

郑汉鼎 刁在筠 编著

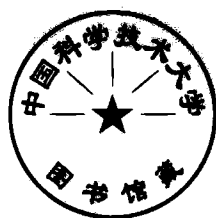
数学规划

12345678913216654989549541321654613216546498
946546494654649464649876546132132165461613
16131231321316513213216546161316464849846546
54987496546546549574987984654654987654654
6546321321321321321654616131646484984654
12345678913216654989549541321654613216546498
94654649465464946464984664646132132165461613
16131231321316513213216546461316464849846546
54987496546546549574987984654654987654654
6546321321321321321654616131646484984654
12345678913216654989549541321654613216546498
94654649465464946464984664646132132165461613
16131231321316513213216546461316464849846546
54987496546546549574987984654654987654654
6546321321321321321654616131646484984654

山东教育出版社

数 学 规 划

郑汉鼎 刁在筠 编著



山 东 教 育 出 版 社

1997 年 · 济南

数 学 规 划

郑汉鼎 刁在筠 编著

出版发行：山东教育出版社

地 址：济南市经八纬一路 321 号

出版日期：1997 年 12 月第 1 版

1997 年 12 月第 1 次印刷

印 数：1—1000

用纸规格：850 毫米×1168 毫米 32 开

16.25 印张 4 插页 357 千字

制版印刷：山东人民印刷厂

书 号：ISBN 7-5328-2609-0/G·2405

定 价：18.10 元

前 言

数学规划是运筹学的一个重要分支,也是现代数学的一门重要学科. 它的研究对象是数值最优化问题,这是一类古老的数学问题. 古典的微分法已经可以解决某些简单的非线性最优化问题. 然而,直到本世纪 40 年代以后,由于大量实际问题的需要和电子计算机的高速发展,数学规划才迅速发展起来,成为一门十分活跃的新兴学科. 今天,数学规划的应用极为普遍,它的理论和方法已经渗透到自然科学、社会科学和工程技术中. 所以,不仅不少高等院校为有关专业的本科生、研究生开设这门课,而且有很多实际工作人员为了工作需要,也在学习数学规划的理论和方法.

编者在山东大学为运筹学专业的本科生、研究生讲授整数规划、非线性规划、动态规划等课程多年,编写了讲义并在这个基础上写成本书. 本书共分六章,分别是整数规划、非线性规划、目标规划、动态规划、随机规划和数学规划模型的建立与应用案例分析. 每章都配有一定数量的习题. 附录包括习题答案和参考文献.

本书的预备知识是微积分、高等代数和概率论基础. 为了使没有学过线性规划的读者也能阅读本书,在

本书第一章中介绍了线性规划的基本理论和算法. 本书各章有相对独立性. 读者可以根据需要略过一些章, 而不影响其他章的阅读. 特别有些实际工作者可以根据需要只阅读每章的基本概念、方法和应用部分而略过理论部分. 当然, 我们也尽量介绍一些近代的结果, 以便于一部分读者作进一步研究时参考.

本书可用作运筹学、应用数学等专业大学生、研究生的教材或参考书. 作为教材, 本书可于 72 学时内完成.

本书的第一、四、五章由郑汉鼎编写, 第二、三、六章由刁在筠编写.

在本书的成书过程中, 得到了山东大学数学系、山东教育出版社的大力支持, 山东教育出版社的霍亮同志为本书的出版作了大量深入细致的工作, 编者在此深表感谢.

由于编者水平所限, 不当之处在所难免, 敬请使用本书的广大读者提出宝贵意见.

郑汉鼎 刁在筠

目 录

第一章 整数规划	11
§ 1.1 引言	11
1. 整数线性规划问题	11
2. 解一般线性规划问题的单纯形方法	7
3. 解一般线性规划问题的对偶单纯形方法	19
4. 有界变量的线性规划解法	24
§ 1.2 割平面法	28
1. 割平面法的基本思想	28
2. 整数型割平面法	33
3. 对偶全整数割平面法	43
4. 原全整数割平面法	54
5. 三个基本算法的综合讨论	68
6. 混合型割平面	70
§ 1.3 分枝定界法	74
1. 枚举树	74
2. 分枝定界法的基本思想	77
3. 解 ILP 的分枝定界法	85
4. 隐枚举法	91
§ 1.4 几个特殊类型的整数线性规划问题	100
1. 单模矩阵	100
2. 系数矩阵是全单模矩阵的几个整数线性规划问题	105
3. 行李问题	109

