普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学

第二版

随机数学

萧树铁 主编
钱敏平 叶俊 编著

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学

第二版

随机数学

萧树铁　主编
钱敏平　叶俊　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材，是高等教育出版社2000年版"大学数学 系列教材的第二版，相当于第一版中《随机数学》。本书的整体结构仍与第一版保持一致，在局部作了一些改动和补充。

本书从随机数学的典型问题出发，集中讨论了随机数学的核心问题，以涵盖随机过程这一较深内容，并突出介绍了一些常用的分析方法和处理技巧。本书的理论体系较为完整、新颖，叙述方式力求通俗易懂，并特别强调了从实例出发来导出泊松分布、正态分布等，使读者自然地将这些分布与随机过程联系起来。

本书可作为高等院校理工科非数学专业的教材，也可供有关人员及教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

随机数学/钱敏平，叶俊编著. —2版.—北京：高等教育出版社，2004.4（2005重印）
（大学数学/萧树铁主编）
ISBN 7-04-013851-4

Ⅰ.随... Ⅱ.①钱...②叶... Ⅲ.①随机过程—高等学校—教材②概率论—高等学校—教材 Ⅳ.O211

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第026995号

策划编辑 李 蕊　责任编辑 胡乃冏　封面设计 于 涛
责任绘图 朱 静　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印 刷	廊坊市科通印业有限公司		
		版 次	2000年6月第1版
开 本	787×960 1/16		2004年4月第2版
印 张	16.25	印 次	2005年1月第2次印刷
字 数	290 000	定 价	17.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 13851-00

再版序言

提高大学数学教学质量的关键在于教师，但一套较好的教材也是重要的.随着我国大学数学教学内容改革的逐步深入，当前不少高等学校在基础数学教学内容的改革方面有了一些进展，例如单纯"面向专业"的观念有所淡化，代数课程的内容和学时有所增加，开设了一些新的课程，如"数学实验"和"随机数学"等；相应地有一批新教材出版.本套教材也在试用了两年多以后，进行了部分修订.这就是《大学数学》的第二版.

在保持原有的指导思想和风格的前提下，这一套教材由原来的五本：《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》及《数学实验》改编、扩充为七本，即：《微积分(一)》、《微积分(二)》、《多元微积分及其应用》、《流形上的微积分》、《代数与几何》、《随机数学》及《数学实验》，其中《流形上的微积分》是新编入的.其它几本修订的大致情况如下：

《微积分(一)》以原来的《一元微积分》中的第一篇，即"直观基础上的微积分"为其主要内容，力求做到"返璞归真".除了进一步强调了计算和应用之外，还增加了一些对"极限"的朴素描述.

《微积分(二)》是把原来《一元微积分》中的第二篇，即"理性微积分"的内容作一些修改而成.其中为了使读者能更好体会数学分析中的一些基本手法，对用阶梯函数逼近的办法来处理定积分(即函数集扩张的思想)又作了一些改进.

《多元微积分及其应用》是把原书加以适当精简而成.原书中"复变函数"部分重新改写以求突出重点和更加精练；原书的"微分几何"部分移到《代数与几何》.

以上三本教材的习题也都作了调整.

《流形上的微积分》与前面三本微积分教材合在一起，就显示了微积分从古典一直到现代的基本面貌，而且也是一个理解当代数学和物理的一个不可缺少的台阶.虽然目前它并不属于数学基础课的范围，但可供对此有兴趣的学生选修.此外，对从事微积分教学而在这方面有所欠缺的教师来讲，不妨顺便补上这一课.

《代数与几何》内容的变动是适当精简了代数的内容，增加了"行列式的几何意义"；几何部分则增加了"微分几何"的基本内容.

《随机数学》的一部分内容作了进一步精简，同时增加了一些诸如线性回归和随机数学内容，补充了一些有趣的例子.

《数学实验》是在几年来教学实践的基础上，对第一版的内容进行调整，以了解基本原理和掌握实用方法为主线，使之适合更多学生的学习情况，并升级书中所用的 MATLAB 版本，同时出版供教师使用的电子教案.

