高等数学教与学

内蒙古人民出版社

高等数学教与学

詹元亮　杨在中　红　英
孙淑云　巴达拉胡　姜长友　编著

内蒙古人民出版社

1988年·呼和浩特

高等数学教与学

詹元亮　杨在中　红　英
孙淑云　巴达拉胡　姜长友　编著

*

内蒙古人民出版社出版发行
（呼和浩特市新城西街82号）
内蒙古新华书店经销　内蒙古新华印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32　印张：23.375　字数：499千
1989年12月第一版　1990年6月第1次印刷
印数：1—5,370册
ISBN 7-204-00572-4/O·7　每册：7.90元

序 言

当前，高校中使用着多种《高等数学》教材，它们各有特色，侧重点不同，篇幅亦有长短，但基本内容却大致相同。与此同时，也存在着尽管大纲要求不同，讲授时数也不一样，但众多的各类院校的多种专业却共用一种课本的现象。那么，对于不同专业的学生来讲，共同的基本要求是什么？教材中，哪些是重点和难点；习题选择上，哪些仅供思考，哪些必作而哪些又属于提高类型等问题，一直为广大教师和学生所关注。面对上述情况，作者根据多年使用不同课本为各种专业讲授《高等数学》的经验和体会，编写了这本《高等数学教与学》，目的在于为探索解决上述问题起到抛砖引玉的作用。

本书共十二章，其排列顺序虽基本同于同济大学数学教研室主编的《高等数学》，但它却不仅仅是这一种课本的辅助教材。本书的每一章均由“内容提示”、“思考练习题”、“作业题”、“复习提高题”组成。书后还附有复习提高题的详细解答。每章的内容提示中包括“概述”、“重点和难点”、“基本要求”三部分。概述部分，主要讲述一般教材中由于种种原因不能详细叙述的重要概念产生的背景，必要的史实，本章在书中的地位以及前后章节的关系；重点和难点部分，主要叙述该章中哪些内容为重点，哪些是难点，并着

重讲解诸难点不容易理解的道理，同时指出克服它们的办法和途径；基本要求部分，简单明确地陈述学生学习本章内容的基本要求。“思考练习题”中所选的题目，一般是紧密配合基本概念、主要定理和一些重要运算法则的。为了减轻学生的负担，不要求将它们做在作业本上，经思考后认为会做，从而达到理解概念和主要内容的目的就行了。“作业题”是本着少而精的原则选择的。该部分题目，类型全面而不重复，难度适当，要求学生必做且有解题过程，务求独立完成。学生只要完成了思考练习题和作业题，就达到了基本要求。“复习提高题”一般难度较大并要求一定的技巧性。它是为中上等学生准备的，自选自做，不作统一布置和要求。这部分题目，也是为将来有志于进修提高或报考研究生的学生而选择、搜集的。

作者的愿望是这本书能达到针对性灵活、适用性广泛的要求；希望它能成为对凡涉及《高等数学》教学的广大师生都适用的一本辅助教材。作者的另一个愿望是，通过这本教材的使用，可减少教师教学中的重复性劳动，适当减轻批改过量书面作业的负担，使他们把主要精力放在课堂重点内容的讲授上，放在教学法的研究上，放在指导尖子和扶助后进的学生上，从而达到提高教学质量的目的；与此同时，使用本辅助教材能帮助学生预习、提高听课效果，便于抓住重点和难点并顺利地理解它们，摆脱过重的书面作业负担，从而挤出时间多读书，多思考问题，迅速提高学习效果。

本书各章均是经集体反复讨论修改而成的。在成文过程中，杨在中同志执笔序言、第一章和第十二章；红英同志执笔第二章和第八章；姜长友同志执笔第三章和第六章；巴达

拉胡同志执笔第四章和第十章，孙淑云同志执笔第五章和第九章；詹元亮同志执笔第七章和第十一章。书中的图形由孙淑云同志绘制；思考题、业作题、复习提高题及其解答的编排由孙淑云、姜长友同志完成，巴达拉胡和红英同志进行了校准、复核；杨在中、詹元亮、红英、巴达拉胡同志对各章的内容提示进行了统一的加工、润色。

在本书的编写过程中，一直得到内蒙古大学科研处、数学系及中国人民解放军信息工程学院训练部、应用数学系等单位领导的全力支持，我们在此表示诚挚的谢意；此外，中国人民解放军信息工程学院应用数学系的赵亚群、李凯二同志对本书的成书也给予了帮助，我们在此一并致谢。