4. 集合的覆盖与划分问题	123
§ 1.5 整数非线性规划问题	141
1. 用分枝定界法解整数非线性规划问题	141
2. 隐枚举法	143
3. 字典序枚举法	144
习题一	149
第二章 非线性规划	157
§ 2.1 基本概念	157
1. 非线性规划问题	157
2. 非线性规划方法概述	163
3. 算法的收敛性和收敛速度	166
§ 2.2 凸集、凸函数和凸规划	169
1. 凸集、凸函数及有关性质	169
2. 凸规划及其性质	176
§ 2.3 一维搜索方法	179
1. 0.618 法	179
2. Newton 法	184
3. 非精确一维搜索方法	186
§ 2.4 无约束最优化方法	191
1. 无约束问题的最优性条件	191
2. 最速下降法	194
3. Newton 法	197
4. 变度量法	200
5. 共轭方向法	208
§ 2.5 约束最优化方法	219
1. 约束最优化问题的最优性条件	219
2. 简约梯度法	227

3. 惩罚法	237
4. 乘子法	246
习题二	260
第三章 目标规划	267
§ 3.1 线性目标规划模型	267
§ 3.2 线性目标规划的求解方法	280
1. 图解法	282
2. 多阶段单纯形法	289
习题三	305
第四章 动态规划	309
§ 4.1 最优化原理	309
1. 多阶段决策问题及例	309
2. 用递推法解最短路线问题	314
3. 最优化原理	318
§ 4.2 确定性的定期多阶段决策问题	322
1. 旅行售货员问题	323
2. 多阶段资源分配问题	328
3. 用最优化原理解某些非线性规划问题	333
4. 排序问题	340
§ 4.3 确定性的不定期多阶段决策问题	344
1. 最优路线的问题	344
2. 有限资源分配问题	353
3. 解的性质的研究	361
§ 4.4 带随机因素的多阶段决策问题	371
1. 随机金矿问题	371
2. 存储问题	382
3. 马尔可夫决策过程	389

4. 最佳仓库容量的确定	399
习题四	410
第五章 随机规划	419
§ 5.1 随机规划模型	419
1. 处理随机规划的几种方法	419
2. 等待观察到随机变量的实现后再作决策——分布问题	421
3. 在观察到随机变量的实现前便作决策—— 两阶段有补偿问题	422
4. 在观察到随机变量的实现前便作决策——概率约束规划	425
§ 5.2 随机线性规划问题	428
1. 分布问题	428
2. 两阶段补偿问题	449
3. 概率约束规划	472
§ 5.3 应用举例	474
1. 水资源管理问题	474
2. 运输问题	477
3. 车辆派遣问题	480
习题五	483
第六章 数学规划模型的建立与应用案例分析	485
§ 6.1 数学规划模型的建立	485
§ 6.2 案例分析	490
习题答案	499
参考文献	507

第一章 整数规划

整数规划是一类要求变量取整数值的数学规划,它在经济管理、工程技术、计算机技术等部门中有广泛的应用.从 Gomory, R. E 在 1959 年提出解整数线性规划的割平面方法以后,整数规划逐步形成一个独立的分支.但是,就目前看来,整数规划仍是数学规划中较薄弱的的一个分支.

本章将着重介绍解整数线性规划的两个主要方法:割平面法、分枝定界法.至于整数非线性规划,目前的研究成果较少,只作简单介绍.

§ 1.1 引言

本节将介绍整数线性规划问题的几个实例,为了便于没有学过线性规划的读者阅读,本节还简单叙述了解线性规划的单纯形方法,对偶单纯形方法和变量有界的线性规划问题的一个解法.

1. 整数线性规划问题

整数规划是一类要求变量取整数值的数学规划问题.一般的数学规划问题可抽象地叙述为

$$\max_{X \in S \subseteq R^n} f(X) \quad (1.1.1)$$

其中, R^n 是 n 维实数向量的全体, f 是定义在 S 上的一个实函数,集合 S 称为约束集合, f 称为目标函数.

如果 $X^0 \in S$, 就称 X^0 为 (1.1.1) 的一个可行解, 若有 $X^0 \in S$, 并且对所有的 $X \in S$, 都满足

$$\infty > f(X^0) \geq f(X),$$

那么, X^0 就被称为 (1.1.1) 的整体最优解 (简称最优解)。

整数规划是一个数学规划问题, 其中

$$S \subset Z^n \subset R^n,$$

这里, Z^n 是全部 n 维整数向量组成的集合。

混合整数规划问题也是一个数学规划问题, 不过其中 $X \in S$ 的分量中至少有一个 (但不是全部) 要求是整数。

整数线性规划问题是一类变量取整数值的线性规划问题。

线性规划问题 LP:

$$\begin{cases} f(X) = \max CX, & (1.1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{s. t.} & \begin{cases} AX = b, \\ X \geq 0. \end{cases} & (1.1.3) \end{cases}$$

这是 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵, b 是一个 m 维列向量, C 是一个 n 维行向量, X 是 n 维列向量, 0 是零向量。

