

相关稳定性问题研究及 广义系统优化控制

邢 伟 张庆灵 著



NEUPRESS
东北大学出版社

相关稳定性问题研究及 广义系统优化控制

周 伟 熊庆民 编



相关稳定性问题研究及 广义系统优化控制

邢 伟 张庆灵 著

东 北 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

相关稳定性问题研究及广义系统优化控制/邢伟,张庆灵著. —沈阳:东北大学出版社,2001.4

ISBN 7-81054-601-5

I. 相… II. ①邢… ②张… III. ①稳定性(数学)-相关-研究 ②系统最优化-研究 IV. N945.15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 12529 号

内 容 简 介

本书是作者根据近两年的学术研究成果而撰写的一部专著。书中采用代数方法、几何方法对当前控制理论中一些前沿问题进行了深入研究。全书共分九章。

本书内容先进,论述精当,可读性强。适宜于从事控制理论与控制工程、信息与计算科学、应用数学等专业的本科生、研究生及广大科技人员参考。

©东北大学出版社出版

(沈阳市和平区文化路3号巷11号 邮政编码 110004)

电话:(024)23890881

传真:(024)23892538

网址:<http://www.neupress.com> E-mail:neuph@neupress.com

北宁市印刷厂印刷

东北大学出版社发行

开本:850mm×1168mm 1/32 字数:107千字 印张:4.125

印数:1~1000册

2001年4月第1版

2001年4月第1次印刷

责任编辑:孟 颖

责任校对:张淑萍

封面设计:唐敏智

责任出版:秦 力

定价:20.00元

前 言

在整个 20 世纪里，人类的科技文明获得了空前进步，其中之一是实现了“上天揽月”的梦想。在诸多进步中，控制理论发挥了巨大作用。

控制理论从发展的初期到现在，已经有 100 余年的历史了。在这百余年历史中，稳定性问题一直是个备受关注、经久不衰的主题，稳定性是保障系统正常运行的必备条件，也是对系统施加各种控制的首要目的。而在实际工程系统的设计中，除了稳定性这个基本因素之外，往往还要求系统满足其他性能指标。在这类系统中，优化控制是具有广泛应用背景的重要一族。

本书研究了与稳定性相关的一些问题以及广义系统的 H_∞ 控制和二次最优控制问题，所采用的研究方法是基于代数的，部分是基于几何的。书中的结果主要是作者近两年的研究所得，且都以论文的形式公开发表在国内外学术刊物上。

作者之一邢伟感谢他的恩师，前东北大学副校长王启义教授在其攻读博士学位期间所给予的辛勤培养和有力支持；也感谢东北大学人事处的各位领导对其在博士后流动站所进行的紧张的博士后科研工作中给予的关怀与支持。

本研究工作得到了国家自然科学基金（编号：69974007）、教育部“高等学校骨干教师资助计划”、中国博士后科学基金及辽宁省博士启动基金（编号：001018）的鼎力资助，在此深表谢意。

由于时间仓促，尽管做了很大努力，但疏漏之处在所难免，恳请专家、同仁及读者批评指正。

邢 伟 张庆灵

2001 年 1 月 6 日

目 录

前言

第 1 章 绪 论	1
1.1 研究背景	1
1.2 主要工作	5
第 2 章 Hurwitz 稳定矩阵类与一些相关矩阵类之间的关系	7
2.1 引 言	7
2.2 亚正定矩阵、广义正定矩阵的定义	9
2.3 良广义正定矩阵	10
2.4 正 Hurwitz 稳定矩阵类与一些相关正定矩阵类之间的相互关系	22
第 3 章 Lyapunov 方程的几何方法	29
3.1 引 言	29
3.2 基于反对称矩阵的 Lyapunov 方程解的表达式	30
3.3 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 上的 Euclid 空间结构	33
3.4 Lyapunov 仿射变换及 Lyapunov 仿射空间	36
3.5 Lyapunov 方程的几何性质	39
3.6 例 子	41
第 4 章 LTI 系统渐近稳定的几何性质	43
4.1 引 言	43
4.2 基于 MI 的 LTI 系统渐近稳定性的刻画	43
4.3 LTI 系统的几何性质	47
4.4 例 子	48

