模糊数学基础及其应用

李安华　吴达

新疆人民出版社

模糊数学基础及其应用

李安华　吴　达

新疆人民出版社

模糊数学基础及其应用

李安华　吴　达

新疆人民出版社出版

(乌鲁木齐市解放路306号)

新疆新华书店发行　商务印书馆上海印刷厂印刷

850×1168 1/32　印张16.375　字数434千字

1986年11月第1版　1987年2月第1次印刷

印数：1—3,000

统一书号：13098·48　　定价：4.00元

序

模糊数学是研究和处理模糊现象的数学分支。尽管它的发展影响到数学的经典领域，如模糊拓扑与模糊测度等，但是它产生与发展的根本动力，始终联系着模糊信息系统的决策过程，而且这个过程多少受着人的知识、感情和情绪的支配。

当查德于1965年第一次提出模糊集合概念时，他就指出模糊集合更适合于图象分类和信息加工。以后，查德直接研究模糊系统和模糊语言，特别是在《语言变量的概念及其在近似推理中的应用》一文中，他系统地提出以字或句为值的语言变量和一种不十分精确的近似推理，使得信息的内容和意义的传输与逻辑加工成为一种可能性。1978年，查德发表了《作为可能性理论基础的模糊集合》的论文，目的是为进一步研究模糊语言与近似推理提供数学工具。一方面，模糊数学提出了一套定量的表示自然语言的理论和方法，使人工语言转化为计算机可以理解和加工的机器语言，提高计算机应用的灵活性及其智能。另一方面，它扩大了计算机应用的范围，从机器的无生命系统过渡到与人文社会科学直接相关的更加复杂的系统。模糊数学是计算机科学向着人的高级思维活动方向逼近的重大突破。在模糊语言识别方面，它可以提高视和听的能力；在专家系统中，利用近似推理可以积累经验，提高自学的能力。为此，模糊数学在新的信息革命的浪潮中将扮演着一个重要角色，为信息革命提供一种极其方便而有力的

工具。模糊数学也是研究软科学和决策的工具。

近二十年来，模糊数学除了在理论上得到迅速发展以外，在应用方面也取得了显著成果。比如根据某些直接感受的现象对机器进行故障诊断；根据症候群的医学诊断；以及癌细胞的模式识别；天气过程的模糊划分与预报；环境污染状态的分类；图书分类的情报检索；交通管理的模糊控制；矿产的预测与分类；电能分配网络的最佳设计；国民经济的长远规划；工业区运输网络规划；旅游胜地的开发；城市废能的控制和利用；河流的水量预报；火箭着陆的管理等等。所有这些都与计算机科学密切相关。当然，与真正能够接近于模拟人的思维过程还有很大距离，甚至只是开端。然而只要开始了起步，目标总归在前头。模糊数学是在应用中产生的，同样要在应用中才能得到发展。

模糊数学虽然产生的时间不长，但它却吸引着数学界以及工程技术界越来越多人的重视。模糊数学的论文以指数曲线明显增长，国内外已出版二十多种模糊数学的专著和论文集，模糊数学的专门期刊已有三种。越来越多的杂志上不断刊登模糊数学的文章，甚至出版专集。除了1983年在马赛召开的“模糊信息、知识描述和判决分析”会议，1984年在夏威夷召开的“第一届模糊信息处理国际会议”以外，1985年将在西班牙召开第一届模糊集与系统成立大会。至于各种小型的地区性会议，以及国际会议的分组会议，枚不胜举。北美、欧洲、日本、中国都有一支庞大的队伍，从事模糊数学的研究工作。最近几年内，苏联也在抓紧模糊数学的研究工作，出版的新书，发表的研究论文起点较高。模糊数学受到这样普遍的重视，也反映了它在当代信息革命中所占的特殊地位。

新疆地大物博，资源丰富，是个好地方，需要祖国千百万儿女去开发，去建设。如果模糊数学在开发和建设新疆的事业中，能够发挥一定的作用，那将是新疆从事模糊数学研究工作者的无尚光荣。李安华、吴达在边疆资料不足、工作条件困难的情况下编著了这部教程，对新疆以至国内模糊数学的传播和深入研究是一个贡献。这本书结构较清晰，内容较丰富，介绍了基本理论和较多的实用模型，并引进了若干新研究成果。它对企求了解和掌握模糊数学的广大科技工作者，对选修模糊数学课程的师生，都是一本有价值的参考书。

汪培庄　张文修

1984年7月24日于西安

目　录

第一章 模糊原理

§1-1 集合观念的延拓

我们先从模糊数学的开端——分明集向模糊集的延拓谈起.