整数线性规划问题 ILP:

$$\begin{cases} f(X) = \max CX, & (1.1.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{s. t.} & \begin{cases} AX = b, \\ X \geq 0. \end{cases} \text{ 整数} & (1.1.5) \end{cases}$$

在约束条件中, 增加了 X 的分量是整数的要求。 A, b, C 中的数全是整数, 由于以任一正数乘目标函数, 或者以任何一非零数乘约束, 都不会使问题发生变化, 所以可以假定 A, b, C 中所有的数全是整数。

从应用上来看, 把数学规划 (1.1.1) 假想为一个决策模型比较合适, 其中 S 表示全部允许策略集合, 而 f 为某个目标的数量表达式, 这个目标可以是时间、利润、原材料等。在很多实际

问题中,变量要求取整数值,或者一部分分量要求取整数值,那就是整数规划问题.这类问题在工程技术、企业管理、社会科学的许多分支中都有大量应用.下面我们举几个例子.

例 1.1.1 行李问题

某人准备带 n 类商品从甲地到乙地去销售,每个第 j 类商品的重量为 a_j ,利润为 c_j .由于运输力量的限制,他最多能带重量不超过 b 的商品.问每类商品应该带多少个,才能使总利润最大.

令 x_j 表示带第 j 类商品的个数,则上述问题的数学模型是

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, x_j \geq 0, x_j \text{ 取整数,} \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (1.1.6)$$

如果在行李问题中,每类商品只有 1 个,只有 2 个决策:带去或者不带去.这时行李问题的数学模型为

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, x_j = 0 \text{ 或 } 1, \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n.$$

如果对上述行李问题再加以扩充:在运输能力上,除了重量限制以外,还有体积限制.第 j 种商品的重量是 a_{1j} ,体积是 a_{2j} ,而运输能力的限制是重量不超过 b_1 ,体积不超过 b_2 .那么数学模型为

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, x_j = 0 \text{ 或 } 1, \end{cases} \quad i=1, 2, j=1, 2, \dots, n.$$

例 1.1.2 旅行售货员问题与生产顺序表问题.

有一推销员从城市 v_0 出发,要走遍 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 城各一次,最后返回 v_0 . 已知 v_i 到 v_j 的旅行费为 c_{ij} ,问他应按怎样的次序走遍这些城市,使得总旅费最少?

令变量 x_{ij} 表示

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果推销员从 } v_i \text{ 到 } v_j, \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

则问题的数学模型可表为以下的混合型整数线性规划问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij}, \\ \text{s. t. } \sum_{i=0}^n x_{ij} = 1, \quad j=0, 1 \cdots n, \\ \sum_{j=0}^n x_{ij} = 1, \quad i=0, 1 \cdots n, \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leq n-1, \quad i, j=1, 2 \cdots n, i \neq j, \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, \quad i, j=0, 1 \cdots n, \\ u_i \text{ 为实数,} \quad i=1, 2 \cdots n. \end{array} \right.$$

(1.1.7)

其中,第一组约束条件表示各城恰好进入一次,第二组约束条件表示各城恰好离开一次,第三组约束条件用以防止出现多于一个的互不连通的回路. 例如,对于 6 个城市($n=5$)的旅行售货员问题,如果令

$x_{01}=x_{12}=x_{20}=1, x_{34}=x_{45}=x_{53}=1$, 其他 $x_{ij}=0$, 就是像图 1.1.1 所表示的两个互不连接的子回路这样的一组 $\{x_{ij}\}$, 满足第一组和第二组约束条件, 但不满足第三组约束条件, 因为

$$\begin{cases} u_3 - u_4 + 5 \leq 4, \\ u_4 - u_5 + 5 \leq 4, \\ u_5 - u_3 + 5 \leq 4 \end{cases}$$

将导致 $5 \leq 4$ 的矛盾。

可以证明, (1.1.7) 中第三组约束, 既能防止不连通回路的出现, 又不会排除任何符合要求的回路。

不少管理问题都可以抽象成旅行售货员问题, 如下列生产顺序表问题:

要在一台机器上安排 n 项作业的生产任务, 要求从机器的初始安装状态启动, 完成各项作业

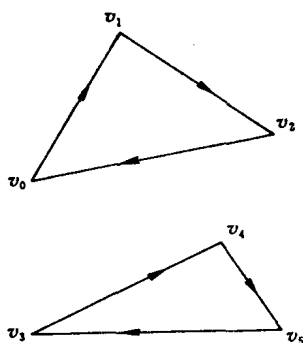


图 1.1.1

后, 再恢复到初始状态, 设该机器在完成第 i 项作业后紧接做第 j 项作业所需费用为 c_{ij} , 问应怎样安排作业顺序, 使总费用最低? 这里的“机器”相当于旅行售货员问题中的“推销员”, 这里的“作业”相当于旅行售货员问题中的“城市”, 机器完成各项作业后, 恢复到初始状态, 相当于推销员访遍各城后回到出发点。因此, 上述生产顺序表问题的数学模型与旅行售货员问题的数学模型一样。

