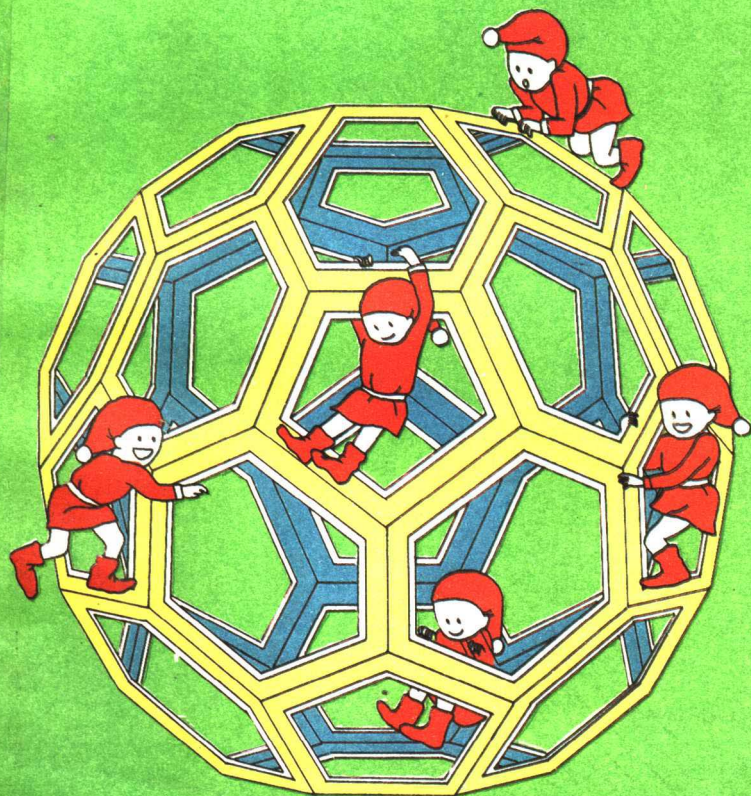


中学数学知识丛书

[日] 横地 清 编

寻找一次函数



知识出版社

中学数学知识丛书

〔日〕横地 清 编

寻找一次函数

〔日〕菊池乙夫 著

宋世安 译

知 识 出 版 社

内 容 提 要

本书是日本横地清教授为青少年数学爱好者编写的一套初等数学知识丛书，共35本。这套丛书的特点是通过日常生活中经常遇到的具体现象的分析来讲述初等数学提高青少年学习数学的兴趣。《寻找一次函数》一书通过对周围事物的调查指出到处存在着函数关系。在分析函数特征的同时也注意到函数的实际应用。本书共三章。第一章给出函数的一般结构，学习从现实事物和现象中如何提炼出函数来。第二章介绍一次函数的结构和性质。第三章介绍一次函数在现实世界的应用。本书供具有中学文化水平的广大读者阅读。

中学数学知识丛书

寻找一次函数

〔日〕菊池乙夫 著

梁世安 译

知识出版社出版

(北京阜成门北大街17号)

新华书店北京发行所发行 北京景山学校印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 2·875 字数 65千字