1. 分明集

众所周知，1883年问世的普通集合论，原本是对数学各系统进行最抽象的归纳和概括. 按照普通集合论的观点，任何一个数学分支不外乎都是对一种或另一种具有特定约束的事物集合的研究. 所谓数学规律，不过就是在这类集的某个子集范围里数学共性的陈述: 这个子集的数学元都具有这种共性；具有这种共性的都是这个子集的数学元. 非此即彼，决无旁出. 普通集下的数学，哲学上每每以形式的或二值的信息为自己的出发点，在对事物的认识、判断、推理上又无不采用三段论式的假言推理为自己的利器. 所以普通集下的点集之间，都是用从属关系联在一起的，每一个集合都有自己清晰的边沿，而集与集之间则永远具有绝对分明的界限。这种集在生产、生活当中可以随手举出许许多多. 例如男人、女人，0℃上0℃下、圆与非圆，……等等. 这种集在很长一个时间里被认为似乎无处不有，无所不及，甚而一句“具有一定性质的全体”的集的描述，就把大千世界所有物质泾渭分清，包罗无遗.

诚然，普通集合论的历史功绩确实是伟大的. 它把许多表面上无关的数学概念、数学体系统一起来了；它把许多表面上离散的数学枝叉在一个一致的框架下综合起来了；它使得数学的触角伸展到物质的和精神的各个领域；它使得很多乍看起来与数学无缘的事物涂上了数学的色彩. 普通集合论以一种日趋完美的公理化的方法，使数学的每一个分支都在更高的境界里被洞察得清清楚楚，普通集合就使人们运用概念进行判断推理的逻辑思维活动成

了数学变换的乐章.普通集合论以其特有的布尔运算系统,形成了一整套的电子计算机软硬件基础, 普通集合论终于使数学从古老的单纯研究空间形式和数量关系的狭隙里,解脱为广泛的结构系统. 难怪人们把普通集合论美誉为现代数学和现代科学技术之父.

2. 模糊集

然而,Cantor 在创立集合论的时候, 恐怕只想到要“继往”而决没有想到会“开来”吧. 也许由于集合论真的是一把打开一切数学通道的金钥匙的缘故,透过普通集合论总揽过去的那些现实,人们发现: 一方面, 以往的数学对人类周围的一切委实抛弃的太多了; 另一方面, 人们更发现,以往的数学对客观世界尤其对主观世界的描述又太特殊了. 这就是说,普通集并非“无所不包”,普通集仅仅“只有所及”. 特别是由于固有的数学以其深邃的理论对从微观到宏观的片面的表达越细腻, 在这种表达下科学技术的某一侧面越发达,则被扬弃的东西和数学工具之间的矛盾,就表现得越尖锐、越突出.

因此,如果承认普通集是一切旧数学的思想的总合, 那么, 普通集外的集,就理所当然的要诱导出新数学之诞生.

例如“老人集”诚然不是普通集。因为对一个具体的人(集里的元) 我们没有一个象普通集那样的鲜明的判定标准. 我们可能十分犹豫,我们可能一时拿不定主意——二头的自然好办: 一岁的娃娃的确不是老人集的元,百岁的寿星无疑应该称作老人,但中间的某一部分, 其过渡界限则是不分明的。然而, 即令不是普通集, 可老人集在我们意识里却仍是客观存在的, 不过普通集绝对划分的观点要改变而已. 这类集,就是我们所说的 Fuzzy sets,意译为“模糊集”.

