初中数学知识点

导读

3 年级用

江苏教育出版社

初中数学知识点导读

（三年级用）

顾也慈　主编

江 苏 教 育 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学知识点导读.三年级/顾也慈主编.—南京:江苏教育出版社,2001.7

ISBN 7-5343-4206-6

Ⅰ.初... Ⅱ.顾... Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 047510 号

初中数学知识点导读

(三年级用)

顾也慈 主编

责任编辑 何震邦

出 版:江苏教育出版社

(南京市马家街 31 号,邮政编码:210009)

网 址:http://www edu-publisher.com

发 行:江苏省新华书店

照 排:苏中照排中心

印 刷:常熟市第六印刷厂

(常熟市赵市镇南,邮政编码,215518)

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 6 5 字数 156 800

2001 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月第 1 次印刷

印数 1-5 200 册

ISBN 7—5343—4206—6

G·3901 定价:9.40 元

编者的话

当今世界处在工业社会向信息社会转变的时代．为了适应新技术的普及和应用，人人都要接受良好的数学教育．数学自身也随着高新科技的层出不穷而迅速发展，仅第二次世界大战以来的半个多世纪里数学的新成果就占了现有数学的一半以上．时代无情地要求数学教育工作者必须转变观念，数学教育不仅是传授现代数学的内容，还应把“学会数学”的教学变为“会学数学”的教学，培养学生善于自学、勤于思维的能力，让每一个学生都终身受益．

我国正由应试教育转变为公民素质教学，所以亟需要体现以学生为主体，又能反映现代教育性质、任务和目标的辅导读物，暴露知识的发生和发展的过程，引导学生重视数学的结论，又要积极参与数学思维的过程，在接受新知识的同时不断培养自己会学数学的能力．《初中数学知识点导读》就是要面向全体初中学生，以基本概念和基础知识为网眼，思维为经纬，经过基本技能的训练，由学生根据自己对数学知识理解的深度和广度，结合各自的感觉、记忆、联想和推理等，不断改建或扩建成具有个性内部规律的整体认知结构网络，从而应用构建的认知结构去解决有关数学的问题，进一步认识客观世界．这是我们编写《初中数学知识点导读》的指导思想．

为了更好地体现这一指导思想，这套书采用师生对话形式，通过通俗易懂的语言，使学生在生动活泼的气氛中，

自然而然地发现问题、暴露问题，顺理成章地解决问题.

这套《初中数学知识点导读》共三册，分别供初中一、二、三年级学生阅读. 书中少量打有星号*的内容，有的已超过数学教学大纲要求，学有余力的同学可以选读.

《初中数学知识点导读》(三年级用)由顾也慈主编，参加编写的有顾也慈、曹国钧、石骑等. 由于水平有限，我们的良好愿望不一定在书中能很好体现，缺点和错误也在所难免，祈盼读者不吝予以批评指正.

编者

2001年3月

目　　录

代 数 部 分

几何部分

代数部分

I．一元二次方程

1．谈配方法

朱奇、罗和平、于小慧、赵亮不约而同地来到办公室，找曹老师问问题．

“曹老师，您看这道题该怎么解．”朱奇“先下手为强”，递上练习本：

求满足等式 $x^2+y^2+2x-4y+5=0$ 的 x、y 值．

曹老师看了看，没有直接回答，而是反问了一句：“你看呢？”

“题目中只给出了一个等式，要求两个未知数，我觉得不好求，就来找您了．”朱奇很老实．

“是的，一般情况下，求几个未知数的值，就要有几个含这几个未知数的等式，组成方程组来解．但是，也有特殊情况，这个题就属于特殊情况．”曹老师先肯定了朱奇的说法，“你有没有注意这个等式左边的特征呀？”

“不就是两个二次项，两个一次项和一个常数项吗？有什么特征

呀？”朱奇说.

“可以用配方法解！”在一旁看着的罗和平小声地提醒朱奇.

“罗和平同学说这道题用配方法可以解，朱奇同学，你还记得什么是配方法吗？”曹老师问.

“所谓配方法，就是通过拆项或添项把一个多项式或多项式的几个部分变形为完全平方的形式.”朱奇回答.

“关于配方法，你还知道什么？”曹老师又问.

“配平方的依据是完全平方公式；可以配方的代数式的特征是有相当于 a^2，b^2 的完全平方项和相当于 $2ab$ 的项.”