第 5 章 矩阵积的迹界估计	50
5.1 引 言	50
5.2 新的迹的界	53
5.3 例 子	56
第 6 章 基于状态反馈的广义系统 H_∞ 控制	60
6.1 引 言	60
6.2 控制理论发展概述	61
6.3 正常系统 H_∞ 控制理论研究概述	63
6.4 广义系统控制理论发展与研究概述	67
6.5 广义系统 H_∞ 控制理论研究现状	68
6.6 广义系统的一些结果	73
6.7 没有直馈项的 H_∞ 控制	79
6.8 有直馈项的广义系统 H_∞ 控制	84
第 7 章 基于状态观测器的广义系统 H_∞ 控制	89
7.1 引 言	89
7.2 一些准备	89
7.3 观测器设计及控制器构造	90
7.4 主要结果	92
第 8 章 广义系统的二次最优控制	98
8.1 引 言	98
8.2 Lyapunov 方法	98
8.3 二次最优控制	105
第 9 章 研究工作展望	109
参考文献	111

第1章 绪 论

1.1 研究背景

稳定性问题是各种控制系统都要面对的一个首要问题. 无论是一般线性系统, 还是广义系统, 对其施加控制的第一目标就是要使系统稳定. 一个不稳定的系统一般来说是没有实用价值的.

1868年, 英国人 J. C. Maxwell 发表的《论调速器 (On Governors)》^[1]一文是有关控制理论的最早期论文, 而该文的内容就是关于离心调速系统的稳定性分析的. 20多年后的 1892年, 俄国著名学者 Lyapunov 在其所完成的具有深远影响和划时代意义的博士论文《运动稳定性的一般问题》^[3]中, 更是对稳定性问题进行了深入而系统的探讨与研究, 建立了迄今仍起着主导作用的稳定性理论的一般研究框架与方法^[9, 11, 22~27, 47]. 稳定性问题自始至终是控制理论发展中的主要问题.

控制理论最基本的研究对象是 LTI (线性时不变) 系统, 建立在 LTI 系统之上的一整套概念与方法是整个控制理论的基础与核心部分, 它们对其他系统的发展有着指导与借鉴的作用. 比如, 广义系统中有一些概念与方法是参照 LTI 系统中的相应内容而得到的.

LTI 系统的渐近稳定性问题 (为了简便, 本书在不致引起误解的情况下, 常将渐近稳定称做稳定) 与矩阵的 Hurwitz 稳定性问题是等价的. 因此, 直接对矩阵的 Hurwitz 稳定性问题进行研究是研究系统稳定性的一大方法.

矩阵 Hurwitz 稳定性问题的研究由来已久 (以后, 常将 Hurwitz

稳定矩阵简称为稳定矩阵), 并已积累了许多有意义的研究成果^[29~31, 42]. 从矩阵的属性看, 稳定性矩阵的种类很多, 如负定矩阵类、广义负定矩阵类等都是稳定的矩阵类. 稳定矩阵类之间的相互关系如何, 或它们的稳定程度如何是一个既具有理论意义, 又对实际控制系统的具体设计有指导作用的问题^[44], 值得人们进行深入的探索与研究. 但目前, 这方面的研究成果鲜有报道. 为此, 本书对该问题给予了充分的探讨与研究, 并获得了一批既有理论意义, 又具实用价值的研究成果.

由著名的 Lyapunov 定理知道, LTI 系统的渐近稳定性与 Lyapunov 方程之间有着一种对应关系. 通过对 Lyapunov 方程的讨论来实现对控制系统的稳定性分析与综合, 是处理系统稳定性问题的又一个重要方法, 该方法尤其适合于解决理论问题. 由于 Lyapunov 方程本身的重要性, 使其成为控制理论界的一个经久不衰的研究主题, 到了今天已成为一个热门研究方向^[23, 26, 27, 57~59, 165]. 应该看到, 关于 Lyapunov 方程的研究, 迄今所用到的绝大多数方法都是基于代数的. 自从加拿大著名控制理论学者 Wonham 教授开先河用几何方法研究控制理论以来^[68], 几何方法就日益受到人们的重视, 不断有人用几何方法研究和处理有关系统理论中的一些问题(如文献[42]等). 采用几何方法对基于矩阵代数形式的 Lyapunov 方程进行研究, 应该是一种很有意义的做法, 但到目前为止, 尚没有人做这方面的尝试. 因为几何概念具有很强的直观性及空间结构性, 用几何方法研究 Lyapunov 方程可以获得清新的, 有别于目前基于代数方法的研究结果, 并将给控制系统的鲁棒性分析与综合研究带来新的契机. 本书对 Lyapunov 方程的几何方法做了探索与研究, 获得了一些具有新意的成果, 并将这种新成果应用到 LTI 系统, 获得了 LTI 系统渐近稳定性的基于几何表示的充分必要条件, 揭示了渐近稳定性的几何性质.