再如“大数集”. 它真算是首屈一指的非普通集了. 各类经典的集合论书里对它都每每据力排斥,但“大数集”的现实例子如“大胡子集”, 又确是被人们所承认的. 人脑能够做出模糊的判断: ××是个大胡子, ××不是个大胡子, ××虽然胡子不太厉害但划

为不是大胡子之类又委实冤枉得很，……凡此等等。即令这些判断全部离开了传统数学的数值方法……比如有1000根胡子者算大胡子，而999根则不算大胡子之类.

总之，可见分明集的概念之所以分明，是因为概念有确定的内涵和分明的外延。分明的外延的全体就构成了概念的分明集．而模糊概念之所以模糊，是因为它的内涵和外延都被模糊化，概念外延的模糊集与非概念外延的模糊集不能用划一个圈的方法截然分开，“是”与“非”存在着一个弹性的边界．这就是我们通常所认定的：描述确切的概念须用分明集，描述模糊的概念必须用模糊集了．

其实，人脑对模糊集早就具备了模糊判断的机能．R. K. Ragade、吴望名等人在自己的论文里，不费什么功夫就一连串地举出过二十七、八种Fuzzy集的日常例子，诸如高(低)、稀(稠)、紧(松)、大(小)、好(坏)、老(少)、快(慢)、静(闹)、厚(薄)、亲(疏)、满意(不满意)、冷(热)、贵(贱)、强(弱)、平滑(粗糙)、懂(疑)、美(丑)、清(浊)、方便(不方便)、轻(重)、锐(钝)、硬(软)、以及“稍微”、“有点”、“好象”、“大约”、“比较”、“非常”、“接近于”等等．所以，数学由普通集扩充到Fuzzy集，实际上是十分顺乎自然的事情，它完全符合人类对事物的认识总要逐步加深的那种规律．现在看来，毋容置疑，一方面，人类周围的确聚集了不少普通集，并且传统数学已对这类集做了充分的表达；但同样毋容置疑，另一方面，人类周围又确有更为大量的Fuzzy集．这种Fuzzy集一般以普通集做为它的特例，它跑过了事物的两头，也跑遍了中间的种种过渡．Fuzzy集所引出的数学思想是模糊的思想，Fuzzy集所引出的数学方法是模糊的方法．这里，模糊绝对不是一个贬意词，模糊性更不是一件坏事情．恰恰相反，模糊性反倒是事物的一种普遍性和多义性．模糊数学不是要求数学放弃自己的严密性去迁就模糊性，而是要把严密的数学方法打到模糊现象的禁区之中，是让数学及计算机再回过头来吸收人脑对复杂系统进行识别和判决的特点，形成一种新的更加灵活简捷的处理手段．

L. A. Zadeh 1977 年讲道："在那即将到来的年代，我相信近似推理和 Fuzzy 逻辑将发展为一个重要领域，而变成研究哲学、语言学、心理学、社会学、管理科学、医学诊断、判别分析以及其它领域的新方法的基础. 与此同时，我们同样也会看到古典逻辑基础上的 Fuzzy 集数学理论的许多重要发展，将对纯粹以至应用数学做出显著贡献. 无须多说，对 Fuzzy 集论今后十年的发展，我们只能有个朦胧的想法. 但可以肯定的是，在 Fuzzy 集论理论工作者和实际应用者的共同努力下所取得的许多新的和有才能的工作，必将使 Fuzzy 集论的重要性、影响力和应用方面都得到迅速发展. 最后，它必将在人类知识和科学方法论的宝库中，占有一席之地。"

§1-2 普通集简单回顾

如前所述，基于已知的数学事实，Cantor 曾大范围的把具有一定性质事物的全体抽象的称为集. 组成集的每个事物叫做这个集的元素。

这样，普通集显然就使得一切以数学做为研究工具的客观对象一分为二了：要么，对象具有某普通集所要求的条件，因而它是这个集的元素；要么，对象不具有某普通集所要求的条件，因而它不是这个集的元素. 二者居其一，且仅居其一.

若用大写字母 A、B、……N、……U…… 表示集，而小写字母 a、b、…… 表示集的元，则 a 是集 A 的元素可记为 $a\in A$，或引入记号 $\chi_A(a)=1$（有的写作 $A(a)=1$），b 不是集 A 的元素记为 $b\overline{\in} A$ 或引入记号 $\chi_A(b)=0(A(b)=0)$. 其中，$\chi_A(x)(A(x))$ 被视作关于集 A 的一个函数（叫特征函数）.