1988年2月第1版 1988年2月第1次印刷

印数：1—4,050

统一书号：13214·52 定价：0.70元

ISBN7-5015-0143-2

前 言

在初中大家学习了各种各样的函数，其中一次函数则是它们的中心。如果一次函数弄明白了，对其它函数的理解也就不会有什么困难了。

数学的领域很广，其中与现实世界联系最密切的应当是函数。本书是对现实的各种情况进行调查之后，从中取许多函数，在分析函数的特征的同时也注意到函数的实际应用。

第一章，我们给出了函数的结构但不限于一次函数，是为学习各种函数打基础的一章。我们要从现实的事物和现象中，自己提炼出函数的能力。

第二章，我们学习一次函数的结构和性质，要牢牢地抓住一次函数的本质及其与其他函数共同的地方。

第三章是学习如何在现实世界中应用一次函数。这里所用的函数不仅仅是第二章出现的那种简单的规整的形式，不可避免地要处理小数、分数以及很大的数字。

著 者

本书的用法

本书是根据现实生活中的材料而写成的。数学的任何领域都是根据现实生活而发展起来的。因此，对初次学习的内容，自己要亲自调查、实践来完成作业。

为了学懂本书，务请做到以下几点。

(1) 即使是曾经实际观察和体验过的东西，那仅仅是作者自己的实践而已，而对于读者来说，还是未亲身经历过的。读者自己亲自观察或记录一个实例，这对掌握数学是非常必要的。那怕是与所举之例相同，但自己亲身做一下，也是非常重要的。

(2) 在本书中，除计算之外，还有各种作业。例如画图、制作缩图、绘制图表等。对这些作业仅仅走马观花看一下是不行的，要边看边做。计算题的答案，即使给出，也要自己亲自动手算一算，再与答案对证一下。图象要自己动手用方格纸画一下。习题当然要做，例题也要自己动手解一下。

如果能如此使用本书，读者一定能掌握一次函数。

中学数学知识丛书

- * 1. 数学的发展
- 2. 数学的学习方法
- 3. 城镇和乡村的数学
- 4. 计算的应用
- 5. 整数的趣味
- 6. 正数·负数
- 7. 平方根和实数
- * 8. 数学里的文字
- * 9. 文字式的活用
- 10. 集合的应用
- * 11. 一次方程·一次不等式
- 12. 连立方程的活用
- 13. 二次方程的探索
- * 14. 方程的应用问题
- * 15. 寻找比例关系
- * 16. 寻找一次函数
- * 17. 二次函数的探索
- 18. 变化率和总量
- 19. 寻找函数
- 20. 直线式的应用
- 21. 点·直线·平面
- 22. 什么是立体
- * 23. 三角形和四边形的性质
- 24. 圆的性质
- * 25. 相似的应用
- 26. 证明方法
- * 27. 新几何
- 28. 土地的测量
- 29. 测量地球
- * 30. 学点儿统计
- 31. 概率观点
- 32. 数学史拾零
- * 33. 影子的几何
- 34. 侦探的数学
- 35. 不输给老师和妈妈
——动手做数学模型

目 录

前言

本书的用法

第一章 研究变动的数学..... (1)

§ 1 吊篮在动 (2)

变动的与不变的东西..... (2)

表示变量的字母..... (3)

两种变量..... (4)

分析变动的数学..... (5)

§ 2 递增、递减 (8)

一转就上去 一转就下来..... (8)

有规律的变化..... (10)

连接的变化..... (12)

跳跃变化..... (14)

具有断层的变化..... (15)

变化的大小与比率..... (16)

§ 3 函数的图象 (19)

对应值的组和点..... (19)

对应值的点集合..... (21)

增加状态和图象..... (23)

减少状态和图象..... (26)

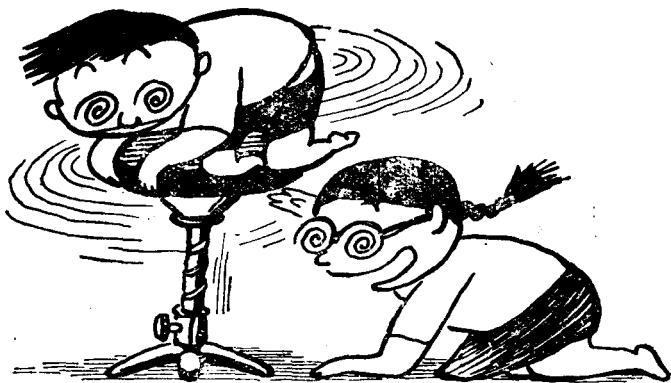
一定状态和图象..... (27)

对应方式和图象的形状..... (29)