“这道题中的代数式有这样的特征吗？”

“噢，有！这题中的 x^2，y^2 是两个平方项，$2x$ 看作 $2\times x\times 1$，$-4y$ 看作 $2\times y\times(-2)$，是两个相当于 $2ab$ 的项，而 5 可拆成 $1+4$，1 和 4 也是平方项，1 与 x^2，$2x$ 结合在一起就是完全平方 $(x+1)^2$ 了.同样，4 与 y^2，$-4y$ 结合在一起就可配成 $(y-2)^2$.这样就配成了 $(x+1)^2+(y-2)^2=0$.下面再利用‘完全平方非负’及‘几个非负数的和等于 0，则每一个非负数都等于 0’就好做了.”

朱奇很快得出了答案：

解　把等式变形为 $(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=0$.

即　$(x+1)^2+(y-2)^2=0$.

满足此式必须且只须　$\begin{cases} x+1=0, \\ y-2=0. \end{cases}$

所以满足此等式的实数解为 $x=-1$，$y=2$.

“这里的配方，与解一元二次方程的配方一样吗？”曹老师问.

“您不说我们还不注意，真的有点不同.”罗和平说.

“你看出不同在什么地方吗？”

“用配方法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 时，首先在方程两边同除以二次项系数 a，将方程变形为 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$，再移项，得

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$，然后方程两边都加上$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，得 $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，这样方程的左边就配成一个完全平方，$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. 而现在学习的这个题的配方，都是在等号的左边进行的，右边保持 0."

朱奇的问题解决了，于小慧马上问："曹老师，您看这道题怎么解？"说着也递上练习本：

已知$(a^2+1)(b^2+1)=3(2ab-1)$，则 $b\left(\frac{1}{b}-a\right)$的值为________.

曹老师看了本子上的问题，却将本子递给了朱奇："你看怎么解？"

沉思片刻，朱奇试探着问："先要展开吧？"便在纸上写下：

$$a^2b^2+a^2+b^2+1=6ab-3,$$

$$a^2b^2+a^2+b^2-6ab+4=0.$$

"我懂了！"于小慧在旁边说，"$-6ab$ 拆成$-2ab-4ab$，配方成$(ab-2)^2+(a-b)^2=0$. 好解了！曹老师，我把答案做给您看吧！"

"罗和平，你有什么问题呀？"曹老师问.

"曹老师，您看."罗和平拿出他的笔记本：

求证方程 $x^4+5x^2+2x+6=0$ 没有实数解.

不等曹老师问，罗和平就说了自己的看法："这是我在一本参考资料上看到的，它是一个一元四次方程，我们没学过，不知好不好解."

"你用配方法试过吗？"

"我这就试试."

这时，于小慧把她的解法拿给曹老师看：

解　$a^2b^2+a^2+b^2+1=6ab-3,$

$a^2b^2-4ab+4+a^2-2ab+b^2=0$,

$(ab-2)^2+(a-b)^2=0$.

$\therefore$ $ab-2=0$ 且 $a-b=0$.

$\therefore$ $ab=2$ 且 $a=b$.

$\therefore$ $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$, 或 $a=-\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$.

$\therefore$ 原式 $=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)=1-2=-1$,

或原式 $=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{-\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)=1-2=-1$.

"答案是对了,但是解法比较繁."曹老师评论,"能不能简单些?"

"让我想想."于小慧说,"我真糊涂,$b\left(\frac{1}{b}-a\right)=1-ab$ 呀!"

于小慧修改了答案:

解 已知条件可化为

$a^2b^2+a^2+b^2+1=6ab-3$.

即 $(a^2b^2-4ab+4)+(a^2-2ab+b^2)=0$.

$\therefore$ $(ab-2)^2+(a-b)^2=0$.

$\therefore$ $ab=2$ 且 $a=b$.

$\therefore$ 原式 $=1-ab=1-2=-1$.

这时,罗和平也做好了:

证明 将方程 $x^4+5x^2+2x+6=0$ 变形为

$(x^4+4x^2+4)+(x^2+2x+1)+1=0$,

即 $(x^2+2)^2+(x+1)^2+1=0$.

$\because$ $(x^2+2)^2>0$, $(x+1)^2\geqslant 0$, $1>0$.

$\therefore$ $(x^2+2)^2+(x+1)^2+1>0$,

即 $x^4+5x^2+2x+6=0$ 不能成立。

所以方程 $x^4+5x^2+2x+6=0$ 无实数解.

