高中数学复习纲要

科学普及出版社

編者的話

在中等教育里，数学是一門比較重要的課程；因此在高中畢业之前，全面地系統地复習几年来所学过的各科数学是完全必要的，这不但可以更巩固地掌握已学过的知識，而且还能更系統地了解到所学过的各个部份的知識之間的关系。这样的复習，对畢业同学来說，不論是参加工作或是繼續学習，都有很大的益处。

几年来我們在輔导同学們复習时，編写了一份复習綱要，这份綱要是根据現行中学数学課本、中学数学教学大綱以及高等学校招生考試大綱等編写的，內容力求严謹和簡明，其中只有極少部份的材料超出了中学数学教学大綱的要求，但这是同学們完全可以接受的，而且也便于将来学習高等数学。在綱要中配备了一些复習題，这些复習題的类型較多，而且尽量避免重复。我們的意圖是不再使同学作大量的習題，而希望他們在作每一个題时，能仔細地反复地体会所学过的知識，而达到复習的目的。

这本綱要經过几年来的实践，感到还可以給更多的同学使用，同时也可以給指导高中畢业班数学复習的老师們参考，对在职干部自学中学数学也有一些帮助。在文化大跃进中，为了适应讀者需要，暫作試行本刊出，以广泛征求各方面的意見。由于我們的业务水平低，見聞少，經驗不足，書中的缺点和錯誤一定很多，請讀者多加批評，使我們及时修訂改进。

本書承崔万鵬和赵实礼两同志制圖与校訂，謹致以謝意。

編　者

目　　次

第一部分　代数

第一单元　数的概念

一、自然数

(一)　自然数（即正整数）包括单位“1”、質数与合数。

有两个因数的自然数叫做質数。如2仅有两个因数1与2。有两个以上的因数的自然数叫做合数。如4有三个因数1、2与4。

(二)　性質

1. 在自然数集合中，有最小的数“1”，而沒有最大的数。

2. 自然数有順序性。即任意两个自然数可以比大小。

3. 在自然数集合中，永远可以施行加法与乘法两种运算。即自然数相加或相乘，它們的和或积，仍然是自然数。

二、整数

(一)　整数包括正整数、零和負整数。

(二)　性質

1. 在整数集合中，沒有最小的数，也沒有最大的数。

2. 整数有順序性。

3. 在整数集合中，永远可以施行加法，減法与乘法三种运算。

4. 整数的几何意义是数軸上孤立的整数点。

三、有理数

(一)　定义　能用两个整数的比来表示的数叫做有理数。

有理数包括整数和分数。分数可化为有限小数或无限循

环小数，又整数和有限小数也可化为无限循环小数（如$2=2.\dot{0}$或$1.\dot{9}$，$2.5=2.5\dot{0}$或$2.4\dot{9}$。）。相反的，无限循环小数都可化为分数或整数。因此，有理数的定义也可以叙述如下：无限循环小数叫做有理数。

（二） 性質

1. 在有理数集合中，沒有最小的数，也沒有最大的数。

2. 有理数有順序性。

3. 有理数有稠密性。即任二有理数之間都存在有其他有理数。如对任二有理数a、b来說，取其等差中項$\frac{a+b}{2}$即可。

4. 有理数有間断性。比如沒有任一有理数的平方是2。

5. 有理数的几何意义是数軸上密集而有空隙的有理点。

6. 在有理数集合中，加、減、乘、除四則运算可以通行无阻（但除数不得为零）。

四、实数

（一） 方根

1. 定义 如$x^n=a$，則x叫做a的n次方根。記作$x=\sqrt[n]{a}$（这里n是大于1的自然数）。

如$a\geqq0$，在实数集合内，$\sqrt[n]{a}$永远有意义。

如$a<0$，在实数集合内，n为奇数时，$\sqrt[n]{a}$有意义；n为偶数时，$\sqrt[n]{a}$无意义。

2. 算术根 正数的正的方根叫做这个正数的算术根。如2是4的算术根，記作$\sqrt{4}=2$。

3. 一个負数的奇数次方根等于这个負数的相反数的同次根的相反数。即当$a>0$，且n为奇数时，$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$。如$\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$。

例 化簡$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}$。

此处$\sqrt{(x-2)^2}$、$\sqrt{(x-3)^2}$都是$(x-2)^2$、$(x-3)^2$的算术根

其值都不小于零。

〔解〕 $\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=(x-2)-(x+3)=-5$；（当 $x\geqq 2$）