§ 4	变化率和全量	(31)
	电车的速度和区间变化率	(31)
	电车的路程	(33)
	第一章小结	(36)
	测验题	(37)
	测验题解答	(38)
第二章	一次函数	(40)
§ 1	储蓄罐的函数	(41)
	硬币投入储蓄罐后	(41)
	对应值和图象	(43)
	变化的特征	(45)
§ 2	缆车的函数	(47)
	乘缆车	(47)
	继续行驶	(49)
	变化和图象	(52)
§ 3	一次函数	(54)
	一次函数及其表达式的形式	(54)
	对应值和图象	(57)
	变化状态	(59)
	图象真的是直线吗?	(62)
	第二章小结	(64)
	测验题	(65)
	测验题解答	(66)
第三章	一次函数的应用	(68)
§ 1	两个一次函数的连接	(69)
	连接的贮水桶的函数	(69)
§ 2	实验公式	(71)

弹簧的函数.....	(71)
§ 3 公式和一次函数	(73)
梯形面积的函数.....	(73)
储蓄金的函数.....	(74)
§ 4 消费量与费用	(75)
电费的函数.....	(75)
第三章小结.....	(78)
测验题.....	(79)
测验题解答.....	(81)

第一章 研究变动的数学



在我们周围存在着各种各样的现象或物体，这些物体不停地运动，并且大小程度也在变化。

例如，公共汽车起动后速度渐渐增加。行驶的路程也要增加，行驶的时间也会增加。

我们观察一棵树，从下往上看，树干渐渐地由粗变细。

对此类变动着的物体，我们如想详细地研究它们的大小和数量的变化，就一定要用到数学。第一章中所讲的，就是这些构成数学的基本内容的东西。

§1 吊篮在动

变动的与 不变的东西

对某种现象或一个物体来说，一般情况下，总可分为有大小变化的和无大小变化的。

【例题1】到公园乘坐吊篮旋转。东京练马区一公园的吊篮支柱的半径是 5.5m ，吊篮的棚顶距地面最近高度为 2m 。

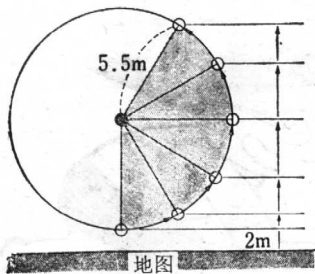


图 1-1 吊篮的运动

(1) 吊篮在运动，但大小不变的是什么？

(2) 由于吊篮的运动，有大小变化的是什么？

【解】(1) 尽管吊篮在动，但吊篮本身的大小和位置没有变化。这是因为支柱的长度（旋转半径）和轴所处位置的高度不变的缘故。

(2) 吊篮开始运动时，你自己乘坐的吊篮所处的位置的角度渐渐地增大。

另外，当乘坐的吊篮到达顶端后便逐渐下降。开始旋转起算的时间也渐渐增大了。因而，在运动中有下面的一些量有大小变化。

- ① 旋转角度的大小；
- ② 从地面到吊篮的高度；

③ 从开始旋转算起经过的时间。

【例题2】试将吊篮的运动用数量表示。

(1) 吊篮的运动情形;

(2) 吊篮高度的变化情形。

【解】(1) 记录从开始旋转的角度到旋转一周后的角度。并将一周的角度逐次细分。比如,按每 30° 排列时,就可以有下面的集合*:

$\{0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 360^\circ\}$

(2) 吊篮的棚距地面最低高度是2m,最高高度是13m,这中间通过所有的高度,因此,如按每1m的高度作记录,便得到下面的集合

$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ 。

象这样,就一个现象或物体,可将相同种类的量按大小不同可组成一个集合,称这个集合的元素**的全体为变量。

【问1】橡皮筋用力拉或吊挂上物体时,就会伸长。现在一根30cm的橡皮筋可悬挂100g的物体,并伸长到55.8cm。

(1) 将吊挂的重量按每20g表示之;

(2) 橡皮筋伸长的变量按每5cm表示之。

【答】(1) $\{0g, 20g, 40g, 60g, 80g, 100g\}$

(2) $\{30cm, 35cm, 40cm, 45cm, 50cm, 55cm\}$

**表示变量
的字母**

为表示变量,我们列出了数。但我们无法写全。

【例题3】有关吊篮运动的各个自变量,如想把它们的全体表示出来,可用什么方法?

