普通高等教育"十五"国家级规划教材

面向21世纪课程教材

离散数学

（修订版）

耿素云　屈婉玲　编著

高等教育出版社

普通高等教育“十[redacted]教材

面向21世纪课程教材

离散数学

（修订版）

耿素云　屈婉玲　编著

高等教育出版社

内容提要

本书第一版于1998年出版，是教育部高等学校“九五”规划教材和面向21世纪课程教材。此次修订在保持原有四部分内容(数理逻辑、集合论、代数结构和图论)的基础上，增加了相当数量的难度不同的练习题，并结合教学需要引入了一部分新的应用实例。

本书被列为普通高等教育“十五”国家级规划教材。与本书配套设计的网络课程、电子教案和习题辅导用书即将陆续推出。它们的有机配合可以满足不同教学环节的需求，构成全新的立体化系列教材。

本书可作为普通高等学校计算机及其他相关专业本科生离散数学课程的教材，也可供其他专业学生和工作人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学 / 耿素云，屈婉玲编著. —2版. —北京：
高等教育出版社，2004.1
ISBN 7-04-013317-2

Ⅰ.离... Ⅱ.①耿...②屈... Ⅲ.离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.0158

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第113170号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京中科印刷有限公司		
		版　　次	1998年6月第1版
开　　本	787×1092　1/16		2004年1月第2版
印　　张	23.25	印　　次	2004年8月第4次印刷
字　　数	480 000	定　　价	26.70元

第一版前言

计算机的发明揭开了本世纪科技史上最辉煌的一页，特别是进入信息化社会的今天，计算机与人的生活已融为一体，密不可分．伴随着计算机科学技术的迅猛发展，作为支撑学科的离散数学正变得越来越重要．离散数学属于现代数学的范畴，是研究离散量的结构及相互关系的学科．它在可计算性与计算复杂性理论、算法与数据结构、程序设计语言、数值与符号计算、操作系统、软件工程与方法学、数据库与信息检索系统、人工智能与机器人、网络、计算机图形学以及人机通信等各个领域，都有着广泛的应用．作为一门重要的专业基础课，通过离散数学的教学，不仅能为学生的专业课学习及将来所从事的软、硬件开发和应用研究打下坚实的基础，同时也能培养他们抽象思维和严格逻辑推理的能力．

本书系教育部高等学校“九五”教材建设规划内教材，根据国家教育委员会颁布的计算机软件专业教学基本要求，本书包含了四部分内容：数理逻辑、集合论、代数结构与图论．全书体系严谨、叙述深入浅出，并配有大量的习题，可作为普通高等学校计算机或相关专业的本科生教材．根据我们的经验，使用本书可在 160 学时内完成全部教学任务．如果采用 120 学时的教学计划，可以删去第九章、第十二章、第十八章以及第十一章的部分内容．

本书的数理逻辑和图论部分（第一章至第五章、第十四章至第十八章）由耿素云编写，集合论和代数结构部分（第六章至第十三章）由屈婉玲编写．在编写过程中，我们参阅了大量的离散数学书籍和资料，在此向有关作者表示衷心的感谢．本书付梓前，山东大学的马绍汉教授、郭清泉教授、马军教授和徐秋亮副教授认真地审阅了全稿，并提出了许多宝贵的意见和建议，在此我们表示深深的谢意．

最后，我们诚恳地期待着读者对本书的批评和指正．

作　者

1997 年 4 月于北京大学

目　　录

第一部分　数 理 逻 辑

第二部分　集　合　论

第三部分 代数结构

第四部分　图　论

第 一 部 分

数 理 逻 辑

第一章　命题逻辑基本概念

1.1　命题与联结词

数理逻辑是研究推理的数学分支，而推理必须包含前提和结论，且前提和结论又都是由陈述句组成的，因而陈述句就成了推理的基本要素．但并不是所有的陈述句都是推理的要素，数理逻辑中所要求的是能判断真假而不是可真可假的陈述句，称这样的陈述句为*命题*．在命题逻辑中，对命题的成分不再细分，因而命题就成了命题逻辑中最基本也是最小的研究单位．