$=-(x-2)-[-(x+3)]=5$；

（当 $x\leqq -3$）

$=-(x-2)-(x+3)=-2x-1$。

（当 $-3<x<2$）

（二） 无理数 无限不循环小数叫做无理数。通常以十进小数表示之。

如 α 为一正无理数，又 $\alpha=p.q_1q_2q_3\cdots q_n\cdots$，（这里 p 表示正整数，$q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n\cdots$ 表十进数碼 $0, 1, 2, \cdots, 9$。）

$$\alpha_n=p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\cdots+\frac{q_n}{10^n}\text{与}$$

$$\alpha'_n=p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\cdots+\frac{q_n+1}{10^n}$$

分别叫做 α 的精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足近似值和过剩近似值。因之，有 $\alpha_n<\alpha<\alpha'_n\left(\alpha'_n-\alpha_n=\frac{1}{10^n}\right)$。

例如 $\sqrt{2}=1.4142\cdots$，则 $\sqrt{2}$ 的精确到 $\frac{1}{1000}$ 的不足近似值和过剩近似值分别为 1.414 和 1.415。

（三） 实数

1. 定义 有理数和无理数总称实数。

2. 絶对值

$$|a|=\begin{cases}a; & \text{如 } a\geqq 0\\ -a. & \text{如 } a<0\end{cases}$$

它的几何意义是数 a 在数軸上所对应的点到原点間的距离。

例 1. 解方程 $|x-4|+|x+1|=5$。（x 为实数）

〔解〕 如 $x\geqq 4$ 时，原方程可变换为

$$x-4+x+1=5。$$

$$\therefore \qquad x=4。$$

如 $x\leqq -1$ 时，原方程可变换为

$$-(x-4)-(x+1)=5。$$

$$\therefore \qquad x=-1。$$

如 $-1<x<4$ 时，原方程可变换为

$$-(x-4)+(x+1)=5,$$

或 $$5=5。$$

可見区間 $-1<x<4$ 中的一切数都满足原方程。

所以由以上三点可知原方程的解为 $-1\leqq x\leqq 4$。

例2. 解方程 $|x+1|+|x+2|+3=0$。(x 为实数)

〔解〕 因为一实数的絕对值是非負数，所以这个方程无解。

3. 性質

(1) 在实数集合中，沒有最小的数和最大的数。

(2) 实数有順序性。

(3) 实数有稠密性。

(4) 实数有連續性。

(5) 在实数集合內，加、减、乘、除四則运算可以通行无阻（但除数不得为零）。

(6) 实数集合与数軸上的点集合間，建立了一一对应关系。(实数的几何意义是布滿整个数軸的点。)

4. 运算定律

a、b、c 都表示实数

(1) 交換律 $a+b=b+a$；$ab=ba$。

(2) 結合律 $a+(b+c)=(a+b)+c$；$a(bc)=(ab)c$。

(3) 乘法对加法的分配律 $a(b+c)=ab+ac$。

(四) 数的等式与不等式的性質

1. 等式的性質

(1) $a=a$。

(2) 如 $a=b$，则 $b=a$。

(3) 如 $a=b$，$b=c$，则 $a=c$。

(4) 如 $a=b$，则 $a+c=b+c$。

(5) 如 $a+c=b+c$，则 $a=b$。

(6) 如 $a=b$，则 $ac=bc$。

(7) 如 $ac=bc$，$c\neq o$，则 $a=b$。

(8) 如 $a=b$，$c=d$，则 $a\pm c=b\pm d$。

(9) 如 $a=b$，$c=d$，则 $ac=bd$；$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}(c\neq 0)$。

(10) 如 $a=b$，则 $a^n=b^n$。

(11) 如 $a=b$，$a>0$，$b>0$，则 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$。

2.不等式的性質

(1) $a>b$，$a=b$，$a<b$ 三者必居其一。

(2) 如 $a>b$，则 $b<a$；若 $b<a$，则 $a>b$。

(3) 如 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$。

(4) 如 $a>b$，则 $a+c>b+c$。

(5) 如 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$。

(6) 如 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$。

(7) 如 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$。

(8) 如 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$。

(9) 如 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$。

(10) 如 $a>b>0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

(11) 如 $a>b>0$，$0<c<d$，则$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$。

(12) 如 $a>b>0$，n 为大于 1 的整数，则 $a^n>b^n$。

(13) 如 $a>b>0$，n 为大于 1 的整数，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。