《代数与几何》中的几何部分包括了仿射、射影和微分几何，还有两个非欧几何的模型. 它所需的学时不多（不超过 30 学时）. 这些内容的选取和写法是否合适，能在多大程度上体现数学理性思维和"数学美"，还有待进一步讨论. 人们对大学数学课程中几何被严重削弱的缺陷已有共识，但又往往以"课内学时不够"或"没有用"等理由保留了这个缺陷. 精简课内学时是必要的，内容的选取更可以讨论. 希望有志于此的教师能先试开一些这方面的选修课，供大家来讨论.

这次内容的调整主要是为了增加这套教材的灵活性，不同的学校或专业在内容上可以有不同的选择：可以选择其中的某几本，或删去某些用小字写的部分. 例如在清华，这套教材就初步适应了一个较为稳定的教学计划. 即除了部分文科和艺术类专业以外，数学基础课的内容确定为："微积分（一）"（3 学分），"微积分（二）"（3 学分），"多元微积分及其应用"（4 学分），"代数"（4 学分），"几何"（2 学分），"随机数学"（3 学分），"数学实验"（3 学分），其中 1 学分表示一个学期（实上课 15 周）上 15 节课（每节 45 分钟），另外适当安排少数课外习题课. 这样数学基础课的总学时就是 330 学时，而其中被列为必修基础课的只有"微积分（一）"和"代数"两门. 但实际上多数专业的学生几乎都选了大部分甚至全部数学基础课.

参加这一版改写工作的有朱学贤、郑建华、章纪民、华苏、居余马、萧树铁、李津、陈维桓等同志；谭泽光、白峰杉同志参加了讨论并提出很多好的意见.

编者于清华园

2002 年 10 月

序　言

长期以来，我国高等学校各类非数学专业的数学基础课都限于以微积分为主要内容的“高等数学”．面临21世纪各门知识的相互渗透和自身加速更新的形势以及全面提高人才素质的需要，数学的作用将显得日益重要．而作为高等学校数学基础课的作用，除了作为各门学科的重要工具以外，它在提高人才全面素质中起着重要作用的培育理性思维和审美功能方面也应得到充分的重视．这就需要一部与之相适应的教材．

这套“大学数学”教材是在前国家教委“面向21世纪教学内容和课程体系改革”研究课题的支持下完成的．共有五本：《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》与《数学实验》．我们认为它们是21世纪高级人才应该普遍具备的数学基础．希望学生通过对它们的学习，能在掌握数学工具、提高理性思维和审美素质以及获取新知识的能力诸方面打下一个良好的基础．这种要求应该是针对任何专业的，只是在深度上及侧重的方面可能会有些区别．

在现行的《高等数学》中，微积分和数学分析之间的关系一直是一个难以处理的问题．19世纪以前的微积分，以它的直观性和不断扩展的应用显示了数学的威力，但同时也暴露出其缺乏严格逻辑基础的缺点．诞生于19世纪的数学分析则以其逻辑的完美显示了数学的理性精神．这两个方面在教材中如果结合得好，可以激发初学者对数学的兴趣；但如果结合得不好，则很可能失去两者的活力而形成一堆枯燥的形式推理和繁琐的计算．在本书中我们力图按其本来的面目来编写，把一元微积分分为两部分：前一部分注重直观，着重训练应用和运算，后一部分则着重培育理性思维．

《多元微积分及其应用》的应用内容包括复变函数、微分几何及常微分方程．

《代数与几何》的代数部分基本上是线性代数，其内容也可分为两部分：一部分是以算法为主的求解一般线性方程组的内容；另一部分则主要研究线性空间及其上的线性映射．由于后者是前者的理论框架，而且它已成为近代数学普遍使用的基本语言，因此本书在集合、关系、运算、代数结构之后，较快地进入后者的讨论，并且通过数值表示把两者结合起来．

至于几何，尽管它在古希腊及19世纪有着辉煌的历史，在本世纪后半叶也进入了数学研究的主流行列，但近50年来，在我国高校的数学基础课中，却一直被压缩到只剩下一点空间解析几何．这对培养学生的形象思维及理性思维的习惯极为不利．本

书除了在多元微积分应用中加上古典微分几何基础(曲线和曲面)以外,在几何部分则增加了“仿射及射影几何”及非欧几何的两个初等模型.