在对控制系统进行稳定性分析与优化控制综合中, Lyapunov 方程和 Riccati 方程起到了至关重要的作用^[70, 74]. 许多理论与实际问

题的解决有赖于对这两个方程的解做出某种估计,因此有许多人在做这方面的工作^[26, 57, 60, 71, 80~84].在对解所做的估计过程中,有一个密切相关的问题,就是如何给出矩阵积的迹界精确估计不等式.有趣的是,近些年来在这个问题上(即给出好的迹界的精确估计不等式),吸引了国际上的一大批学者,他们致力于对矩阵积的迹的上、下界给出更精确的估计.他们的文章不断在国际自控界最具影响力与权威性的杂志——美国的 IEEE Trans. Automat. Contr. 上发表,给出他们的最新结果.一时间在这个领域里呈现出了一种竞争的局面^[71~77].经过对他们十几年的研究工作比较、分析发现,虽然他们的估计精度在不断提高,但远未达到理想的程度,并且其估计不等式的前提条件都比较强,如其中最弱的条件也要求其中一个矩阵的对称性.至少从理论上来说,对称性的限制是绝对没有必要的.他们的结果之所以要求对称性,是因为要借用特征值的概念估计界的问题,矩阵的对称性保证了其特征值的实数性.鉴于以上因素,本书提出了一些新的更一般的迹界估计不等式,这些不等式完全去掉了对称性的限制.通过分析数值检验看到,这里所得到的主要估计不等式在许多方面不仅优于已有的一个著名的没有对称性限制条件的迹界不等式^[78],也优于近年来所有发表在 IEEE Trans. Automat. Contr. 上文章中的不等式.

对于一个不稳定的系统,在理论或技术上,往往通过反馈控制器的适当设计,而使得所构成的整个闭环系统稳定.这是处理不稳定系统的一个常用办法.在许多系统的设计中,不仅仅要求稳定性,还需要附加其他条件,即性能指标.随着控制理论的发展与实际工程要求的不断提高,一种有着广泛适用性,并能很好弥补此前 LQG 控制理论实际应用上某些不足的优化控制理论—— H_∞ 控制理论在 1979 年诞生^[91].而今,该理论早已成为整个控制理论中最具活力的主要分支之一.

H_∞ 控制理论的基本思想是,反馈控制器的设计要保证闭环系

统稳定——这是一个重要的步骤,并且还要使得闭环系统传递函数的 H_∞ 范数小于某一预先设定的正值.经过十几年的努力,建立在 LTI 系统之上的 H_∞ 控制理论的发展已经成熟^[112].而广义系统的 H_∞ 控制理论还只是处于起步阶段.广义系统是一类更一般化,并有着广泛应用背景的动力系统.由于它的复杂性,使得在其上建立 H_∞ 控制理论的工作显得异常困难.直到最近,应用状态空间方法研究广义系统 H_∞ 控制问题的工作才开始有实质性进展^[162, 179, 181, 182].这些新的进展,为广义系统 H_∞ 控制问题的研究带来了活力与生机,有些结果是相当完美的.但仔细分析起来,还是有以下不足:

- ①文献[179, 180]中前提(即假设)条件过多;
- ②文献[162]中判别条件过于复杂;
- ③文献[181]和[182]中的结果不是很完满;
- ④疏于对状态反馈 H_∞ 控制问题进行讨论.