由是，对任意确定的元素 u 和确定的集 $A\Rightarrow$ 一定 $\{u\in A$ 或者 $u\overline{\in} A\}\Leftrightarrow\{\chi_A(u)=1$ 或 $\chi_A(u)=0\}$.

也由是，反转来，我们也能说，一个普通集其实由元素和元素的特征值就能够唯一确定。

例如对有限集，写法 $A=\{a, b, c, d, e, f, g\}$ 表示 A 由 a、b、c、d、e、f、g 诸元组成，更形象些，写成 $A=\{(a、\chi_A(a)=1), (b、\chi_A(b)=1), \cdots\cdots(g, \chi_A(g)=1)\}$ 也无妨。甚而再深刻些还可以扩充写成 $A=\{(a, \chi_A(a)=1), \cdots\cdots (g, \chi_A(g)=1), (w, \chi_A(w)=0, (s, \chi_A(s)=0)\}$ 等等。对无限集，则当用描述性的记法，譬如 $B=\{u|u\geqslant 2\}$，它表示 B 由大于等于 2 的一切数组成，譬如 $C=\{(x, y)|x^2+y^2=9\}$，它表示 C 由符合函数 $x^2+y^2=9$ 的所有序对组成．这些，以及通常常用的开区间、闭区间等都从元素和元素的归属、元素的特征值两个渠道，对各个集合予以刻划．

当然，这里面还要特别注意到领域．例如集 $M=\{x|x\leqslant 3\}$．如果指定在非负整数范围内，则仅只 $M=\{0、1、2、3\}$，像 2.1 就 $\overline{\in} M$．如果论域 U 为数轴上的全体实数，则 $M=(-\infty, 3]$，又有 $2.1\in M$．所以，一般大都采用下述较完整的方法来描述集合．

［定义 **1-2.1**］ 称 A 是论域 U 上的普通集：$\forall u\in U$，只要根据某个约定，能知道或者 $u\in A$，或者 $u\overline{\in} A$．二者居其一，且仅居其一．

与其等价的分析的定义，还可以这样论述：

称 A 是论域 U 上的普通集：$\forall u\in U$，只要

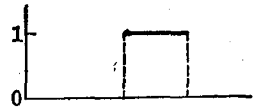
$$\begin{cases}\chi_A(u)=1\\ \chi_A(u)=0\end{cases}$$

二者居其一，且仅居其一．

总之，普通集 A 就是映射：

$$A\to\{0, 1\}$$
$$u\to\chi_A(u)$$

A 的特征函数的图象为



如是，Cantor 就在 Aristotle 二值观念下把世间一类事物囊

括在自己的各个子集里了.

至于元素和集合之间更细微的其它内容, Cantor 是这样继续建立的.

[定义 1-2.2] 空集 ϕ: 指没有一个元素的集合. 即:

$$\forall u\in U \quad \chi_{\phi}(u)=0.$$

[定义 1-2.3] 完全集 I, $\forall u\in U$ 只要始终

$$\chi_{I}(u)=1.$$

[定义 1-2.4] A 真包含 B $A\supset B$: 由 $\chi_B(u)=1\Rightarrow\chi_A(u)=1$ 但 $\exists u_0\in U$ 当 $\chi_A(u_0)=1$ 时却 $\chi_B(u_0)=0$. 这个定义等价于

$$A\supseteq B\Leftrightarrow\forall u\in U\ \chi_A(u)\geqslant\chi_B(u).$$

在 A 真包含 B 里, B 叫 A 的真子集. 一般的, 对给定的论域 U, 关于 U 有许多子集, 而我们常记 $\mathscr{P}(U)$为关于 U 的一切子集类, 或称 $\mathscr{P}(U)$为 U 的幂集.

