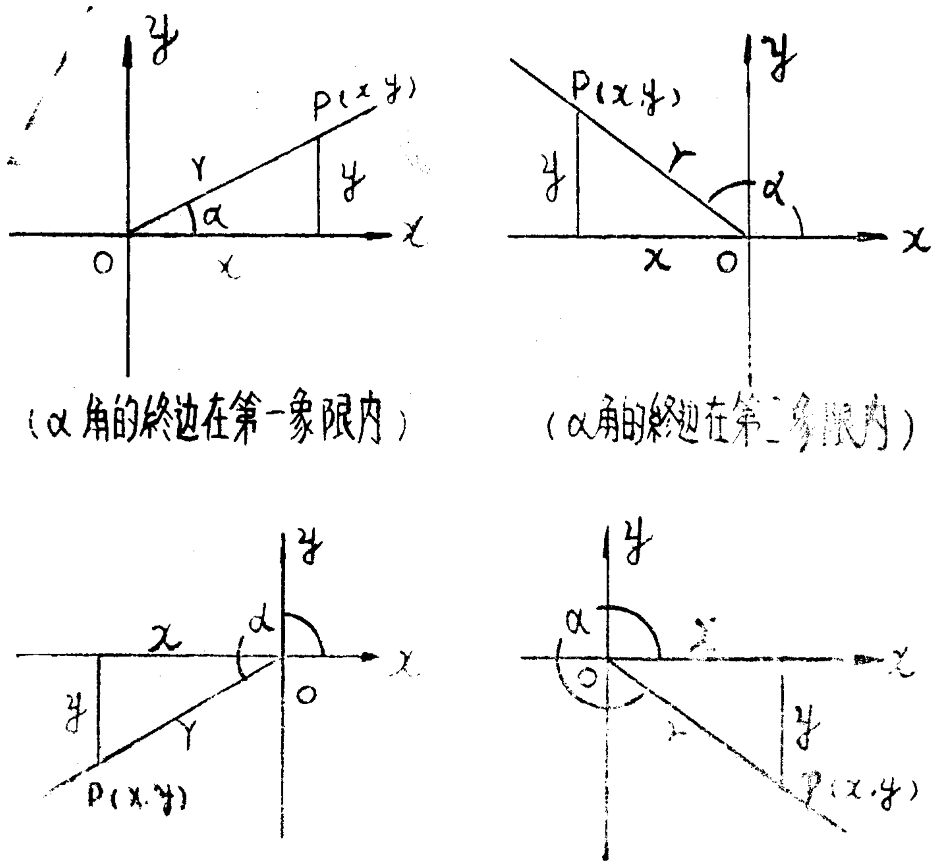
$\cdots\cdots$，$(-2\pi,-\pi)$，$(-\pi,0)$，$(0,\pi)$，$\cdots\cdots$。

对于正割函数$\sec\alpha$与余割函数$\csc\alpha$的定义域，根据他们的定义是容易求出的，留给读者讨论。

三、三角函数的符号

对于锐角三角函数来说，它的符号始终是正的、对于任意角的三角函数，由于角在不同

的象限内，横坐标与纵坐标的符号有正、有负，所以三角函数的符号也有正、有负，以正弦为例，α角的终边在直角坐标系里的位置关系有四种情形，如图1——9。



（α角的终边在第一象限内）　（α角的终边在第二象限内）

（α角的终边在第三象限内）　（α角的终边在第四象限内）

图 1—9

由定义 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$ 当α角的终边在第一、二象限时，纵坐标为正，而r恒为正、此时，$\sin\alpha$ 为正；当α角的终边在第三、四象限时，纵坐标为负，r为正、此时$\sin\alpha$为负。

仿此，可推出其它三角函数在各象限的符号，归纳如下：（见下页图1—10）

由此可见，锐角三角函数恒正这一性质，是锐角三角函数的一个特性、而非任意角的三角函数的共性，“一切个性都是有条件地暂时地存在的，所以是相对的。”因此，我们在应用时，一定要弄清α角所在的象限，才能确定相应的三角函数的符号。