3. 絕对值的性質

(1) 如 $|x|<a$, $a>0$, 則 $-a<x<a$; 如 $|x|>a$, $a>0$, 則 $x>a$, 或 $x<-a$。

(2) 如 $-a<x<a$, $a>0$, 則 $|x|<a$; 如 $x>a$, 或 $x<-a$, $a>0$, 則 $|x|>a$。

(3) $|a|+|b|\geqq|a+b|$。

(4) $|a|-|b|\leqq|a+b|$。

(5) $|a|-|b|\leqq|a+b|\leqq|a|+|b|$。

(6) $|a|\cdot|b|=|a\cdot b|$。

(7) $\dfrac{|a|}{|b|}=\left|\dfrac{a}{b}\right|$。$(b\neq0)$。

(8) $|a|^n=|a^n|$。

五、复数

(一) 定义 平面上一个从原点出發的向量，所对应的实数对 (x,y) 叫做复数。記作 $x+yi$。

1. 当 x、y 为任意实数时，$x+yi$ 叫做复数。如 $0+0i$、$0+2i$、$3+2i$、$3+0i$。

2. 当 $y=0$ 时，$x+yi$ 即 x 叫做实数。如 $0+0i$、$3+0i$。

3. 当 $y\neq0$ 时，$x+yi$ 叫做虛数。如 $0+2i$、$3+2i$。

4. 当 $x=0$、$y\neq0$ 时，$x+yi$ 即 yi 叫做純虛数。如 $0+2i$。i 叫做純虛数的单位。又 $i^2=-1$。

在复数 $x+yi$ 中，x 和 yi 分别叫做它的实数部分和虛数部分。y 叫做虛数部分的系数。实数 x 和 y 表示 $x+yi$ 所对应的向量在两个坐标軸上的投影的大小。

(二) 复数的几何表示法 每一复数都可用复数平面上的点（或者以此点为終点，原点为始点的向量）来表示。

(三) 复数的模（絕对值）

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}。$$

它的几何意义是复数 $a+bi$ 在平面上所对应的点到原点間的距离。

（四） 共轭复数、相反复数 $a-bi$ 叫做 $a+bi$ 的共轭复数；$-a-bi$ 叫做 $a+bi$ 的相反复数。

（五） 复数相等、复数等于零

1. *当且仅当 $a=a'$，$b=b'$ 时，$a+bi=a'+b'i$；

2. 当且仅当 $a=0$，$b=0$ 时，$a+bi=0$。

（六） 复数的三角函数式

幅角定义 复数 $a+bi$ 所对应的向量与实数軸的正向所成的角，叫做这个复数的幅角。

$$\begin{aligned}a+bi&=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=\rho[\cos(2n\pi+\theta)+i\sin(2n\pi+\theta)]。\end{aligned}$$

（此处 n 为整数）

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}。$$

又 $a=\rho\cos\theta$，$b=\rho\sin\theta$。

例 1. 化 $\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$ 为三角函数式。

〔解〕 $\rho=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2$，

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1,\quad \therefore\ \theta=315^\circ。$$

所以 $\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i=2(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ)$

或 $\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i=2(\cos 45^\circ-i\sin 45^\circ)$。

例 2. 化 $-5-2i$ 为三角函数式。

---

* 述語"当且仅当"常常以述語"必須而且只須"来代替。这个述語表示了原命题与逆命题同时成立。如当且仅当（或必須而且只須）$a=0$，$b=0$ 时，$a+bi=0$。就是指：如 $a=0$，$b=0$ 时，則 $a+bi=0$；如 $a+bi=0$ 时，則 $a=0$，$b=0$。

$$\rho=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{29},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5},\quad \therefore\quad \theta=\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5}。$$

$$\therefore\quad -5-2i=\sqrt{29}\left[\cos\left(\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5}\right)\right]。$$

（七） 复数的运算

1. 加法定义 $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$。

复数加法满足結合律与交换律。

2. 减法定义 $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$。

3. 乘法定义

$$\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=$$

$$=\rho_1\rho_2(\cos\overline{\theta_1+\theta_2}+i\sin\overline{\theta_1+\theta_2})。$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i。$$

复数乘法满足結合律与交換律，并且复数乘法和加法被分配律联系着。

4. 除法定义

$$\frac{\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\overline{\theta_1-\theta_2}+i\sin\overline{\theta_1-\theta_2})。$$

$(\rho_2\neq 0)$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i。\quad (c+di\neq 0)$$

5. 乘方

(1) $i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i$。

（n 为整数）

(2) $[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$。（$n$为正整数）

(3) $(a+bi)^n=c_n^0a^n+c_n^1a^{n-1}bi+\cdots+c_n^n(bi)^n$。（$n$为正整数）

(4) $(a+bi)^0=1$。 $(a+bi\neq 0)$

(5) $(a+bi)^{-n}=\dfrac{1}{(a+bi)^n}$。$(a+bi\neq 0)$ (n 为正整数)