显然, 因为对每一个 U 上的子集 $A\in\mathscr{P}(U)$ 都对应着 A 的一个特征函数 $\chi_A(u)$, 那么全体幂集 $\mathscr{P}(U)$ 也就对应形成了特征函数集. 我们常以 ch(u)记为 $u\in U$ 的特征函数集合的全体.

$$\mathrm{ch}(u)=\left\{\chi_A(u)\left|\begin{matrix}u\in U & u\to v\\ A\in\mathscr{P}(U) & v\to\{0,\ 1\}\end{matrix}\right.\right\}.$$

这样, 传统分明集合论里就有二套相关联的对应: 一方面 $A\in\mathscr{P}(U)\to\chi_A(u)$, 另一方面 $\mathscr{P}(U)\to\mathrm{ch}(u)$. 今后, 一个十分重要的任务, 就是研究和建立这二套纯集合系统和特征函数系统之间的代数关系.

[定义 1-2.5] (关于 U 的二个集合)$A=B$. 称 $A\in\mathscr{P}(U)$、$B\in\mathscr{P}(U)$的 $A=B$: 当且仅当 A、B 二集合的元素完全一样.

即 $A=B\Leftrightarrow$属于 A 的元素都属于 B, 以及属于 B 的元素都属于 A.

或者 $A=B\Leftrightarrow\forall u\in U$ 当 $u\in A\Rightarrow u\in B$ 以及当 $u\in B\Rightarrow u\in A$.

采用特征函数的记法, 亦即: $A=B\Leftrightarrow\forall u\in U$ 当 $\chi_A(u)=1\Rightarrow\chi_B(u)=1$ 以及当 $\chi_B(u)=1\Rightarrow\chi_A(u)=1$

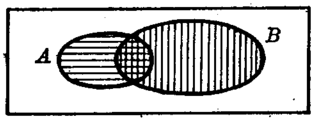
总之 $A=B\Leftrightarrow\forall u\in U\ \chi_A(u)=\chi_B(u)$. 这个对集相等的分析

的论断，在今后许多最重要的证明里，都起着决定性的作用。

至于普通集间的运算，我们简要的作以下复习。

分明集合间有以下意义更为广泛的运算。

[定义 1-2.6] $A\cup B$ 指由属于 A 或属于 B 的元素组成。Venn 图上泛指全部阴影



即 $\forall u\in U$ 以及 $A\in\mathscr{P}(U)$ $B\in\mathscr{P}(U)$

$u\in A\cup B\Leftrightarrow u\in A$ 或者 $u\in B$

$u\overline{\in} A\cup B\Leftrightarrow u\overline{\in}$ 同时 $u\overline{\in} B$

用特征函数的写法，即

$$\chi_{A\cup B}(u)=1\Leftrightarrow\chi_A(u)=1 \text{ 或 } \chi_B(u)=1\begin{cases}\chi_A(u)=1 \text{ 以及 } \chi_B(u)=0\\ \chi_A(u)=0 \text{ 以及 } \chi_B(u)=1\\ \chi_A(u)=1 \text{ 以及 } \chi_B(u)=1\end{cases}$$

$$\chi_{A\cup B}(u)=0\Leftrightarrow\chi_A(u)=0 \text{ 同时 } \chi_B(u)=0$$

概括起来就是：

$$\chi_{A\cup B}(u)=\chi_A(u)\vee\chi_B(u)=\max(\chi_A(u),\ \chi_B(u))$$

以后当知，这正是将 U 运算由普通集扩展到模糊集的一条可行的途径。

一般地，对有限 n 个普通集 $A_i(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n)$，其并

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

应有：$\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}(u)=\chi_{A_1}(u)\vee\chi_{A_2}(u)\vee\cdots\cdots\vee\chi_{A_n}(u)=\bigvee\limits_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(u)$

而无穷多个集合之并，则又记

$$\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i}(u)=\bigvee_{i=1}^{\infty}x_{A_i}(u)=\sup_{1<i<\infty}\chi_{A_i}(u)$$

总之，$i\in I$ 个普通集合之并，用特征函数确定，均有：

$$\chi_{\bigcup\limits_{i\in I}A_i}(u)=\bigvee_{i\in I}\chi_{A_i}(u)=\sup_{i\in I}\chi_{A_i}(u).$$