只有文献[181]论及了状态反馈控制器的构造方法,但该文并没有将问题很好地展开且前提处理得不够理想(注:详细的评述见本书第6章).因此,本书对状态反馈 H_∞ 控制问题进行了探讨,主要对不带直馈项与带有直馈项的两个并不能等价的系统分别给予了充分的研究,得到了较上述文章更简捷明晰的结果.当系统的状态不能够全部可量测时,本书作了基于观测器的状态反馈 H_∞ 控制器,所得结果仍然具有简捷明晰的特点.

LTI 系统在二次性能指标下存在最优控制的等价条件是该系统能稳定.而在广义系统中,还要加上脉冲能控的条件^[189].实际上,能稳定指的是渐近稳定,与脉冲无关^[138].那么,在它们的线性最优控制存在条件中,为什么会有这种差别呢?本书将阐明,这种差别将随着二次性能指标的统一选择而消失,存在线性最优控制的等价条件是能稳定.这一结果的得出是基于渐近稳定性分析的 Lyapunov 方法,以及由此导出的 Lyapunov 方程与 Riccati 方程的有关结论.关于广义系统的渐近稳定性分析、镇定方法及最优控制等,本书给出了一

些有意义的结果.

1.2 主要工作

本书研究了有关稳定性的一些问题及广义系统的优化控制问题. 涉及稳定性的课题很多, 人们从不同的角度对稳定性问题进行了多方位的研究. 本书从稳定性矩阵类之间的稳定程度的比较及 Lyapunov 方程相关问题的角度研究稳定性问题. 广义系统优化控制问题, 也与稳定性有着很大程度的关系. 本书主要研究了目前尚处于“初级阶段”的广义系统 H_∞ 控制问题, 也研究了广义系统的二次优化控制问题. 本书的主要工作如下.

①第2章讨论了一些稳定矩阵类之间的稳定程度问题. 从简化处理的角度出发, 直接讨论与研究了相应的“正”问题, 即一些正定矩阵类, 超正稳定矩阵类, 正 Hurwitz 稳定矩阵类之间的包含序关系, 这种处理与第2章的主旨——关于稳定矩阵类问题的研究是等价的. 定义了两个新的矩阵类, 良广义正定矩阵类与超正稳定矩阵类, 并对其进行了充分的研究. 对于“正”问题, 得到了清晰的令人满意的序关系. 将所得到的有关“正”问题结果经过简单的转化, 稳定矩阵类之间的稳定程度问题即得到了圆满解决. 并给出了这方面的结果.

②第3章基于矩阵代数形式的 Lyapunov 方程, 在系统的稳定性分析中起着相当大的作用. 探索了 Lyapunov 方程的几何方法, 建立了矩阵参数空间的 Euclid 空间结构. 提出了与 Lyapunov 方程 1—1 对应的 Lyapunov 仿射变换的概念以及 Lyapunov 仿射空间的概念. 借助于这两个概念及矩阵参数空间的 Euclid 结构, 将 Lyapunov 方程的解用几何的概念给予了刻画, 得到了有关的 Lyapunov 方程的几何性质.

③第4章将著名的 Lyapunov 定理转化为基于 MI 的形式, 利用第3章建立起来的矩阵参数空间的几何结构, 得到了 LTI 系统渐近

稳定性的基于几何刻画的充分必要条件.

④Lyapunov 方程与 Riccati 方程在控制系统的稳定性分析与优化控制中起着非常大的作用. 源于对它们的解的估计, 近十年来, 国际上不断有讨论矩阵积的迹界不等式的文章在著名杂志 IEEE Trans., Automat. Contr. 上发表, 所得结果不断改善. 在此背景下, 鉴于当前结果所存在的不足, 第 5 章提出了新的矩阵积的迹界不等式. 这些不等式的成立条件相当弱, 这是一个较大的改进, 经过理论分析与数值实验表明, 精度往往能够好于已有的结果.

