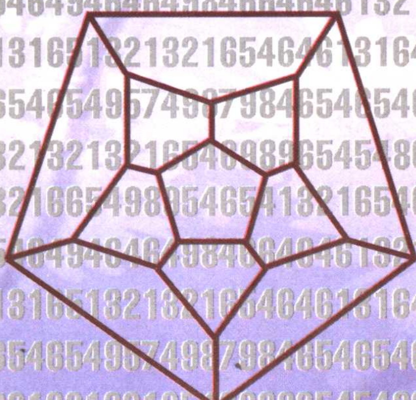
郑汉鼎 刁在筠 编著

数学规划



山东教育出版社

数学规划

郑汉鼎　刁在筠　编著

山东教育出版社
1997年·济南

数 学 规 划

郑汉鼎　刁在筠　编著

出版发行：山东教育出版社
地　　址：济南市经八纬一路 321 号

出版日期：1997 年 12 月第 1 版
　　　　　1997 年 12 月第 1 次印刷
印　　数：1—1000
用纸规格：850 毫米×1168 毫米　32 开
　　　　　16.25 印张　4 插页　357 千字

制版印刷：山东人民印刷厂

书　　号：ISBN 7-5328-2609-0/G・2405
定　　价：18.10 元

前　言

数学规划是运筹学的一个重要分支，也是现代数学的一门重要学科.它的研究对象是数值最优化问题，这是一类古老的数学问题.古典的微分法已经可以解决某些简单的非线性最优化问题.然而，直到本世纪40年代以后，由于大量实际问题的需要和电子计算机的高速发展，数学规划才迅速发展起来，成为一门十分活跃的新兴学科.今天，数学规划的应用极为普遍，它的理论和方法已经渗透到自然科学、社会科学和工程技术中.所以，不仅不少高等院校为有关专业的本科生、研究生开设这门课，而且有很多实际工作人员为了工作需要，也在学习数学规划的理论和方法.

编者在山东大学为运筹学专业的本科生、研究生讲授整数规划、非线性规划、动态规划等课程多年，编写了讲义并在这个基础上写成本书.本书共分六章，分别是整数规划、非线性规划、目标规划、动态规划、随机规划和数学规划模型的建立与应用案例分析.每章都配有一定数量的习题.附录包括习题答案和参考文献.

本书的预备知识是微积分、高等代数和概率论基础.为了使没有学过线性规划的读者也能阅读本书，在

本书第一章中介绍了线性规划的基本理论和算法.本书各章有相对独立性.读者可以根据需要略过一些章,而不影响其他章的阅读.特别有些实际工作者可以根据需要只阅读每章的基本概念、方法和应用部分而略过理论部分.当然,我们也尽量介绍一些近代的结果,以便于一部分读者作进一步研究时参考.

本书可用作运筹学、应用数学等专业大学生、研究生的教材或参考书.作为教材,本书可于72学时内完成.

本书的第一、四、五章由郑汉鼎编写,第二、三、六章由刁在筠编写.

在本书的成书过程中,得到了山东大学数学系、山东教育出版社的大力支持,山东教育出版社的霍亮同志为本书的出版作了大量深入细致的工作,编者在此深表感谢.

由于编者水平所限,不当之处在所难免,敬请使用本书的广大读者提出宝贵意见.

郑汉鼎　刁在筠

目　录

第一章　整数规划

整数规划是一类要求变量取整数值的数学规划，它在经济管理、工程技术、计算机技术等部门中有广泛的应用．从 Gomory，R. E 在 1959 年提出解整数线性规划的割平面方法以后，整数规划逐步形成一个独立的分支．但是，就目前看来，整数规划仍是数学规划中较薄弱的一个分支．

本章将着重介绍解整数线性规划的两个主要方法：割平面法、分枝定界法．至于整数非线性规划，目前的研究成果较少，只作简单介绍．

§1.1　引　　言

本节将介绍整数线性规划问题的几个实例，为了便于没有学过线性规划的读者阅读，本节还简单叙述了解线性规划的单纯形方法，对偶单纯形方法和变量有界的线性规划问题的一个解法．