例1．已知α角的终边上一点P的坐标是（2，－3），求$\sin\alpha$，$tg\alpha$之值。

解：如图1——11，（见下页）由已知

$x=2$，$y=-3$；

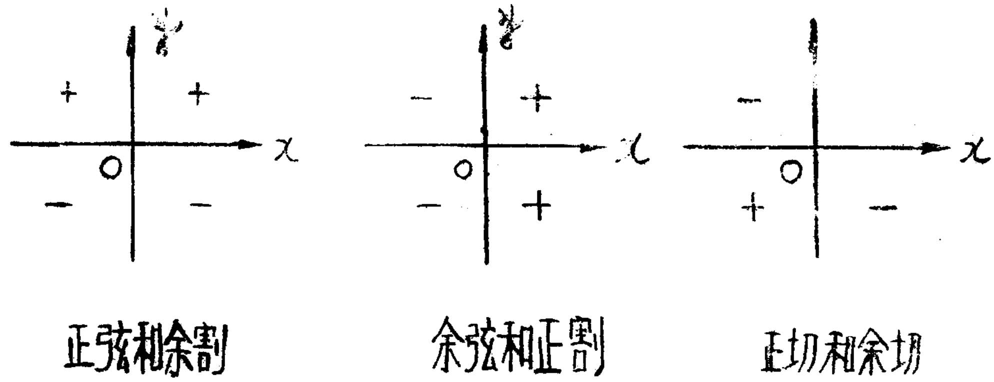


图 1—10

$\therefore\ r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$。

由三角函数定义

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3}{\sqrt{13}}$

$tg\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2}$

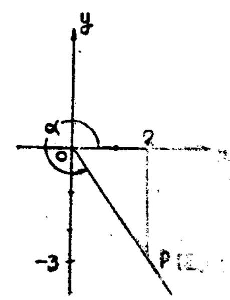


图1—11

例2.决定下列三角函数的符号：

1) $\sin135°$，2) $\sin(-135°)$，3) $\cos750°$

解：1) ∵135°的角在第二象限内，而第二象限内的正弦为正，∴$\sin 135°>0$。

2) ∵−135°的角在第三象限内，而第三象限内的正弦为负，∴$\sin(-135°)<0$。

3) 因为$750°=2\times360°+30°$，它与30°的角有相同的终边，因此，750°的角在第一象限内，所以$\cos750°>0$

(注)由于$\sec\alpha$与$\csc\alpha$应用较少，且从定义可以看出它们分别是$\cos\alpha$与$\sin\alpha$的倒数，因此，今后不单独研究正割函数与余割函数了。

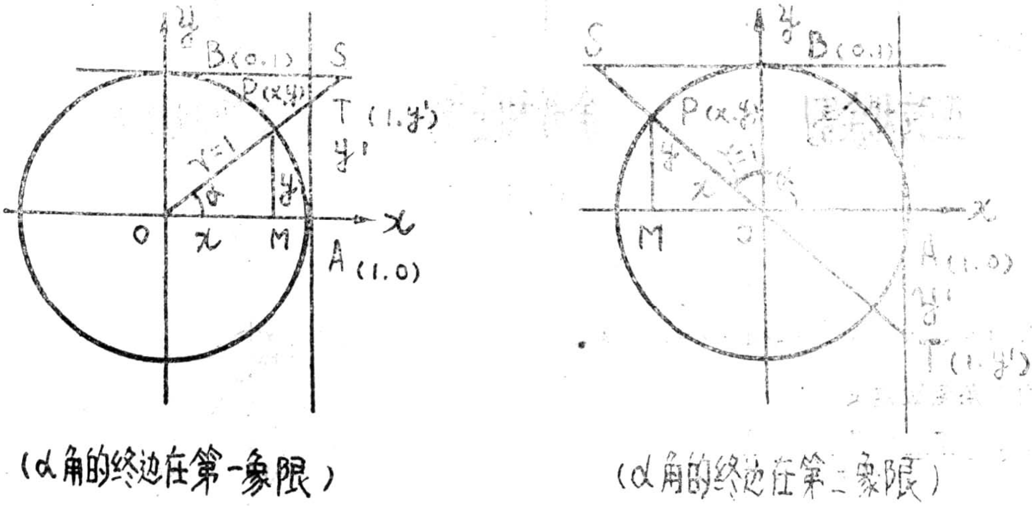
第三节　单位园和特殊角的三角函数値

伟大领袖毛主席教导我们："和形而上学的宇宙观相反，唯物辩证法的宇宙观主张从事物的内部，从一事物对它事物的关系去研究事物的发展。"（引《矛盾论》），因此，对三角函数的研究不仅从它的内部，而且也应当从与它相联系的事物去考察。我们知道、三角函数的值是由它的自变量α角终边上的P点的坐标而定，不论α角怎样变化，如果我们始终保持它终边上的P点与原点O成一定距离，这对我们研究三角函数值的变化是很简便的。当α角的终边旋转一周时，P点的轨迹就是一个园了，这就有必要使我们把三角函数与园形联系起来考察了。正如恩格斯在《自然辩证法》中所指出的那样："在综合几何学只从三角形本身详述了三角形的性质并且再没有什么新东西可说之后，一个更广阔的天地被一个非常简单的、