作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的*真值*，真值只取两个值：*真*或*假*．真值为真的命题称为*真命题*，真值为假的命题称为*假命题*．真命题表达的判断正确，假命题表达的判断错误．任何命题的真值都是惟一的．

判断给定句子是否为命题，应该分两步：首先判定它是否为陈述句，其次判断它是否有惟一的真值．

例 **1.1**　判断下列句子是否为命题．

(1) 4 是素数．

(2) $\sqrt{5}$ 是无理数．

(3) x 大于 y．

(4) 充分大的偶数等于两个素数之和）哥德巴赫猜想）．

(5) 2005 年元旦是晴天．

(6) π 大于$\sqrt{2}$ 吗？

(7) 请不要吸烟！

(8) 这朵花真美丽啊！

(9) 我正在说假话．

解　本题的 9 个句子中，(6) 是疑问句，(7) 是祈使句，(8) 是感叹句，因而这 3 个句子都不是命题．剩下的 6 个句子都是陈述句，但(3) 与(9) 不是命题．(3) 无确定的真值，根据 x,y 的不同取值情况它可真可假，即无惟一的真值，因而不是命题．若(9) 的真值为真，即“我正在说假话”为真，则(9) 的真值应为假，反之，若(9) 的真值为假，即“我正在说假话”为假，也就是“我正在说真话”为真，则又推出(9) 的真值应为真，于是(9) 的真值无法确定，它显然不是命题．像(9) 这样由真推出

假，又由假推出真的陈述句称为悖论，凡是悖论都不是命题．本例中，只有(1)，(2)，(4)，(5) 是命题．(1) 为假命题，(2) 为真命题，虽然今天我们还不知道(4)，(5) 的真值，但它们的真值客观存在，而且是惟一的，将来总会知道(4) 的真值，到2005年元旦(5) 的真值就真相大白了．

对命题和它的真值的首次抽象，就是将命题和真值符号化．在本书中，用小写英文字母 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i\cdots$ 表示命题，用"1"表示真，用"0"表示假，于是命题的真值取值为 0 或 1．在例 1.1 中，用 p,q,r,s 分别表示(1)，(2)，(4)，(5) 中命题，称为这些命题的符号化，其表示法为

p:4 是素数．

q:$\sqrt{5}$ 是无理数．

r:月球上有冰．

s:2005 年元旦是晴天．

于是，p,q,r,s 就成了所表示命题的代表．其中 p 的真值为 0，q 的真值为 1，r,s 的真值暂时不知道．

在例 1.1 中，p,q,r,s 所表示的命题都是简单陈述句，它们都不能被分解成更简单的陈述句了，称这样的命题为*简单命题*或*原子命题*．但在各种论述和推理中，所出现的命题多数不是简单的陈述句，而是由简单陈述句通过联结词联结而成的陈述句，称这样的命题为*复合命题*．

例 **1.2** 将下面这段陈述中所出现的原子命题符号化，并指出它们的真值，然后再写出这段陈述．

$\sqrt{2}$ 是有理数是不对的；2 是偶素数；2 或 4 是素数；如果 2 是素数，则 3 也是素数；2 是素数当且仅当 3 也是素数．

解 这段陈述中出现 5 个原子命题，将它们分别符号化为

p:$\sqrt{2}$ 是有理数．

q:2 是素数．

r:2 是偶数．

s:3 是素数．

t:4 是素数．

p,t 的真值为 0，其余的真值为 1．将原子命题的符号代入这段陈述：

"非 p"；"q 并且(与)r"；"q 或 t"；"如果 q，则 s"；"q 当且仅当 s"．

例 1.2 中最后给出的这段陈述的形式，不妨称它为半形式化形式，这种形式不会令人满意．数理逻辑研究方法的主要特征是将论述或推理中的各种要素都符号化，即构造各种符号语言来代替自然语言，我们称完全由符号所构成的语言为*形式语言*．为了达到这个目的，就要求进一步抽象化，即将联结词也符号化．在例 1.2 中

出现的联结词有5个："非"、"并且"、"或"、"如果…，则…"、"当且仅当"，这些联结词是自然语言中常用的联结词.但自然语言中出现的联结词有的具有二义性，因而在数理逻辑中必须给出联结词的严格定义，并且将它们符号化.