本世纪后半叶以来,人们对事物认识演化的表现之一是从单纯的确定性思维模式进入确定—随机性模式.这一趋势还在发展,在高校数学教学中已受到广泛的关注.我们提出把“随机数学”正式列入基础课.本书内容的重点是通过几个典型范例的讨论,使学习者学会描述与表达随机性及随机变化的过程,即集中于对随机模式认识的训练.

这套系列教材中的《数学实验》有其独特性.它的知识内容包含数值方法、统计计算和优化计算的基本概念和初等方法,其目的是为学生自已动手解决问题提供必要的数学知识和软件平台.这是一门以学生独立动手,教师起辅导作用的课程.这类课程的教材如何编写,本书只是一种尝试.

以上是这套教材的一个简要介绍.这套教材既是一个统一的整体,各部分之间又有相对的独立性,可以独立讲授.在内容方面,它包含了现行的高等数学、线性代数、复变函数、微分方程、微分几何、数值分析、概率统计、优化计算等课程最基本的内容,而总学时则大为减少.我们在清华大学几个班的试验表明:全部讲完上述内容所需的学时大约为 340 左右.除数学实验外,如果再减掉一些内容,280 学时左右也是可以的,可由教师灵活掌握.

这套教材在有些大段落后面,附有一段“评注”,主要讲述这一段的重要思想和可能的发展,为有兴趣的学生进一步学习数学开一点小小的窗口.

大凡一本可用的教材,往往有两种写法:尽量多写一点,以便于教师选择;或尽量写少一点,以便于教师发挥.这套教材似乎偏于前者.因为这是一个尝试,对习惯讲授传统“高等数学”的教师来说,对这套教材可能不太适应,也许需要多一些说明.

这套教材原有的基础是清华大学出版社 1995 年出版、由萧树铁、居余马、葛严林等主编的三卷本《高等数学》.参与现在这套教材编写的有朱学贤、郑建华、章纪民、居余马、李海中、钱敏平、叶俊、姜启源、高立、何青等人.谭泽光、白峰杉、韩云瑞等同志为本书的编写作了大量的工作.高教出版社对本书的编写和出版始终给予热情的支持.

前面已说过,这套教材的编写是一个尝试,目的在于根据“百家争鸣”的精神,参与探索大学数学基础课在培养下一世纪高素质人才中所应起的作用,以及与之相适应的教材建设.我们衷心欢迎各方人士对这套教材评头论足,指出缺点和错误.如果这套教材能起到抛砖引玉的作用,我们就很满足了.

萧树铁

1999 年 6 月

第二版前言

本书第二版，在整体结构上仍与第一版保持一致．而只在局部作了一些改动，主要涉及第二章、第四章、第五章和第六章．

我们在这一版中增加了一些例子，以帮助读者理解内容及其应用，同时也增加了一些内容，增加的内容主要包括：分布的熵、随机数生成和随机模拟算法等，目的是希望读者了解这些在信息科学中常用的分析方法和技巧，同时，还引进了回归系数、回归方程及经验最佳线性预报等概念，并将这些统计学的概念的想法体现在协方差和相关系数的讨论之中，以更好地起到与相关教材的衔接作用（统计部分的内容在这套教材的《数学实验》中介绍），突出本书的特色．同时，我们将某些内容改用小字排印，这些内容只供有兴趣者进一步思考时作参考，而不能作为教学的要求．希望使用的教师掌握难易程度，不要失之于过难．

我们还增加了一些习题，并在第一版基础上对较困难的习题给出了一些提示和参考解答．

本书自2000年第一版出版以来，一直在清华大学本科生的“随机数学方法”课程及北京大学本科生的“初等概率论”课程中使用．清华大学数学科学系的龚光鲁、王晓峰、陈金文等教师参加了本书的试用并提出了许多宝贵的意见；龚光鲁老师自始至终参与了对本书的修改意见的讨论，提出了许多富有创意的真知灼见，并仔细改写并审阅了本书的修改稿．编者在此一并表示衷心的感谢．