彻底辩证的方法开拓出来了，三角形不再被孤立地只从它本身来考察，而是和另一种图形；和园形联系起来考察。”

、单位园

以坐标原点O为园心，以一个单位长的线段为半径作出的园，叫做单位园。单位园与两坐标轴的正半轴的两交点A(1, 0)，B (0, 1)叫做单位点（如图1——12）



（α角的终边在第一象限）　　　　（α角的终边在第二象限）

图　1—12

设单位园与α角的终边相交于点P（x,y），从P点作ox轴的垂线PM，过A、B两点分别作单位园的切线，此二切线分别与α角的终边（或其反向延长线）相交于T、S两点。（如图1——12）

我们把图中的横线段与纵线段都看成是带有符号的线段，横线段的符号规定和横坐标的符号一样，纵线段符号的规定和纵坐标的符号一样，其它线段我们总看成是正的。这样就可用单位园上的线段来表示三角函数值了。

根据正弦和余弦的定义（如图1——12）

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r},$$

这里$r=OP$是单位园的半径，即$r=1$，所以$\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，这就是说，$\sin\alpha$的值就是α角的终边与单位园的交点P（x,y）的纵坐标；$\cos\alpha$的值就是α角的终边与单位园的交点P(x,y)的横坐标。换句话说，$\sin\alpha$和$\cos\alpha$的值分别可以用单位园中的线段MP和OM的长连同它们的符号来表示。线段MP和OM分别叫做α角的正弦线和余弦线。

设T点的坐标为(x',y')，根据正切的定义

$$tg\alpha=\frac{y'}{x'},$$

因为T点是在过点A（1，0）的单位园的切线上，故$x'=1$，从而$tg\alpha=y'$。即是说$tg\alpha$的值可以用线段AT的长连同它的符号来表示，线段AT叫做α角的正切线。

同理，$ctg\alpha$的值可以用线段BS的长连同它的符号来表示，线段BS叫做α角的余切线。

二、特殊角的三角函数值

如图1——13所示，设单位园与两坐标轴的四个交点分别为A（1.0），B（0.1）、C（−1，0），D（0,−1），现在我们来求$0, \frac{\pi}{2}$，π和$\frac{3\pi}{2}$的三角函数值。

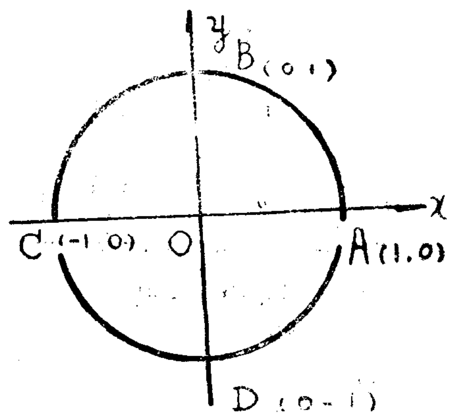


图 1—13

1.当角$\alpha=0$时，这时角的终边与始边重合，即α角的终边与Ox轴的正半轴重合，与单位园的交点为A（1，0），根据上面所说，$\sin 0$与$\cos 0$的值分别等于点A(1,0)的纵坐标与横坐标，即$\sin 0=0$，$\cos 0=1$.由正切的定义，有$tg 0=\frac{0}{1}=0$。

而当$\alpha=0$时，余切无意义或者说余切不存在。

2.当角$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，这时角的终边和oy轴的正半轴重合，α角的终边与单位园的交点为B(0,1)。故$\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\cos\frac{\pi}{2}=0$，$ctg\frac{\pi}{2}=\frac{0}{1}=0$。

此时正切不存在。

3.当角$\alpha=\pi$时，角的终边与0x轴的负半轴重合，与单位园的交点为C(−1 0)。

因此，$\sin\pi=0$；$\cos\pi=-1$，$tg\pi=\frac{0}{-1}=0$。此时余切不存在。

4.当角$\alpha=\frac{3\pi}{2}$时，同样可得

$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$，　$\cos\frac{3\pi}{2}=0$，　$ctg\frac{3\pi}{2}=0$，　正切不存在。

5.当α为$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$时，它们对应的三角函数值与在锐角三角函数里所讲的是一致的，这里就不重复了。