⑤目前, 广义系统 H_∞ 控制理论的研究还很不完善, 有许多问题亟待解决, 如有关状态反馈 H_∞ 控制问题等. 第 6 章研究了两大类广义系统(不具有直馈项和具有直馈项)的 H_∞ 控制问题. 第 6 章将该问题的可解性归结为基于系统参数阵的一个广义代数 Riccati 不等式有无满足广义约束解的问题. 进而, 给出了满足 H_∞ 控制要求的反馈控制器构造方法. 与现有的其他结果比较得知, 无论是问题可解性的判别条件以及该条件成立的前提假设, 还是反馈控制器的构造方法等, 第 6 章所得结果在简捷明晰性方面都优于其他的所有已知结果.

⑥基于状态反馈设计控制器会遇到一个问题: 系统的状态有时并不能够全部量测到. 鉴于此, 第 7 章研究了基于状态观测器的 H_∞ 控制问题. 首先构造了状态观测器. 基于该观测器的估计状态, 将状态反馈 H_∞ 控制问题可解性判别条件归结为一个广义代数 Riccati 不等式是否在广义约束之下可解的问题. 在可解的前提下, 给出了满足 H_∞ 设计要求的基于观测器的控制器构造方法. 所得结果与方法仍在简捷明晰性上强于已有的其他结论.

⑦第 8 章讨论并研究了广义系统的二次优化控制问题. 分别建立了广义系统的 Lyapunov 方程和 Riccati 方程与系统的稳定性和状态反馈能稳定性之间的关系, 给出了广义系统存在二次优化控制的一个充分必要条件.

第 2 章 Hurwitz 稳定矩阵类与一些相关矩阵类之间的关系

2.1 引言

一个动力系统能够保持正常运行的首要条件是它应当是一个稳定的系统. 一个不稳定的实际系统一般来说是没有使用价值的. 因而, 从控制理论诞生之初, 稳定性问题的研究就是控制理论领域最重要的课题^[1~3], 直到今天, 关于稳定性问题的研究仍然是控制理论界研究的一大主题^[4~20].

被认为是人们开始进行控制理论研究的一个标志性文章——Maxwell 在 1868 年发表的《论调速器 (On Governors)》^[1]一文, 就是关于离心调速系统稳定性分析的. 俄国著名学者 Lyapunov 在 1892 年完成的博士论文《运动稳定性的一般问题》^[3], 更是系统、全面、深入、一般化地讨论了系统稳定性和渐近稳定性等问题, 建立了稳定性理论研究的框架. Lyapunov 稳定性理论研究方法的影响是巨大的、跨时代的. 在 100 多年后的今天, 仍起着不可替代的作用^[21~27].

众所周知, 对于一般定常线性时不变 (LTI) 系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

是稳定的充分必要条件为系统的状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值都具有负实部. 满足这样条件的矩阵称为 Hurwitz 稳定矩阵或稳定矩阵.

关于 Hurwitz 稳定矩阵的研究, 已取得了很多好的结果, 其中最著名的是下面的 Lyapunov 定理.

Lyapunov 定理^[28] 方阵 A 是 Hurwitz 稳定的充分必要条件是对于任意正定的 Hermite 矩阵 Q , 矩阵方程

$$A^* X + XA = -Q \quad (2.1.2)$$

都有惟一正定的 Hermite 矩阵解 X . 此处, 左上角标“ $*$ ”表示矩阵的共轭转置.

由于 A 是 Hurwitz 稳定的充分必要条件是 A 的特征多项式

$$\det(\lambda I - A) \quad (2.1.3)$$

的所有根都是负实部的. 因而, 对矩阵 Hurwitz 稳定性的研究, 可以转化为对多项式根的性质的研究. 在这方面, 已积累了不少的成果. 例如, 1877 年完成的 Routh 表判别法^[29,30], 1895 年的 Hurwitz 判据^[29,30], 1932 年 Nyquist 判据^[31]以及 1938 年 Mihailov 判据^[30,32]等都是很有影响的著名结果. 在我国, 谢绪恺于 1957 年^[33,34]简化了 Hurwitz 判据, 聂义勇在 1976 年^[35]及聂义勇和谢绪恺在 1987 年^[36]又分别得到了进一步的结果. 有关这方面研究的其他结果可见文献[37~41].

关于矩阵的稳定性问题, 最近段广仁从所有 Hurwitz 矩阵所构成的矩阵类这一角度出发, 研究了 Hurwitz 矩阵类的内部所具有的某种几何结构^[42]. 段广仁等人也研究了其他一些矩阵类等的稳定性问题^[43~46].