编　者

2003年6月

目　　录

第一章　概率与概率空间

1.1 引　　言

1.1.1 随机现象与随机数学

什么是随机数学?顾名思义,它是研究与表达随机现象及其规律性的一个数学分支.所谓随机现象,就是一种不确定的现象,这种现象其实我们每天都会碰到许多.如在雨季外出时,你肯定会想:要不要带伞?这种考虑的背后,就是认为你不能确定"今天是否下雨",进而,会考虑有多大的可能下雨,来决定自己是否带伞.但是即使是气象台,也不能神机妙算到一点不错.因为在雨季"今天是否下雨"是不可能事先完全确定的,它是一个随机现象.再如在冬日大雪之后,地上部分积雪融化成冰,骑自行车的人们多多少少会下车推行,其实这里也表现了人们对于"骑车通过结冰的地面是否会滑倒"这一随机现象发生的可能性的估计.冰结得很硬,表面光滑的路段,滑倒的可能性大,权衡滑倒的损害,多数老年人会选择下车推行;在雪薄而松的路面上,多数人估计滑倒可能性不大,进而继续骑车通过.然而,骑车通过冰结得硬而滑的路面,并不一定会滑倒,只是滑倒的可能性大些;骑车通过雪薄而松的路面,也并不一定不滑倒,只是滑倒的可能性小些而已.又如购买一张彩票,中奖的可能性非常小,但是也不是没有可能中奖.它们都是随机的,也即它们既有可能发生,又有可能不发生.

这类在一组固定的条件下,既可能发生,又可能不发生的现象,就称为**随机现象**."概率"就是描述随机现象发生的可能性大小的数学术语.随机现象的规律性和以往我们在其他数学学科中处理的确定性的规律有所不同.对于确定性的规律来说,有了关于系统当前状态的足够信息,就能使人们对系统在未来时刻的状态做出正确的预测和确切的判断.例如,一个初速为零的物体从某一高度做自由落体,则该物体在时间 t 内下落的距离为 $s=\frac{1}{2}gt^2$(其中 g 为重力加速度),这一点不待你做完这个试验(即下落 t 时刻后)就能预知.

其实,在日常生活中,许多系统中都或多或少地蕴含着随机的成分.从绝对的意义讲,许多通常视为确定性模型的系统,本质上都有随机性,只是在有些问题中由于随机性干扰不大,也就把它作为确定性的模型来处理了.

基于对随机现象与可能性的认识作决策,正是人类智能的表现.明智的人们并不是简单地由某个事情会发生,就作决策;而是根据事情发生的可能性的大小,权衡利弊再来作决策的.例如,在交通繁忙的现代都市,我们上街去,就有发生车祸的可能,但是我们并不因此而停止上街,而是想出种种方法,定出种种规则,来使车祸发生的可能性减小到一定程度.

其实,这里蕴含了一种不同于读者在以往确定性数学中经常运用的思想方法和世界观.在随机现象的研究中,我们不是期望能将复杂的随机现象简单地化为确定性的,而是承认在所研究的系统中确有一些我们不能掌握或根本不知道的因素,即确认系统中会有随机现象发生.面对这样的现实,从随机数学的观点出发,我们的态度是:并不无视随机性的存在,而简单地就已经掌握的片面情况,乱作决定;也不盲目地逃避不确定性,而踌躇不前,以至认为无法定出什么好决策;而是,找出实际情况中随机现象的规律,并基于对它们的认识,做尽可能好的决策.然而,有时候也会面对各种可能结果,并不存在一个万全的决策,这时我们往往只能给出这样的决策:以可以忍受的小概率失败的风险来换取能以大概率得到成功的效果.

概率论是随机数学的基础,它的任务是给出随机现象的数学模型,并用数学语言来描述它们,进而研究其基本规律,以便帮助人们透过表面的偶然性,找出其内在规律,并以数学的形式来描述这些规律,建立起随机现象与数学其他分支的桥梁,使得我们可以使用许多已经成熟的数学方法来研究随机现象.事实上,随着概率论的发展,它也不断地对其他数学分支提出了许多新的问题,并为它们提供了解决问题的新思路与直观的启迪.