定义1.1 设p为命题，复合命题"非p"（或"p的否定"）称为p的否定式，记作$\neg p$，符号$\neg$称作否定联结词.并规定$\neg p$为真当且仅当p为假.

由定义可知，$\neg p$的逻辑关系为p不成立，因而当p为真时，$\neg p$为假，反之当p为假时，$\neg p$为真.

在例1.2中，"非p"可符号化为$\neg p$，由于p的真值为0，所以$\neg p$的真值为1.

定义1.2 设p,q为二命题，复合命题"p并且q"（或"p与q"）称为p与q的合取式，记作$p \wedge q$，$\wedge$称作合取联结词.并规定$p \wedge q$为真当且仅当p与q同时为真.

由定义可知，$p \wedge q$的逻辑关系为p与q同时成立，因而只有p与q同时为真，$p \wedge q$才为真，其他情况$p \wedge q$均为假.

在例1.2中，"q并且r"符号化为$q \wedge r$，由于q与r的真值全为1，所以$q \wedge r$的真值为1.

使用联结词$\wedge$需要注意两点：其一是$\wedge$的灵活性.自然语言中的"既…，又…"，"不但…，而且…"，"虽然…，但是…"，"一面…，一面…"等联结词都可以符号化为$\wedge$.其二，不要见到"与"或"和"就使用联结词$\wedge$.

例1.3 将下列命题符号化.

(1) 吴颖既用功又聪明.

(2) 吴颖不仅用功而且聪明.

(3) 吴颖虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

解 首先将原子命题符号化：

p：吴颖用功.

q：吴颖聪明.

r：张辉是三好生.

s：王丽是三好生.

t：张辉与王丽是同学.

(1)到(4)都是复合命题，它们使用的联结词表面看来各不相同，但都是合取联结词，都应符号化为$\wedge$，(1)到(4)分别符号化为$p \wedge q$，$p \wedge q$，$q \wedge \neg p$，$r \wedge s$.在(5)中，虽然也使用了联结词"与"，但这个联结词"与"是联结该句主语的，而整个句子仍是简单陈述句，所以(5)是原子命题，符号化为t.

定义 1.3 设 p,q 为二命题,复合命题"p 或 q"称作 p 与 q 的析取式,记作 $p \vee q$,$\vee$ 称作析取联结词.并规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.

由定义可知,若 $p \vee q$ 为真,则 p 与 q 中至少一个为真,因而只有 p 与 q 同时为假时,$p \vee q$ 才为假,其他情况下 $p \vee q$ 均为真.

在例 1.2 中,"q 或 t"符号化为 $q \vee t$.由于 q 为真,所以 $q \vee t$ 为真.

以上定义的析取联结词 $\vee$ 的逻辑关系是严格的,但自然语言中的"或"具有二义性,用它联结的命题有时具有相容性,有时具有排斥性,对应的联结词分别称为相容或和排斥或.

例 1.4 将下列命题符号化.

(1) 张晓静爱唱歌或爱听音乐.

(2) 张晓静是江西人或安徽人.

(3) 张晓静只能挑选 202 或 203 房间.

解 在解题时,先将原子命题符号化.

(1) p:张晓静爱唱歌.

q:张晓静爱听音乐.

显然(1)中"或"为相容或,即 p 与 q 可以同时为真,符号化为

$$p \vee q$$

(2) r:张晓静是江西人.

s:张晓静是安徽人.

易知,(2)中"或"应为排斥或,但 r 与 s 不能同时为真,因而也可以符号化为

$$r \vee s$$

(3) t:张晓静挑选 202 房间.

u:张晓静挑选 203 房间.