1. 整数线性规划问题

整数规划是一类要求变量取整数值的数学规划问题．一般的数学规划问题可抽象地叙述为

$$\max_{X \in S \subseteq R^n} f(X) \tag{1.1.1}$$

其中，R^n 是 n 维实数向量的全体，f 是定义在 S 上的一个实函数，集合 S 称为约束集合，f 称为目标函数．

如果 $X^0 \in S$，就称 X^0 为(1.1.1)的一个可行解，若有 $X^0 \in S$，并且对所有的 $X \in S$，都满足

$$\infty > f(X^0) \geqslant f(X),$$

那么，X^0 就被称为(1.1.1)的整体最优解(简称最优解).

整数规划是一个数学规划问题，其中

$$S \subset Z^n \subset R^n,$$

这里，Z^n 是全部 n 维整数向量组成的集合.

混合整数规划问题也是一个数学规划问题，不过其中 $X \in S$ 的分量中至少有一个(但不是全部)要求是整数.

整数线性规划问题是一类变量取整数值的线性规划问题.

线性规划问题 LP：

$$\begin{cases} f(X) = \max CX, & (1.1.2) \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} AX = b, \\ X \geqslant 0. \end{cases} & (1.1.3) \end{cases}$$

这是 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵，b 是一个 m 维列向量，C 是一个 n 维行向量，X 是 n 维列向量，0 是零向量.

整数线性规划问题 ILP：

$$\begin{cases} f(X) = \max CX, & (1.1.4) \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} AX = b, \\ X \geqslant 0. \text{ 整数} \end{cases} & (1.1.5) \end{cases}$$

在约束条件中，增加了 X 的分量是整数的要求. A,b,C 中的数全是整数，由于以任一正数乘目标函数，或者以任何一非零数乘约束，都不会使问题发生变化，所以可以假定 A,b,C 中所有的数全是整数.

从应用上来看，把数学规划(1.1.1)假想为一个决策模型比较合适，其中 S 表示全部允许策略集合，而 f 为某个目标的数量表达式，这个目标可以是时间、利润、原材料等. 在很多实际

问题中，变量要求取整数值，或者一部分分量要求取整数值，那就是整数规划问题．这类问题在工程技术、企业管理、社会科学的许多分支中都有大量应用．下面我们举几个例子．

例 1.1.1 行李问题

某人准备带 n 类商品从甲地到乙地去销售，每个第 j 类商品的重量为 a_j，利润为 c_j. 由于运输力量的限制，他最多能带重量不超过 b 的商品. 问每类商品应该带多少个，才能使总利润最大．

令 x_j 表示带第 j 类商品的个数，则上述问题的数学模型是

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, & \\ & j=1,2\cdots n. \\ \text{s.t.} \ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b, x_j \geqslant 0, \quad x_j \text{ 取整数}, & \end{cases} \tag{1.1.6}$$

如果在行李问题中，每类商品只有 1 个，只有 2 个决策：带去或者不带去．这时行李问题的数学模型为

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, & \\ & j=1,2\cdots n. \\ \text{s.t.} \ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b, x_j = 0 \text{ 或 } 1, & \end{cases}$$

如果对上述行李问题再加以扩充：在运输能力上，除了重量限制以外，还有体积限制．第 j 种商品的重量是 a_{1j}，体积是 a_{2j}，而运输能力的限制是重量不超过 b_1，体积不超过 b_2. 那么数学模型为

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, & \\ & i=1,2, j=1,2\cdots n. \\ \text{s.t.} \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, x_j = 0 \text{ 或 } 1, & \end{cases}$$

例 1.1.2 旅行售货员问题与生产顺序表问题．

有一推销员从城市 v_0 出发，要走遍 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 城各一次，最后返回 v_0. 已知 v_i 到 v_j 的旅行费为 c_{ij}，问他应按怎样的次序走遍这些城市，使得总旅费最少？

令变量 x_{ij} 表示

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果推销员从 } v_i \text{ 到 } v_j, \\ 0, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