由于时间仓促，再加作者水平有限，书中不妥甚至错误之处在所难免。敬请专家教授、广大教师及其他同志提出宝贵的改进意见，以便修定时进一步完善。

编　者

1988年10月于呼和浩特

目　录

第一章 函数与极限

一 内容提示

1. 本章概述

本章所述系高等数学的基础知识，主要讨论三项基本内容——函数、极限和连续。其中，函数概念反映着存在于物质世界中的各种变量间的联系以及它们的依从关系；而极限概念是高等数学的“灵魂”，是学习以后各章所须臾不可离开的重要工具；连续性是函数的重要性质，这一点可以从下述事实得到印证：本课程中所研究的函数主要是连续函数，不连续函数和函数的不连续性只有在个别地方才涉及到.

上述三项内容中，极限论是中心环节. 高等数学中许多重要的概念，如连续、导数和微分、定积分、级数等等，都是建立在极限论基础之上的. 这些概念的引入和定义，有关它们的许多重要性质和结论的推导与证明，几乎全使用了极限方法. 例如，在本章中，只有定义并讨论了函数的极限，才能在此基础上精确地研究函数的连续性.

极限理论在高等数学中所占的重要地位，也可从微积分学的发展历史得到很好的说明. 众所周知，孕育于古希腊时代的微积分的思想和方法，经过了漫长时期的酝酿，到了十七世纪，在工业革命的刺激下，终于通过牛顿(I. Newton)和莱布尼兹（G. W. Leibniz）的首创脱颖而出. 以后又

经过了欧拉（L. Euler）、拉格朗日（J. L. Lagrange）达朗贝尔（J. L. D'Alembert）、拉普拉斯（P. S. Laplace）等一代数学家的发展和在各个领域中的推广，取得了伟大的成功。然而，这个以磅礴气势向前发展的微积分学，其创立伊始，由于缺乏一个完备的理论基础，就陷入了方法上有效但逻辑上不能自圆其说的困难境地。无怪乎有人认为，初期的微积分，与其说是一门立论严谨的学说，毋宁说是一种新颖的解题方法。事实上，微积分方法的基础——无论是牛顿的“流数”，还是莱布尼兹的微分，在微积分创立的两个世纪的时间内，一直遭到各种怀疑和非议。法国启蒙思想家伏尔泰（Voltaire）曾称微积分是一门“精确地计算和度量其存在无法想象的东西的艺术”；而牛顿的“流数”，则被英国主教贝克莱（B. Berkeley）讥笑为“逝去了量的鬼魂”。微积分学逻辑基础上的严重问题，虽然暴露出来，但是并没有能够及早地得到解决。直到十九世纪二十年代，近代分析学的主要奠基人，法国的柯西（A. Cauchy），在他陆续发表的三部著作*中，革新了微积分中长期沿袭下来的模糊旧观念，重整了它的理论，把它纳入到一个新的严密理论体系之中，而这一理论体系的核心就是极限。柯西的极限论和无穷小的定义进一步澄清了存在于连续、导

* 柯西（A.L.Cauchy）的三部著作是：1.《Cours d'analyse algébrique》（《代数分析教程》），1821年出版；2.《Résumé des lecons sur le calcul infinifesimal》（《无穷小分析教程概论》），1823年出版；3.《Lecons sur le calcul diffe'rentiel》（《微分计算教程》），1828年出版。

数、微分、积分、无穷级数…等概念上的模糊，从根本上改造了旧的理论系统，实现了微积分学基础的一次革命，进而对整个近代数学的发展产生了深远而巨大的影响。

既然极限论对于微积分学是如此重要，那么可毫不夸张地讲，只有学好极限论，才能学好微积分，而高等数学这门课的主要内容就是微积分。

综上所述，不难看出第一章的内容是高等数学的基础部分。学好了第一章，就掌握了学习高等数学的主动权，“好的开头是成功的一半”。这里还顺便指出：本章的一些内容，有的学生在高中已经接触过，表面上带有复习性质，但不是简单的重复。这里所讲的内容，无论从深度、广度还是从对学生的要求来讲，都是高中阶段所不能比拟的。这一章实际上是从中学的常量数学向大学的变量数学过渡的关键阶段，学习时万万不可掉以轻心，否则，将给后续各章及其它数学课程的学习带来很大的困难。