6. 开方

当 $b>0$ 时，$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\right.$

$$\left.+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)。$$

当 $b<0$ 时，$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-\right.$

$$\left.-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)。$$

$$\sqrt[n]{\rho[\cos(2k\pi+\theta)+i\sin(2k\pi+\theta)]}=$$

$$=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)。$$

$$(k=0,1,2,\cdots,\ n-1。)$$

例 1. 計算：(1) $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$； (2) $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}$。

〔解〕 (1) $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=(\pm 2i)(\pm 3i)=\pm 6i^2=\pm 6$；

(2) $$\sqrt{-4}+\sqrt{-9}=(\pm 2i)+(\pm 3i)=\begin{cases}2i+3i=5i;\\-2i+3i=i,\\2i-3i=-i,\\-2i-3i=-5i。\end{cases}$$

例 2. 如 $(x+y)^2i-\dfrac{6}{i}-x=-y+5(x+y)i-1$，求实数 x、y 的值。

〔解〕 以 i 乘原等式的两边，得

$$-(x+y)^2-6-xi=-yi-5(x+y)-i。$$

即 $$[(x+y)^2+6]+xi=5(x+y)+(y+1)i。$$

因 x、y 旣是实数，上面等式中等号两边的两个复数又相等，复数的实数部分和虚数部分的系数就必須对应相等。于是得方程組

$$\begin{cases}(x+y)^2+6=5(x+y),\\ x=y+1。\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}(x+y)^2-5(x+y)+6=0, & (1)\\ x-y=1。 & (2)\end{cases}$$

由 (1) 可得 $(x+y-2)(x+y-3)=0$。

$\therefore\ x+y=2$ 或 3。

解方程組

$$\begin{cases}x-y=1,\\ x+y=2;\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x-y=1,\\ x+y=3。\end{cases}$$

可得
$$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\ 2,\\ y=\dfrac{1}{2};\ 1。\end{cases}$$

例 3. 計算 $\dfrac{3-4i}{1+2i}+(4-i)-(1+i)^6$。

〔解〕 原式$=\dfrac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+(4-i)-[(1+i)^2]^3$

$$=\frac{3-8-4i-6i}{5}+(4-i)-(1+2i+i^2)^3$$

$$=(-1-2i)+(4-i)-(-8i)$$
$$=(-1+4)+(-2i-i+8i)$$
$$=3+5i$$

例 4. 計算 $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{50}$。

〔解〕 $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{50}=(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)^{50}$

$$=(\cos 6000^\circ+i\sin 6000^\circ)$$
$$=\cos(16\cdot 360^\circ+240^\circ)+$$
$$+i\sin(16\cdot 360^\circ+240^\circ)$$

$$=\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

例 5. 求 $5-12i$ 的平方根。

〔解〕 $$\sqrt{5-12i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right)$$
$$=\pm(3-2i)。$$

例 6. 求：$-2+2i$ 的立方根

〔解〕 $$\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}\left(\cos 2k\pi+\frac{3\pi}{4}+i\sin 2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{4}}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{4}}{3}\right)。$$
$$(k=0,1,2)$$
$$\therefore\ \sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ),$$
$$\sqrt{2}(\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ),$$
$$\sqrt{2}(\cos 285^\circ+i\sin 285^\circ)。$$

(八) 复数的性質

1. 复数没有順序性。即任二复数不能比大小。

2. 在复数集合中，加、减、乘、除、乘方、开方六种运算通行无阻（但除数不得为零）。

3. 复数集合与平面上的点集合間，建立了一一对应关系。

复習題一

1. 在自然数集合內，下列哪些方程有解？
(1) $x+2=5$; (2) $x+10=5$; (3) $x+3=3$。

2. 証明：任意四个連續自然数的积与 1 之和，必为某一自然数的平方数。

3. 証明：对任何正整数 n，$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 都是整数，并且用 3 除时余 2。

4. 在整数集合內，下列哪些方程有解？

(1) $x-2=5$；　(2) $x+5=2$；　(3) $3x-5=8$。

5. 整数 a、b、c 应滿足什么条件，才能使方程 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 都不是零）在整数集合內有解？

6. 有理数 a、b、c 应滿足什么条件，才能使方程 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 都不是零）在有理数集合內有解？

7. 化簡下列各式

(1) $\sqrt{a^2}$；　(2) $\sqrt{(x-2)^2}$；　$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}$。