随机数学的另一个重要分支是数理统计,它侧重从观测数据出发来研究随机现象,因而,数理统计也是以概率论为基础的,在实际应用中,数理统计是处理随机现象的最重要的工具.但是,由于篇幅所限,本书只将其作为概率论的应用实例来处理.

1.1.2 概率论的简单发展历史

由于在博奕与靠运气取胜的机会游戏中,最典型地体现了随机性及其规律,因此,早期的概率研究多集中于博奕问题.大约在 17 世纪,欧洲的数学家们就开始探索用等可能性分析(古典概型)来解决博奕中提出的一些问题.到了 18,19 世纪,随着当时科学的发展,人们注意到在许多科学问题和社会问题中(如天文观测、人口统计、航海通商、误差理论、产品检查与质量控制等)有许多现象与机会游戏之间十分相似,从而由机会游戏起源的概率论,也就被应用到这些领域中,这同时也就加速推动了概率论本身的发展,使之成为数学的一个重要分支.一般认为概率论的奠基人是瑞士数学家 Bernoulli,他建立了概率论中第一个极

限定理(即 Bernoulli 大数定律),阐明了事件发生的频率稳定于它的概率.这个定理将人们对于可能性的感性认识(频率)与等可能性分析的理论结果统一起来,形成了清晰的概率的概念.随后,De Moivre 和 Laplace 又导出了第二个基本的极限定理(即中心极限定理)的原始形式,将概率论推向一个新的发展阶段.在19世纪末,俄国数学家 Chebyshev,Markov,Liapunov 以及20世纪的 Lévy,Khinchine 等人,用分析的方法建立了大数定律及中心极限定理的一般形式,科学地解释了为何在实际中遇到的许多随机变量都近似服从正态分布.

进入20世纪后,由于大量实际问题的需要,特别是受物理学的刺激,人们开始研究随机过程.Einstein,Wiener,Lévy 等人对生物学家 Brown 在显微镜下观测到的花粉微粒的"无规则"运动进行了开创性的理论分析,提出了 Brown 运动的模型,并进行了系统的研究.与之独立地,法国数学家 Bachelier 在他的论文《投机的理论》中首次提出了 Brown 运动,并以此作为证券价格涨落的数学模型,可以说他是近代金融数学的先驱.而 Erlang 等人则在电话流问题中研究了 Poisson 过程,成为排队论开创者.Brown 运动与 Poisson 过程并称随机过程两大基石.另外,Feller 等在生物群体生长模型中提出了生灭过程,Cramer,Wiener 和 Khinchine 等系统研究了平稳过程,Kolmogorov,Feller 和 Doob 则开创了更一般的 Markov 过程和鞅论的系统研究.至今,随机过程已经发展成为一个应用十分广泛的最重要的概率论的分支.

在概率论发展史中,特别值得一提的是 Kolmogorov 在1933年创立的概率论的公理体系,他用集合论与测度论的思想,归纳总结了事件及事件的概率的最基本的性质和关系,建立了概率的公理体系,使早期概率研究中出现的含糊与暧昧之处得以澄清,并为近代概率论奠定了严密的理论基础,从而使得近代概率论,如随机过程等复杂问题的研究有了坚实的基础,得以健康地发展.

1.2 随机事件及其概率

在掷骰子、投硬币等简单的机会游戏中,随机性体现得最为典型和明确,所以在本节中,我们从掷骰子、投硬币等试验出发来说明在概率论中是如何描述我们所关心的问题的,以及怎样利用等可能性分析来求其出现的可能性大小,即求其发生的概率.

1.2.1 对称情形的随机事件的描述及等可能性分析

例 1.1 掷一颗各面均匀的骰子,它一共可以有6种不同结果:即分别掷到的点数是1,2,3,4,5和6.我们用相应的数字代表每一个结果,并将这6个结果组成的集合记为 Ω,即

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

一般地,我们把试验的每一种可能的结果称为一个**基本事件**(或称**样本点**),称所有基本事件的全体为该试验的**样本空间**,记为 Ω.