关于正定矩阵类与稳定性的关系, 段广仁在文献[42]中研究了广义正定矩阵及其在稳定性分析中的应用, 而正定矩阵类尚有许多(见文献[48~54]), 它们与 Hurwitz 稳定矩阵类之间的关系, 是一个在理论上需要搞清楚的问题, 同时对于实际的控制系统的设计与分析也有一定的指导作用. 也有人对输入输出稳定性与指数稳定的周期轨道之间的关系进行了研究^[55].

本章从集合包含关系的角度讨论稳定性之间的关系. 所有负定矩阵类都是稳定的, 而这些矩阵类之间的相互关系, 或稳定程度如何是本章所要研究的一个主题. 为了简化符号处理, 没有直接对一些负

定矩阵类及 Hurwitz 稳定矩阵类之间的相互关系进行讨论,而是讨论等价的(也是相反的)问题.首先引进了亚正定矩阵以及广义正定矩阵的概念,给出了一类特殊的广义正定矩阵——良广义正定矩阵的概念,并较全面、充分地讨论了其性质.又给出了超正稳定矩阵的定义.在探讨与研究了这些矩阵类及正 Hurwitz 稳定矩阵类之间的关系之后,将问题很自然地转化为关于负定矩阵类,超负稳定矩阵类,稳定矩阵类之间的关系问题,得到了反映它们稳定程度的一种序关系.

2.2 亚正定矩阵、广义正定矩阵的定义

实对称正定矩阵的理论已经有了相当程度的发展.1970年,C. R. Johnson 去掉对称性的限制,给出了较一般化的矩阵正定的定义^[48,50~52],后来有人将其称为亚正定矩阵^[50~52].1984年,佟文廷又给出了更一般化的所谓广义正定矩阵的定义^[49],这些定义的引进,扩展了矩阵正定性的概念.

定义 2.1 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 称为亚正定矩阵,若对于任意 $X \in \mathbb{R}^n$ 且 $X \neq 0$, 都有

$$X^T A X > 0 \quad (2.2.1)$$

n 阶亚正定矩阵的全体记为 P_M .

文献[52]对亚正定矩阵在合同变换下的标准形进行了研究,得到了一个主要的结果,即任何一个亚正定矩阵都与一个单位上三角矩阵合同.并指出,对于一般的亚正定矩阵,其标准形是不惟一的;亚正定矩阵的标准形惟一的充分必要条件是该亚正定矩阵退化为实对称正定矩阵.

定义 2.2 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 称为广义正定矩阵,若对于任意 $X \in \mathbb{R}^n$ 且 $X \neq 0$, 都有正对角矩阵 D_X , 使

$$X^T D_X A X > 0 \quad (2.2.2)$$

n 阶广义正定矩阵的全体记为 P_G .

由文献[56]有

命题 2.1 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则下列各条件等价:

- ① $A \in P_G$.
- ② A 的所有主子式大于零.
- ③ A 的所有主子阵的实特征值大于零.

2.3 良广义正定矩阵

本节将给出并研究较广义正定矩阵类狭义一些的良好广义正定矩阵类. 它是亚正定矩阵类的一个推广.

定义 2.3 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 称为良好广义正定矩阵, 若有正对角矩阵 D , 使得对于任意 $X \in \mathbb{R}^n$ 且 $X \neq 0$, 都有

$$X^T D A X > 0 \quad (2.3.1)$$

n 阶良好广义正定矩阵的全体记为 P_W . n 阶实对称正定矩阵的全体记为 P_S .

显然有关系式

$$P_S \subseteq P_M \subseteq P_W \subseteq P_G \quad (2.3.2)$$

定理 2.1 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则下列各条等价:

- ① $A \in P_W$
- ② 存在正对角矩阵 D , 使得

$$DA \in P_M \quad (2.3.3)$$
- ③ 存在正对角矩阵 D , 使得

$$AD \in P_M \quad (2.3.4)$$
- ④ 存在正对角矩阵 H , 使得

$$HA + A^T H \in P_S \quad (2.3.5)$$
- ⑤ 存在正对角矩阵 H , 使得