8. 如果 $2x+1<0$，求証 $\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{1+4x+4x^2}=4$。

9. 哪些实数滿足下列方程

(1) $|x-2|+|x+1|=5$；(2) $|x+1|+|\sqrt{2}x+\sqrt{2}|+|\sqrt{3}x+\sqrt{3}|=0$；

(3) $|x-3|+\sqrt{2-x}=3$；　(4) $\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{2x-4}+1=0$。

10. 如 $\sec^2\theta=\frac{4xy}{(x+y)^2}$，則 $x=y$（x、y 是实数）。

11. 下列諸数哪些是有理数？哪些是无理数？

(1) $\sqrt{\frac{2318}{9}}$；　(2) $\sqrt{50.1264}$；

(3) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{32}$；　(4) $16^{\log_9 \operatorname{tg}(-840^\circ)}$；

(5) $2\sqrt{2}\sin 75^\circ$；　(6) $\left[81^{-0.25}-\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}$；

(7) $\lg\frac{75}{16}-2\lg\frac{5}{9}+\lg\frac{16}{27}$；　(8) $\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$。

12. m 为哪些实数值时，复数 $(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 为

(1) 实数；(2) 純虛数。

13. 求 $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ 的相反数、共軛数，并将它們用三角函数式表示之。

14. 化下列諸数为三角函数式

(1) -3；　(2) $-2i$；　(3) $3-2i$；　(4) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$。

15. 从下列关系里，求实数 x、y 的值

(1) $(x+2yi)+(y-3xi)-(5-5i)=0$；

(2) $\dfrac{(x+yi)+(1-3i)}{5+3i}=1+i$；

(3) $x^2-y^2+2xyi=8+6i$。

16. 求值

(1) $i^{97}+i^{102}+i^{303}-i^{27}$；　　(2) $i^{-4n}+i^{-4n+1}+i^{-4n+2}+i^{-4n+3}$。

17. 完成下列运算

(1) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}{\sqrt{5}-\sqrt{3}i}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}i}{\sqrt{3}-\sqrt{5}i}$；　(2) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$；

(3) $\dfrac{9i^{-24}-3\sqrt{2}\cdot i^{31}}{(3+\sqrt{2}i^{21})(1-\sqrt{2}i^{-33})}$；

(4) $\dfrac{3-9i}{1+2i}+(3+5i)+64(1+i)^{-10}$；

(5) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{1000}$； $= i$　　(6) $\sqrt{-15+8i}$；

(7) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{120}$；　　(8) $\sqrt[5]{-3+3i}$；

(9) $\sqrt[6]{-8i}$；

(10) $\dfrac{18-i}{4-3i}+i(3-5i)-\dfrac{55+3i}{5+7i}$；

(11) $3(\cos 125°-i\sin 125°)\cdot[\sqrt{2}(\cos 25°+i\sin 25°)]^3+$

$+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos 70°-i\sin 70°)$。

18. 如果 1、α、β 为方程 $x^3-1=0$ 的三个根，求証

(1) $(2+5\alpha+2\beta)^6=(2+2\alpha+5\beta)^6=729$；

(2) 如 n 不是 3 的倍数，則 $\alpha^n+\beta^n=-1$；如 n 是 3 的倍数，則 $\alpha^n+\beta^n=2$。

19. 在什么条件下复数 $a+bi$ 的平方为：(1) 实数；(2) 純虚数。

20. 解下列方程：

(1) $(2+i)x^2-4x+(i-2)=0$；　(2) $x^2+(3+2i)x+(3i-5)=0$。

第二单元　代数式的恒等变形

一、代数式　把数字或表示数的字母，用指明运算的种类（加、减、乘、除、乘方、开方）和顺序的符号联系起来，所得到的数学式子叫做代数式。

如果用数字代替代数式里的字母，并且按照指定的顺序，进行指定的运算，所得的結果叫做代数式的值。

代数式可分类如下：

（一）　有理式　由数字或表示数的字母，利用有限次的四則运算所組成的代数式叫做有理式。

1. 有理整式　在一有理式中，如不包含有以变数字母組成的式子作除式时，就叫做有理整式。簡称整式。

(1) 有理整式的四則运算

(2) 乘法公式

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$；

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$；

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$；

$(a+b+c+\cdots+m+k)^2=$

$=a^2+b^2+\cdots+k^2+2ab+\cdots+2mk$；

$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})=a^n-b^n$；

$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-b^{n-1})=$

$=a^n-b^n$；（n 为偶数）

$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})=$

$=a^n+b^n$。（n 为奇数）