"曹老师,我还有一个问题."于小慧又递上练习本:

当______时,代数式 $5-4a-a^2$ 的值最大,最大值是________.

“当 a 在它取值范围内取不同的值时，代数式的值也随着确定. 这里 a 可以取任何实数值. 什么时候 $5-4a-a^2$ 的值最大呢？我不知道.”于小慧说出了她的无奈.

“$5-4a-a^2=5-(4a+a^2)=5-(a^2+4a+4-4)=9-(a+2)^2$，可以配方.”罗和平抢着说.

“下面我会做了，$a=-2$ 时，代数式有最大值 9.”于小慧接过话题.

“这里的配方和解一元二次方程的配方好像也有点不同.”罗和平这次注意了.

“又看出什么不同了？”曹老师显得比较高兴.

“解方程用配方法，移项后等式两边同加上 $2a$ 分之 b 括号的平方，等式仍然成立，这里是对二次三项式配方，为了保证配方以后的二次三项式与原二次三项式恒等，括号内加上 4，还必须减去 4.”

“你的观察很仔细，小结得也不错. 同样是配方，确实有一些小的区别，要正确应用配方法解决问题，必须注意这些.”

“试证方程 $(m+1)x^2-3mx+(m-2)=0$ $(m\neq-1)$ 必有两个不相等的实数根”是赵亮准备提问的问题.

看了前面三个同学的题及解答，他已经明白了. 这道题也可以用配方法解.

证明 $\because$ $\Delta=9m^2-4(m+1)(m-2)$

$$\begin{aligned}
&=5m^2+4m+8\\
&=5\left(m^2+\frac{4}{5}m+\frac{8}{5}\right)\\
&=5\left(m^2+\frac{4}{5}m+\frac{4}{25}+\frac{36}{25}\right)\\
&=5\left[\left(m+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{36}{25}\right]\\
&=5\left(m+\frac{2}{5}\right)^2+7\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

而$\left(m+\dfrac{2}{5}\right)^2\geqslant 0$. $\therefore\ \Delta>0$.

又$\because\ m\neq -1$,所以此方程必有两个不相等的实数根.

“要这么麻烦吗? $\Delta=5m^2+4m+8=m^2+\dfrac{4}{5}m+\dfrac{8}{5}=\left(m+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{36}{25}$不就得了.”朱奇在一边说.

“这里不能这样简单地除以 5.”赵亮不同意.

“为什么?”曹老师问.

“等号左边是二次三项式,右边是 0,0 除以任何不等于 0 的数 a,结果还是 0,等式仍成立. 这里等号左边是 Δ,右边是关于 m 的二次三项式,等号右边除以 5,左边也必须除以 5,否则,等号就不成立了.”

“对!”曹老师非常赞赏,“今天真凑巧,你们问的问题都是应用配方法解决的,而且都用了‘完全平方非负’这一性质. 配方法是中学代数中常用的基本方法之一. 今后的学习中,还有许多问题会用到配方法,你们多留意.”

练 习 一

1. 若 a、b、c 为实数,$A=a^2-2b+\dfrac{\pi}{2}$,$B=b^2-2c+\dfrac{\pi}{3}$,$C=c^2-2a+\dfrac{\pi}{6}$.

证明 A、B、C 中至少有一个的值大于 0.

2. 怎样的整数 a、b、c 满足不等式 $a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c$.

3. 已知

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2.$$

求$\dfrac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$的值.

2. 判别式 Δ 的应用

曹老师布置了一个课外作业：小结判别式 Δ 的应用. 几天以后的数学辅导课上，曹老师组织各学习组的同学交流.

第一组的代表首先发言：

"我们组的同学，通过看书(课本)和查资料，小结了判别式有以下几个方面的应用：

(1) 已知方程，不解方程，判定方程根的情况

例 1 不解方程，判别下列方程根的情况：

① $2x^2+5x+35=0$；② $4y(y+1)+1=0$；③ $0.2x^2-5=0.5x$.

解 ① $\because \Delta=5^2-4\times2\times35=25-280<0$，

$\therefore$ 原方程没有实数根.

② 原方程可变形为 $4y^2+4y+1=0$.

$\because \Delta=4^2-4\times4\times1=0$，

$\therefore$ 原方程有两个相等的实数根.