则问题的数学模型可表为以下的混合型整数线性规划问题：

$$\begin{cases} \min f=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n}c_{ij}x_{ij}, & \\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{i=0}^{n}x_{ij}=1, & j=0,1\cdots n, \\ \sum\limits_{j=0}^{n}x_{ij}=1, & i=0,1\cdots n, \\ u_i-u_j+nx_{ij}\leqslant n-1, & i,j=1,2\cdots n, i\neq j, \\ x_{ij}=0 \text{ 或 } 1, & i,j=0,1\cdots n, \\ u_i \text{ 为实数}, & i=1,2\cdots n. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

其中，第一组约束条件表示各城恰好进入一次，第二组约束条件表示各城恰好离开一次，第三组约束条件用以防止出现多于一个的互不连通的回路. 例如，对于 6 个城市($n=5$)的旅行售货员问题，如果令

$x_{01}=x_{12}=x_{20}=1, x_{34}=x_{45}=x_{53}=1$, 其他 $x_{ij}=0$，就是像图 1.1.1 所表示的两个互不连接的子回路这样的一组 $\{x_{ij}\}$，满足第一组和第二组约束条件，但不满足第三组约束条件，因为

$$\begin{cases} u_3-u_4+5\leqslant 4, \\ u_4-u_5+5\leqslant 4, \\ u_5-u_3+5\leqslant 4 \end{cases}$$

将导致 5≤4 的矛盾.

可以证明，(1.1.7) 中第三组约束，既能防止不连通回路的出现，又不会排除任何符合要求的回路.

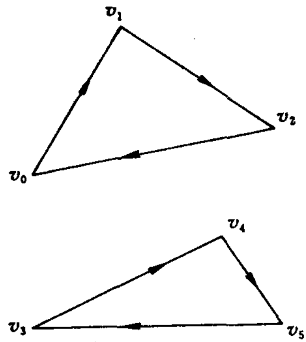


图 1.1.1

不少管理问题都可以抽象成旅行售货员问题，如下列生产顺序表问题：

要在一台机器上安排 n 项作业的生产任务，要求从机器的初始安装状态启动，完成各项作业后，再恢复到初始状态，设该机器在完成第 i 项作业后紧接做第 j 项作业所需费用为 c_{ij}，问应怎样安排作业顺序，使总费用最低？这里的“机器”相当于旅行售货员问题中的“推销员”，这里的“作业”相当于旅行售货员问题中的“城市”，机器完成各项作业后，恢复到初始状态，相当于推销员访遍各城后回到出发点．因此，上述生产顺序表问题的数学模型与旅行售货员问题的数学模型一样.

例 1.1.3 仓库选配问题

某超级市场联销中心决定在 m 个仓库中选用若干个调出货物以满足 n 个超级市场的需要．已知当第 i 个仓库被动用时，其固定经营费为 a_i，从仓库 i 到超市 j 的单位货物运输费是 c_{ij}，仓库 i 的货物存储量是 b_i，超市 j 对货物的需要量是 d_j，问中心应该如何决策，就是应该动用哪些仓库和各仓库到各超市运多少货物，才能既满足超市需要，又使总费用(包括经营费和运输费)最低.

令变量 y_i 表示

$$y_i=\begin{cases}1,\text{当第 } i \text{ 个仓库被动用},\\0,\text{当第 } i \text{ 个仓库不被动用}.\end{cases}$$

令变量 x_{ij} 表示从仓库 i 运送给超市 j 的货物量，则上述仓库选配问题的数学模型是

$$\begin{cases}\min f=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum\limits_{i=1}^{m}a_iy_i,\\ \text{s.t. } \sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=d_j, \qquad j=1,2\cdots n,\\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}-b_iy_i\leqslant 0, \qquad i=1,2\cdots m,\\ x_{ij}\geqslant 0, \qquad i=1,2\cdots m;j=1,2\cdots n,\\ y_i=0 \text{ 或 } 1, \qquad i=1,2\cdots m.\end{cases}$$

其中，第一组约束表示每个超市的需求必须满足，第二组约束表示只能从动用的仓库运输货物，并且运出量不超过其存储量．因为，当仓库 i 不被动用时，$y_i=0$，第二组约束成为