例 1.1.3 仓库选配问题

某超级市场联销中心决定在 m 个仓库中选用若干个调出货物以满足 n 个超级市场的需要。已知当第 i 个仓库被调用时, 其固定经营费为 a_i , 从仓库 i 到超市 j 的单位货物运输费是 c_{ij} , 仓库 i 的货物存储量是 b_i , 超市 j 对货物的需要量是 d_j , 问中心应该如何决策, 就是应该动用哪些仓库和各仓库到各超市运多少货物, 才能既满足超市需要, 又使总费用 (包括经营费和运输费) 最低。

令变量 y_i 表示

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{当第 } i \text{ 个仓库被动用,} \\ 0, & \text{当第 } i \text{ 个仓库不被动用.} \end{cases}$$

令变量 x_{ij} 表示从仓库 i 运送给超市 j 的货物量, 则上述仓库选配问题的数学模型是

$$\begin{cases} \min f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m a_i y_i, \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} - b_i y_i \leq 0, & i = 1, 2, \dots, m, \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n, \\ y_i = 0 \text{ 或 } 1, & i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

其中, 第一组约束表示每个超市的需求必须满足, 第二组约束表示只能从动用的仓库运输货物, 并且运出量不超过其存储量. 因为, 当仓库 i 不被动用时, $y_i = 0$, 第二组约束成为

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 0,$$

这表明没有货物从仓库 i 运出. 当仓库 i 被动用时, $y_i = 1$, 第二组约束成为

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_i,$$

这表明从仓库 i 运出的货物总量不超过它的存储量.

上列数学模型是个混合型整数线性规划问题.

从上面的例子可以看到, 有的整数线性规划问题要求变量的取值只限于 0 或 1, 这类整数线性规划问题被称为 0, 1 线性规划问题.

$$\begin{cases} f(X) = \max CX, \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, & i=1, 2, \dots, m, \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, & j=1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

2. 解一般线性规划问题的单纯形方法

下面,我们将复习一般线性规划问题的解法.

线性规划问题 LP:

$$\begin{cases} \max x_0 = CX, \\ \text{s. t. } \begin{cases} AX = b, \\ X \geq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (1.1.8)$$

这里 $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_1, P_2, \dots, P_n),$$

$$P_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T.$$

假定 A 的秩是 m , 下面给出三个已知的定义.

可行解: 满足 $AX = b, X \geq 0$ 的向量 X^0 被称为 (1.1.8) 的可行解.

最优解: X^0 是 (1.1.8) 的可行解, 并且对 (1.1.8) 的任一可行解 X , 都有

$$\infty > CX^0 \leq CX,$$

则称 X^0 是 (1.1.8) 的最优解.

基本解: 在矩阵 A 中任意取出 m 个线性无关的列向量 $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}$, 组成满秩方阵 B , 其余的列向量组成矩阵 N , X_B 表示 X 中下标对应 B 中列的那些变量 (称基变量), X_N 是 X 中下标

对应 N 中的列的那些变量(称非基变量),这时 $AX=b$ 就可以写成

$$BX_B + NX_N = b,$$

$$\text{于是 } X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N. \quad (1.1.9)$$

$AX=b$ 的一个特解 $X_B^0 = B^{-1}b$, $X_N^0 = 0$ 称为 (1.1.8) 的一个基本解(有时也称基解),矩阵 B 称为这个基本解对应的基阵.

基可行解: 如果一个基解又是可行解,就称为基可行解.

退化的基可行解: 一个基可行解, 如果它至少有一个基变量取值为 0, 则称这个基可行解为退化的基可行解.

线性规划的一个基本定理: 若 LP (1.1.8) 有最优解, 则它一定存在一个基可行解是最优解.

所以找线性规划问题的最优解就可以只在它的基解集合上找. 下面我们举例说明基解、基可行解.

例如,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max x_0 = 2x_1 + x_2, \\ \text{s. t. } & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21, \\ & x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0. \end{array} \right.$$

图 (1.1.2) 是它的可行解集合, 已经投影到二维平面上. 显然, 基解至多有 $\binom{n}{m}$ 个, 在这个例子中, 矩阵 A 的列数是 5, 秩是 3, 所以至多有 $\binom{5}{3} = 10$ 个基解. 其中 6 个是基可行解.

列出 10 个基阵, 并且分别求出它的逆矩阵 B^{-1} , 再根据 (1.1.9) 求出基解.