2．本章的重点和难点

本章的重点内容是函数、反函数的概念以及函数的单调性、奇偶性、周期性；基本初等函数和它们的图形；复合函数及其定义域的确定；在实际问题中如何建立函数关系；数列极限和函数极限的概念以及它们的重要性质；无穷小和它与极限的关系；极限的运算法则，求极限的方法与基本技巧；两个重要极限；函数连续的概念及连续函数的性质，初等函数的连续性；求函数的间断点。

难点是复合函数和在实际问题中如何建立函数关系，极限概念以及求极限的方法、技巧。对于这些难点，学习时必

须给予足够的重视，并且应下决心攻克它们，并熟练地掌握、运用它们.

首先应该指出，虽然我们在初等数学中曾涉及过函数的概念，但讨论和理解却不深入、不系统．尤其是复合函数，在初等数学里几乎没有明确地提出过．然而在大量的实际问题中所遇到的差不多全是复合函数；微积分虽以基本初等函数为研究起点，但处理的也大多为各式各样的复合函数．由此可以看出，复合函数在高等数学中所占的地位是十分重要的．即使初学者能将一些具体的基本初等函数复合成较为复杂的函数，但要将一些抽象函数进行复合并理解其结果的意义并不是一件容易的事；反之，将一个看来似乎简单的初等函数拆成为某些个基本初等函数的和、差、积、商以适应求该函数的导数，特别是求积分的需要，那更是一项颇为困难的工作．虽然如此，这种技能仍必须逐步熟练掌握，以适应以后所学内容的需要.

关于如何建立实际问题中的函数关系式，本章一般并不作为一项专门内容做深入的讨论，但并不是说这一内容不重要或意义不大；恰恰相反，由于建立函数关系式具有巨大的实用价值，所以它是必须掌握的重要技能．然而，熟练地掌握这种技能却是颇为困难的．一方面，实际问题来自各个领域，有物理的、化学的、生物和生态的，工程技术的、经济的以及其它自然科学和社会科学的，除数学之外，所涉及的知识范围太广；另一方面，真正能准确描述自然规律的函数关系，不仅形式复杂而且是多变量的，这就必然造成建立函数关系式确非容易的特点．但是，建立函数关系式是用数学工具解决实际问题的首要步骤，是将实际问题转化为数学问题

的钥匙，因此它是一项基本功，再难也必须完成它的基本训练。不过在具体掌握这一基本功的过程中，可先易后难，先简后繁；先做人为设计的练习题，后解决真正的实际问题。此外，还应指出，我们这里所讨论的仅仅是建立一元函数的关系式，至于多元函数关系式的建立，要留待学了多元函数方面的知识之后再进行讨论。

极限论是本章也是本课程最重要的内容，同时又是最难理解、最难掌握的内容。极限是研究在指定的过程中某变量的变化趋势。这里讲的“变化趋势”有明确的含意：不管所指定的变化过程多么复杂，我们所关心的仅仅是变量变化的“终极目标”。这个“终极目标”如果存在的话，我们就叫做变量的极限。不言而喻，在某些特定的变化过程中，一些变量没有固定的终极目标，意即变量没有极限。一般讲，极限论的重点是放在去研究那些变量有极限的情形。就一元函数和数列（数列可视为自然数N的函数）而论，在研究它们的极限时，我们将变量（函数或数列元素）用变数表示，如极限存在，将“终极目标”——极限用常数表示，那么极限概念的实质是：所指定的变化过程只要进行到某一时刻之后，变数与常数之差的绝对值可以小于预先给定的任意小的正数。换言之，只要“时刻”充分靠后，变数就充分靠近常数，要多么近就能多么近！当然，这是对极限概念形象化的，从而也是粗略地描述。极限论的主要任务之一，就是要在数学上给极限概念以精确的定义，而这个定义是借助于距离的概念来完成的。我们知道，数轴上的两点可用相应的两个实数来表示，比如用x和x_0表示；那么两点间的距离，就可用x和x_0差的绝对值$|x-x_0|$来表示。$|x-x_0|<\varepsilon$表示两点