由题意可知,(3)中"或"应为排斥或.t,u 的联合取值情况有四种:同真,同假,一真一假(两种情况).如果也符号化为 $t \vee u$,张晓静就可能同时得到两个房间,这违背题意.因而不能符号化为 $t \vee u$.如何达到只能挑选一个房间的要求呢?可以使用多个联结词,符号化为

$$(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$$

此复合命题为真当且仅当 t,u 中一个为真,一个为假,它准确地表达了(3)的要求,当 t 为真 u 为假时,张晓静得到 202 房间,t 为假 u 为真时,张晓静得到 203 房间,其他情况下,她得不到任何房间.

定义 1.4 设 p,q 为二命题,复合命题"如果 p,则 q"称为 p 与 q 的蕴涵式,记作 $p \rightarrow q$,并称 p 是蕴涵式的前件,q 为蕴涵式的后件,$\rightarrow$ 称作蕴涵联结词.并规定,$p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假.

$p \to q$ 的逻辑关系为 q 是 p 的必要条件.

在例 1.2 中,"如果 q,则 s" 应符号化为 $q \to s$. 由于 q 与 s 的真值均为 1,所以 $q \to s$ 的真值也为 1.

在使用联结词 $\to$ 时,要特别注意以下几点:

1. 在自然语言里,特别是在数学中,q 是 p 的必要条件有许多不同的叙述方式,例如,"只要 p,就 q","因为 p,所以 q","p 仅当 q","只有 q 才 p","除非 q 才 p","除非 q,否则非 p",等等. 以上各种叙述方式表面看来有所不同,但都表达的是 q 是 p 的必要条件,因而所用联结词均应符号化为 $\to$,各种叙述方式都应符号化为 $p \to q$.

2. 在自然语言中,"如果 p,则 q" 中的前件 p 与后件 q 往往具有某种内在联系,而在数理逻辑中,p 与 q 可以无任何内在联系.

3. 在数学或其他自然科学中,"如果 p,则 q" 往往表达的是前件 p 为真,后件 q 也为真的推理关系. 但在数理逻辑中,作为一种规定,当 p 为假时,无论 q 是真是假,$p \to q$ 均为真,也就是说,只有 p 为真 q 为假这一种情况,使得复合命题 $p \to q$ 为假.

例 1.5　将下列命题符号化,并指出各复合命题的真值:

(1) 如果 $3+3=6$,则雪是白色的.

(2) 如果 $3+3\neq 6$,则雪是白色的.

(3) 如果 $3+3=6$,则雪不是白色的.

(4) 如果 $3+3\neq 6$,则雪不是白色的.

以下命题中出现的 a 是给定的一个正整数:

(5) 只要 a 能被 4 整除,则 a 一定能被 2 整除.

(6) a 能被 4 整除,仅当 a 能被 2 整除.

(7) 除非 a 能被 2 整除,a 才能被 4 整除.

(8) 除非 a 能被 2 整除,否则 a 不能被 4 整除.

(9) 只有 a 能被 2 整除,a 才能被 4 整除.

(10) 只有 a 能被 4 整除,a 才能被 2 整除.

解　令 p:$3+3=6$,p 的真值为 1.

　　q:雪是白色的,q 的真值也为 1.

(1) 到(4) 的符号化形式分别为 $p \to q$,$\neg p \to q$,$p \to \neg q$,$\neg p \to \neg q$. 这四个复合命题的真值分别为 1,1,0,1.

以上四个蕴涵式的前件 p 与后件 q 没有什么内在联系.

令　r:a 能被 4 整除.

　　s:a 能被 2 整除.

仔细分析可知,(5) 到(9) 五个命题均叙述的是 a 能被 2 整除是 a 能被 4 整除的必要条件,只是在叙述上有所不同,因而都符号化为 $r \to s$. 由于 a 是给定的正整数,因而 r 与 s 的真值是客观存在的,但是我们不知道. 可是 r 与 s 是有内在联系的,当 r 为真(a 能被 4 整除)时,s 必为真(a 能被 2 整除),于是 $r \to s$ 不会出现前件真后件假的情况,因而 $r \to s$ 的真值为 1.