③ 原方程可变形为 $0.2x^2-0.5x-5=0$.

$\because \Delta=(-0.5)^2-4\times0.2\times(-5)=4.25>0$，

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根.

例 2 判别方程 $x^2+2ax+4a=4$ 根的情况.

解 原方程变形为 $x^2-2ax+4a-4=0$.

$$\begin{aligned}\because \Delta&=(2a)^2-4\times1\times(4a-4)\\&=4(a^2-4a+4)\\&=4(a-2)^2,\end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $a=2$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $a\neq2$ 时，方程有两个不相等的实数根.

(2) 确定方程系数中所含字母的值

例 3 已知 a、b 为实数，且方程 $x^2-(3-a)x-(3a+b^2)=0$ 有两个相等的实数根，求 a、b 的值.

解 ∵ 方程有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=(3-a)^2+4(3a-b^2)=a^2-6a+9-12a+4b^2$

$=(a+3)^2+4b^2=0$，

由非负数的性质得 $a=-3, b=0$.

例 4 k 为何值时，方程 $2kx^2+(8k+1)x+8k=0$ 有两个不相等的实数根？

解 $\Delta=(8k+1)^2-4\times 2k\times 8k$

$=16k+1$，

要使方程有两个不相等的实数根，必须且只须

$$\begin{cases}16k+1>0,\\ 2k\neq 0.\end{cases}$$

解得 $k>-\dfrac{1}{16}$ 且 $k\neq 0$.

∴ 当 $k>-\dfrac{1}{16}$ 且 $k\neq 0$ 时，原方程有两个不相等的实数根.

例 5 如果 a 取任意实数，方程 $x^2+ax+3b-1=0$ 总有实数根. 试确定实数 b 的范围.

解 ∵ 方程有实数根，

∴ $\Delta=a^2-4(3b-1)\geqslant 0$，即 $4(3b-1)\leqslant a^2$.

∵ $a^2\geqslant 0$，又无论 a 取任何实数上式总成立，

∴ $3b-1\leqslant 0, b\leqslant\dfrac{1}{3}$.

(3) 证明一元二次方程有两个不相等的实数根、有两个相等的实数根、没有实数根、有实数根

例 6 已知 a、b、c 为三角形的三边，求证关于 x 的方程 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 没有实数根.

证明 $\Delta=(b^2-c^2-a^2)^2-4b^2c^2$

$=(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)$

$=[(b+c)^2-a^2][(b-c)^2-a^2]$

$=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)$,

$\because$ a、b、c 为三角形的三边，

$\therefore$ $b+c+a>0, b+c-a>0, b-c+a>0, b-c-a<0$.

$\therefore$ $\Delta<0$.

$\therefore$ 原方程没有实数根.

例 7 实系数方程 $x^2+ax+b=0$，$x^2+cx+d=0$ 的系数满足 $ac=2(b+d)$，求证：这两个方程中至少有一个方程有实数根.

证明 设方程 $x^2+ax+b=0$ 和 $x^2+cx+d=0$ 的判别式分别为 Δ_1 和 Δ_2，则

$\Delta_1+\Delta_2=a^2-4b+c^2-4d=a^2+c^2-4(b+d)$,

把 $ac=2(b+d)$ 代入上式，得

$$a^2+c^2-2ac=(a-c)^2\geqslant 0,$$

则 Δ_1 和 Δ_2 中至少有一个大于或等于 0，所以这两个方程中至少有一个方程有实数根.

(4) 判断完全平方式

例 8 当 k 为何值时，关于 x 的二次三项式 $x^2+2(k-4)x+k^2+6k+2$ 是完全平方式？

解 当方程 $x^2+2(k-4)x+k^2+6k+2=0$ 有两个相等的实数根时，原二次三项式是完全平方式.

令 $\Delta=[2(k-4)]^2-4(k^2+6k+2)=-56k+56=0$.

$\therefore$ $k=1$.

故当 $k=1$ 时，$x^2+2(k-4)x+k^2+6k+2$ 是完全平方式.

(5) 判定三角形的形状

例 9 已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边，且方程 $b(x^2-1)-2ax+c(x^2+1)=0$ 有两个相等的实数根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解 原方程可化为 $(c+b)x^2-2ax+(c-b)=0$.

因为此方程有两个相等的实数根，所以 $\Delta=0$，

则有 $4a^2-4(c+b)(c-b)=0$.