之间的距离小于ε.如果正数ε可以任意地给定(不论多么小)，则不等式$|x-x_0|<\varepsilon$表明两点间的距离可以任意地小；如果以x_0代表不动点，而x代表动点，则可说x充分靠近x_0，或说x以x_0为其极限。

初学者应特别注意，在谈及极限概念时，上述所指的"过程"是广义的，并非全系时间过程。譬如在研究一个数列$\{a_n\}$的极限时，我们指的"过程"是n趋向于正无穷大；在研究一个函数$f(x)$的极限时，这一过程又变为自变量x趋于某一常数a或趋向于∞。与此同时，所谓的"时刻"也是广义的，前者的"某一时刻"系指n大于某个充分大的自然数N；而后者是指x和a的距离$|x-a|$小于某个很小的正数δ（$0<|x-a|<\delta$）或$|x|$大于某个充分大的正数M（$|x|>M$）。

通过上述还可以看出，极限概念的描述离不开不等式。这正如我国著名的老一辈数学家闵嗣鹤教授曾经说过的："极限概念本身的建立完全靠在一组不等式上，…不等式是数学分析里最深的一块基石，也是极限理论的一块基石。"一些学生往往由于对绝对值不等式不甚理解，从而影响对极限概念的理解。因此，掌握好有关绝对值不等式的知识，对加深理解极限概念大有裨益。

无穷小的概念也与极限概念密切相关。无穷小就是趋向于零或以零为极限的变量。许多书籍中，是在充分研究无穷小的基础上引进极限概念的，因此我们对无穷小的概念和性质务必要加深理解。所谓一个变量Y以A为极限，实质上就是$Y-A$是一个无穷小量。但初学者往往把无穷小误认为是一个很小很小的数，这显然是非常有害的概念性错误，

切记“无穷小”是一个以零为极限的变量，而不是一个非常小的常数！

在弄清了极限概念之后，最重要的问题就是求各式各样的极限，求极限是微积分中最基本最重要的运算，而且困难也较大。往往有些学生在具体求极限时有无从下手之感，其原因是多方面的。要想度过这一难关，应该意如下几点：

①彻底弄清有关极限的概念、重要性质和运算法则并熟记之；

②深入研究教师讲的和书上的例题，体会其思维方法和关键处的技巧。初学者不妨多仿做一些类似的题目；

③注意总结求极限的几种主要方法。求极限方法很多，不下二十种，本章先介绍九种，必须熟练地掌握和运用它们；

④多做习题，积累经验；

⑤注意掌握和熟练运用两个重要极限$\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right.$和$\left.\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\right)$及其变种形式，因为有相当一部分极限题目与它们直接或间接相关。

最后还应该指出，在极限问题中，有一些难度较大、技巧性也很强。对这类题目，请多看一些参考书或请教师予以指导，一般不宜花大量时间死抠。因为许多现阶段看来十分困难的极限问题，在学了罗必达（G.F de l'HosPitale）法则和无穷级数的有关章节，从而获得更强有力的求极限工具之后，它们却变得十分简单了。

3．本章的基本要求

①深刻理解函数定义，会求定义域，会计算函数值，会

根据较简单的实际问题中提出的要求建立相应的函数关系式；

②正确理解反函数、复合函数、分段函数的概念，要善于把一个复杂的初等函数分解为某些基本初等函数，以便为复合函数的微分和积分变量代换打下基础；

③要会判断某个函数是否具有有界性、单调性、奇偶性和周期性，明确这四种性质的几何意义；

④熟悉基本初等函数的性质和图形，并能较熟练地绘出它们的草图；

⑤要正确理解并会使用抽象的函数记号及其复合形式；

⑥能准确地使用区间、邻域、不等式、绝对值不等式以及集合来表达变量的取值范围；

⑦能准确地叙述并深刻地理解各种类型的极限定义，明确其几何意义，并能用定义验证极限；

⑧理解极限存在的充要条件，明确极限不存在的三种情况；

⑨正确理解无穷小量、无穷大量的概念以及无穷小量阶、等价无穷小量等概念，深刻理解函数的极限概念与无穷小量的关系，会从无穷小量的各种运算出发，推导出极限的各种运算性质；

⑩理解并熟记极限存在准则，并能应用它们证明极限存在或求极限；

⑪牢固掌握极限运算法则以及极限的性质，尤其是保号性质；

⑫熟练掌握求极限的方法并且要有一定的灵活性与技巧性；