而在(10)中,将 a 能被 4 整除看成了 a 能被 2 整除的必要条件,因而应符号化为 $s \to r$. 由于 a 能被 2 整除不保证 a 一定能被 4 整除,所以当我们不知道给定的 a 为何值时,也不能知道 $s \to r$ 会不会出现前件真后件假的情况,因而也不知道 $s \to r$ 的真值.

定义 1.5 设 p,q 为二命题,复合命题"p 当且仅当 q"称作 p 与 q 的等价式,记作 $p \leftrightarrow q$,$\leftrightarrow$ 称作等价联结词. 并规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假.

$p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系为 p 与 q 互为充分必要条件.

在例 1.2 中,"q 当且仅当 s" 应符号化为 $q \leftrightarrow s$. 由于 q 与 s 同为真,所以,$q \leftrightarrow s$ 为真.

不难看出$(p \to q) \wedge (q \to p)$与 $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系完全一致,即都表示 p 与 q 互为充分必要条件.

例 1.6 将下列命题符号化,并讨论它们的真值.

(1) $\sqrt{3}$ 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲.

(2) $2+3=5$ 的充要条件是$\sqrt{3}$ 是无理数.

(3) 若两圆 O_1, O_2 的面积相等,则它们的半径相等,反之亦然.

(4) 当王小红心情愉快时,她就唱歌,反之,当她唱歌时,一定心情愉快.

解 令 p:$\sqrt{3}$ 是无理数,真值为 1,

q:加拿大位于亚洲,真值为 0,

则将(1) 符号化为 $p \leftrightarrow q$,其真值为 0.

令 r:$2+3=5$,其真值为 1,

则将(2) 符号化为 $r \leftrightarrow p$,真值为 1.

令 s:两圆 O_1, O_2 面积相等,

t:两圆 O_1, O_2 的半径相等,

则将(3) 符号化为 $s \leftrightarrow t$,虽然不知道 s,t 的真值,但由 s 与 t 的内在联系可知,$s \leftrightarrow t$ 的真值为 1.

令 u:王小红心情愉快,

v:王小红唱歌,

则将(4) 符号化为 $u \leftrightarrow v$. 其真值要由具体情况而定.

以上定义了五种最基本、最常用，也是最重要的联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，将它们组成一个集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，称为一个联结词集．其中 $\neg$ 为一元联结词，其余的都是二元联结词．对于这个联结词集需要做以下几点说明：

1．由联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中的一个联结词联结一个或两个原子命题组成的复合命题是最简单的复合命题，可以称它们为基本的复合命题。为帮助读者记忆，将基本复合命题的取值情况列于表 1.1.

表 1.1　基本复合命题的真值

p　q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0　0	1	0	0	1	1
0　1	1	0	1	1	0
1　0	0	0	1	0	0
1　1	0	1	1	1	1

2．多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题．求复杂复合命题的真值时，除依据表 1.1 外，还要规定联结词的优先顺序．将括号也算在内，本书规定的联结词优先顺序为：()，$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，对于同一优先级的联结词，先出现者先运算．

例 1.7　令　p：北京比天津人口多．

q：$2+2=4$．

r：乌鸦是白色的．

求下列复合命题的真值：

(1) $((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \rightarrow r$

(2) $(q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$

(3) $(\neg p \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg r)$

解　p,q,r 的真值分别为 1,1,0，容易算出(1)，(2)，(3) 的真值分别为 1,1,0.

3．从例 1.7 可以看出，今后我们关心的是复合命题中命题之间的真值关系，而不关心命题的内容．

1.2　命题公式及其赋值

上节中讨论的是简单命题（原子命题）和复合命题，以及它们的符号化形式．由于简单命题是真值惟一确定的命题逻辑中最基本的研究单位，所以也称简单命题为命题常项或命题常元．从本节开始对命题进一步抽象，首先称真值可以变化的陈述句为命题变项或命题变元．也用 $p,q,r,\cdots$ 表示命题变项，当 $p,q,r,\cdots$ 表示