在此例中,Ω 中有 6 个样本点.而“掷到奇数点”就是掷到 1,3,5 点,我们可用 Ω 的子集合$\{1,3,5\}$来表示,记为“掷到奇数点” $= \{1,3,5\}$.类似地,“掷到素数点” $= \{2,3,5\}$.假如在掷骰子的游戏中,甲乙两人约定:掷到“1”点甲赢,而掷到“6”点乙赢,其余情况须重掷,则“甲赢” $= \{1\}$,“乙赢” $= \{6\}$,“须重掷” $= \{2,3,4,5\}$.所有这些都是掷一颗各面均匀的骰子这个随机试验出现的各种事情,我们称每一个这种事情为一个**随机事件**(或简称为**事件**).从而可见,对每一个随机事件,就对应一个 Ω 的子集合.如果试验掷到的结果是“5”点,则“掷到素数点”、“掷到奇数点”及“须重掷”三个随机事件都发生了,但是“甲赢”、“乙赢”这两个随机事件都没有发生.从这里我们可以得到一般的认识:在一次随机试验得到结果后,如果事件 A(作为 Ω 的子集合)中包含这个结果,我们就称在这次随机试验中,事件 A 发生了,否则就说事件 A 没有发生.请注意,这里一个随机事件用日常语言来描述时,可能有许多不同的方式,例如事件$\{1\}$既可说是“甲赢”,也可说是“掷到 1 点”,或“掷到最小的点数”等等,但是实质上,它们根本就是一回事.

从数学的角度看,与试验有关的每一件“事情”均可描述成样本空间 Ω 的一个子集,反之亦然.在一次试验中,倘若我们得到一个结果 $\omega \in \Omega$,那么,如果 $\omega \in A$,则我们就称**事件 A 发生了**;否则就说 A **没有发生**.

特别应该说明的是,Ω 作为它自己的一个子集合也是一个特殊的事件,即无论试验结果是什么,它总是一定会发生的,所以,我们称 Ω 为**必然事件**.而它的“反面”是空集 $\varnothing$,称它为**不可能事件**,因为无论出现什么试验结果,它都不会在空集中,也就是说不可能事件一定不会发生.

现在我们来分析上述这个随机试验中各随机事件的概率.在这个试验中,6 个基本事件是对称的,所以它们的概率应彼此相同,如果我们将一定发生的事件(即必然事件 Ω)的概率定为 1,则每一个基本事件的概率应为$\frac{1}{6}$,因为它是 6 个等概率的基本事件的总和(概率为 1)中的 1 份.由此,类似地,“掷到素数点”的概率应该是$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$(6 个基本事件中,3 个之一发生了,它就发生).同样,“掷到奇数点”的概率应为$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

将上面这些表述用数学符号来表达就变得简洁而准确:令 $A \subset \Omega$(即 A 是 Ω 的一个子集合,也就是一个事件),$P(A)$ 表示事件 A 的概率.由于 Ω 中每个基本事件都有相同的概率$\frac{1}{6}$,于是

$$P(\{2,3,5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(\{1,2,3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

一般地,我们有:

$$P(A) = \frac{\# A}{6} \quad (\text{其中 } \# A \text{ 表示集合 } A \text{ 中的样本点数}).$$

下面我们再来看一个稍微复杂一点的例子.

例 1.2 同时掷两颗骰子,我们关心的是将会出现怎样的结果.不妨假设一颗骰子是黄色的,另一颗是白色的.那么,试验每一个可能出现的结果都可以用一个有序对(ω_Y,ω_W)来表示,其中ω_Y为1至6之间的一个数,用它来表示黄色骰子出现的点数;同样,ω_W表示白色骰子出现的点数.例如,(1,2)表示"黄色骰子出现的点数为1,而白色骰子出现的点数为2"这一结果,容易看出,该试验共有36个可能的结果.但一次试验中究竟会出现哪一个结果,在投掷前是无法预知的,它是一个随机试验.