为了清楚和便于查用，我们把这些特殊角的三角函数值列表如下：

α 角的值 / 函数	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在
$\mathrm{ctg}\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0

例1. 求 $\sin 0° + \mathrm{tg}45° + \cos 180° - \sin 270°$ 之值。

解. $\sin 0° + \mathrm{tg}45° + \cos 180° - \sin 270°$

$= 0 + 1 + (-1) - (-1)$

$= 1$。

例2. 求 $\sin\frac{\pi}{2} - \mathrm{tg}\,\pi + \cos\frac{3\pi}{2} \times \sin\frac{\pi}{4} + \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}$ 之值。

解 原式 $= 1 - 0 + 0 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (\sqrt{3})^2$

$= 1 + 3$

$= 4$

例3. 试证 $\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6} + \mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2} + \sin^2\frac{3\pi}{2}$

$= \cos^2\frac{\pi}{6}$

证 原式左端 $= \frac{1}{2} - 1^2 + \frac{3}{4} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 0 + (-1)^2$

$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} + 0 + 1$

$= \frac{3}{4}$。

原式右端 $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$。

故 左端 = 右端。 即原式成立。

第四节　三角函數間的基本关系与已知一个三角函數值求其余各三角函數的值

一　三角函数间的基本关系

根据三角函数的定义，对于任意角的三角函数之间有下列关系成立：

1.倒数关系

由第二节三角函数的定义，有

$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}=1;$$

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=\frac{x}{r}\cdot\frac{r}{x}=1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=1。$$

即　$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$；（$\alpha\neq k\pi$，k为整数）

$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$；（$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，k为整数）

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$。（$\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$，k为整数）

2.商数关系

根据三角函数的定义，有

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y}{r}\div\frac{x}{r}=\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{x}{r}\div\frac{y}{r}=\frac{x}{y}=\operatorname{ctg}\alpha$$

即$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$（$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，k为整数）

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$（$\alpha\neq k\pi$，k为整数）

3.　平方关系

因为$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=(\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=\frac{y^2+x^2}{r^2}$

而　$x^2+y^2=r^2$

所以　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

在这个等式中两端分别除以$\cos^2\alpha$与$\sin^2\alpha$，（$\sin\alpha\neq0,\cos\alpha\neq0$）可以得到：

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

与　$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

故　$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha$；

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$。

即有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；（对任意的$\alpha$均成立）

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$（$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k$为为整数）

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$（$\alpha\neq k\pi$，$k$为整数）

例1.试证 $(\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha)\mathrm{ctg}^2\alpha=\sin^2\alpha$

证：$\because(\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha)\mathrm{ctg}^2\alpha$

$$=\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha\right)\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$=1-\cos^2\alpha$$

$$=\sin^2\alpha.$$ $\therefore$等式成立。

例2.试分别用$\sin\alpha$，$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{ctg}\alpha$表示出$\cos\alpha$来

解 $\because\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\therefore\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ 即 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$又从等式$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$及

$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ 可得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$，从而 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$ 由$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$

代入上式即得

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha}}}=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}}=\pm\frac{|\mathrm{ctg}\alpha|}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}=\pm\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$$

二 已知一个三角函数值求其余各三角函数的值

由上面所推出的三角函数间的基本关系，我们可以根据一个三角函数的值计算其余的三角函数值，现在举例如下：

例1.已知α在第一象限内，并且 $\sin\alpha=\frac{1}{4}$求α的其余各三角函数的值。

解.因为α角在第一象限内，所以它的各三角函数的值都是正的 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}；\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\sqrt{15}；$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{4\sqrt{15}}{15}；$$

$$\mathrm{cse}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=4。$$

例2.已知$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，α在第三象限内，，求$\sin\alpha$，$\mathrm{tg}\alpha$之值。

解 因为α在第三象限内，故$\sin\alpha$为负，$\mathrm{tg}\alpha$为正。

因此，$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{-3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}.$$

例3、　已知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，求α的其它各三角函数值。

解　由已知$\sin\alpha$为正，故α可能在第一象限内，也可能在第二象限内。

对于第一象限内的α角，我们有：

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{5}{4};$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{5}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4}{3}$$

对于第二象限内的α角，同样有：

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{4}{3};$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=-\frac{5}{4};\qquad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{5}{3}.$$

例4、　已知$\operatorname{tg}\alpha=m\,(m\neq0)$，求$\sin\alpha$，$\cos\alpha$之值

解　因为$m\neq0$，故m可为正值，也可为负值，从而α可在四个象限内取值。

对于第一、四象限的α角，我们有：

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$$