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant 0,$$

这表明没有货物从仓库 i 运出．当仓库 i 被动用时，$y_i=1$，第二组约束成为

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant b_i,$$

这表明从仓库 i 运出的货物总量不超过它的存储量．

上列数学模型是个混合型整数线性规划问题．

从上面的例子可以看到，有的整数线性规划问题要求变量的取值只限于 0 或 1，这类整数线性规划问题被称为 0，1 线性规划问题．

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{X})=\max \boldsymbol{CX}, \\ \text{s.t.} \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \qquad i=1,2\cdots m, \\ x_j=0 \text{ 或 } 1, \qquad j=1,2\cdots n. \end{cases}$$

2. 解一般线性规划问题的单纯形方法

下面，我们将复习一般线性规划问题的解法．

线性规划问题 LP：

$$\begin{cases} \max x_0=\boldsymbol{CX}, \\ \text{s.t.} \begin{cases} A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{X}\geqslant \boldsymbol{0}. \end{cases} \end{cases} \tag{1.1.8}$$

这里 $\boldsymbol{C}=(c_1,c_2\cdots c_n)$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2\cdots x_n)^T$，

$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2\cdots b_n)^T$，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2\cdots \boldsymbol{P}_n),$$

$$\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j}\cdots a_{mj})^T.$$

假定 A 的秩是 m，下面给出三个已知的定义．

可行解：满足 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的向量 $\boldsymbol{X}^0$ 被称为(1.1.8)的可行解．

最优解：$\boldsymbol{X}^0$ 是(1.1.8)的可行解，并且对(1.1.8)的任一可行解 $\boldsymbol{X}$，都有

$$\infty > \boldsymbol{CX}^0 \leqslant \boldsymbol{CX},$$

则称 $\boldsymbol{X}^0$ 是(1.1.8)的最优解．

基本解：在矩阵 A 中任意取出 m 个线性无关的列向量 $\boldsymbol{P}_{i_1}$，$\boldsymbol{P}_{i_2}\cdots\boldsymbol{P}_{i_m}$，组成满秩方阵 B，其余的列向量组成矩阵 N，$\boldsymbol{X}_B$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 中下标对应 B 中列的那些变量(称基变量)，$\boldsymbol{X}_N$ 是 $\boldsymbol{X}$ 中下标

对应 N 中的列的那些变量(称非基变量),这时 $AX=\boldsymbol{b}$ 就可以写成

$$BX_B+NX_N=\boldsymbol{b},$$

于是 $$X_B=B^{-1}\boldsymbol{b}-B^{-1}NX_N. \tag{1.1.9}$$

$AX=\boldsymbol{b}$ 的一个特解 $X_B^0=B^{-1}\boldsymbol{b}$,$X_N^0=\boldsymbol{0}$ 称为(1.1.8)的一个基本解(有时也称基解),矩阵 B 称为这个基本解对应的基阵.

基可行解:如果一个基解又是可行解,就称为基可行解.

退化的基可行解:一个基可行解,如果它至少有一个基变量取值为 $\boldsymbol{0}$,则称这个基可行解为退化的基可行解.

线性规划的一个基本定理:若 LP(1.1.8)有最优解,则它一定存在一个基可行解是最优解.

所以找线性规划问题的最优解就可以只在它的基解集合上找.下面我们举例说明基解、基可行解.

例如,

$$\begin{cases} \max x_0=2x_1+x_2, \\ \text{s. t.} \quad x_1+x_2+x_3=5, \\ \quad -x_1+x_2+x_4=0, \\ \quad 6x_1+2x_2+x_5=21, \\ \quad x_1, x_2\cdots x_5\geqslant 0. \end{cases}$$

图(1.1.2)是它的可行解集合,已经投影到二维平面上.显然,基解至多有 $\binom{n}{m}$ 个,在这个例子中,矩阵 A 的列数是 5,秩是 3,所以至多有 $\binom{5}{3}=10$ 个基解.其中 6 个是基可行解.

列出 10 个基阵,并且分别求出它的逆矩阵 B^{-1},再根据(1.1.9)求出基解.