这个随机试验的样本空间(即基本事件(或样本点)的全体36个结果的集合)Ω为

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(\omega_Y,\omega_W):\omega_Y,\omega_W = 1,2,3,4,5,6\} \\ &= \{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6); \\ &\quad (2,1),(2,2),\cdots(2,6); \\ &\quad \cdots\cdots \\ &\quad (6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\}.\end{aligned}$$

这里,前面的一个表达式是比后一个具体表达式更为抽象而严格的表达方式.对于元素很多的集合,这种表达方式可使问题表达得简洁而准确.读者应学会这种表达方法,它将有助于对复杂问题的分析与思考.

考虑事件A:"两颗骰子的点数成对",此事件就由6个基本事件组成,它是样本空间Ω的一个子集:

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}.$$

如果在一次试验中,我们掷到(3,3),我们就说A发生了.而如果我们掷到了(3,5),那就说A没有发生.

再来考虑事件B:"两骰子出现的点数之和为8",这时我们有

$$B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}.$$

显然,"两骰子出现的点数之和不超过12" $= \Omega$,即它是必然事件.而"掷两骰子出现的点数之和超过12" $= \varnothing$,即它是不可能事件.

现在,让我们来分析这个试验中各种事件的概率.由于两个骰子完全相同,

各面也完全对称，所以任何两个结果（如(1,1) 和(5,6)）都是等概率出现的. 从而，每一种结果发生的概率就都是$\frac{1}{36}$. 进而，我们有

$$P(A)=\frac{\# A}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\qquad P(B)=\frac{\# B}{36}=\frac{5}{36}.$$

上面两个例子中利用等可能性分析求得概率的模型，也称为概率的**古典模型**（**古典概型或等可能概率模型**）. 我们可以将它归纳为如下的一般原则：如果一个随机试验的全部结果（基本事件）一共只有有限个，设为 n 个，而且它们都具有相同的可能性，则称这个随机试验为古典概型，且其中的任意一个事件 A 的概率是

$$P(A)=\frac{\# A}{n}\qquad (\text{其中 } \# A \text{ 表示} A \text{ 中的基本事件(或样本点)个数}).$$

在计算有关的概率时，首先要弄清怎样才是做完了一次完整的随机试验，再分析此随机试验的所有可能的结果有哪些（即其全部基本事件是什么），它们是否对称（即是否等可能）. 在各个基本事件之间是相互对称的情形，就可以用古典概型进行计算.

1.2.2 事件的运算

既然事件是 Ω 的子集，因此我们可以通过集合的运算与包含等关系，用一些事件来表达比它们更为复杂的事件及其关系.

假设 A,B 为随机试验中的两个事件. 作为 Ω 的子集，则 $A\cup B$（即集合 A 与集合 B 的**并**）表示的事件是由那些 A 或 B 中的所有基本事件所组成的事件，称为事件 A 与 B 的**和事件**. 而“在某次试验中事件 $A\cup B$ 发生”，则意味着在该次试验中，事件 A 与 B 至少有一个发生.

我们继续以掷两个骰子的试验为例，样本空间 Ω 和事件 A 和 B 如前所述，则有

$$\begin{aligned}A\cup B=\{&(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),\\&(6,6),(2,6),(3,5),(5,3),(6,2)\}.\end{aligned}$$

类似地，我们用 $A\cap B$ 表示既属于 A 又属于 B 的所有基本事件组成的事件，也称为事件 A 与 B 的**交事件**. 在此例中，$A\cap B=\{(4,4)\}$. $A\cap B$ 常简记为 AB.

我们还用 A^c（A 的余集合）表示 Ω 中那些不在 A 中的所有样本点的全体所组成的事件，也称为 A 的**对立事件**. 所以，A^c 发生，当且仅当 A 不发生. 例如在上例中

$$\begin{aligned}A^c&=\{(\omega_Y,\omega_W)\in\Omega:\omega_Y\neq\omega_W\}=\{(\omega_Y,\omega_W)\in\Omega:(\omega_Y,\omega_W)\notin A\}\\&=\text{“两颗骰子的点数不成对”}.\end{aligned}$$