(1) 旋转一周的所有角度;

* 特定范围的物的全体,叫做集合。

** 集合的一个一个内容叫做元素。元素是数的时候,就叫做值。

(2) 吊篮通过的所有高度。

【解】旋转一周从 0° 到 360° 通过所有角度，中途没有停顿。要想用数把这些角度全部表示出来是不可能的。所以全部的角度就使用一个字母表示。例如用字母 r 表示。表示这类变量的字母叫变数。

用 $r (^\circ)$ 表示从0到360的一切数，这可使用下面的不等号和等号来表示。

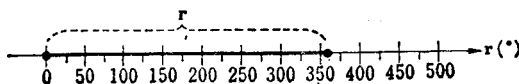


图 1-2

$$0 \leq r \leq 360$$

这时， r 所代表的数的范围叫做变域。

(2) 吊篮顶棚通过的所有高度是从2m到13m。如果用 $h(m)$ 表示，可写作 $2 \leq h \leq 13$ 。

【问2】关于问1中的橡皮筋的变量，请给出下面变数的变域。

(1) 将吊挂的重量用 $W(g)$ 表示时；

(2) 将橡皮筋的长度用 $l(cm)$ 表示时。

【答】(1) $0 \leq W \leq 100$ ；(2) $30 \leq l \leq 55.8$

两
种
变
量

吊篮的运动也好，橡皮筋的伸长也好，是以一种变量为基础，另一变量随之变动。

【例题4】在吊篮的运动中，什么样的变量可作为基本变量，什么样的变量是随之而变的。另外，将它们的变化关系象图 1-3 那样，在方格纸上画出半径55cm的缩图。

【解】吊篮的运动是旋转，使吊篮上下运动。如能知道“转到什么角度时，就达到了多少m的高度”，运动的情形也就

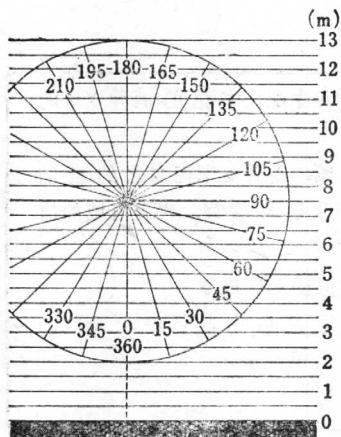


图 1-3 吊篮缩图

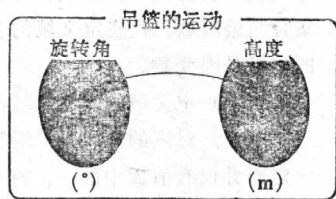


图 1-4

清楚了。我们把旋转角度作为基本变量来调查高度。

这种相互联系着的关系叫做对应。比如 60° 对应着 4.7 m 。如果旋转角用 $r\ (^{\circ})$ 、高度用 $h\ (\text{m})$ 的变数表示这个对应时，就有：

$$(r = 60\text{ 时}, h = 4.7)$$

这时，我们把表示基本变量的字母 r 叫做自变数，而把表示与其对应变动量的字母叫做因变数。通常习惯的用法是用 x 表示自变数，用 y 表示因变数。

【问3】在橡皮筋的伸长问题中，吊挂的重量用 $W(\text{g})$ 表示，橡皮筋的长度用 $l(\text{cm})$ 表示时，哪一个是自变数，哪一个是因变数？

【答】自变数是 W ，因变数是 l 。

分析变动的数学

我们现在把已经学习过的两种变量的关系概括成以下几条。这类关系不仅仅是吊篮和橡皮筋所具有，而且对各种的现象及物体

都成立。

(1) 存在着基本变化和受其支配而变化的两种变量的二个集合。

基本变化量的集合叫做定义域，受其支配而变化的量的集合叫做值域。代表定义域的字母是自变数，代表值域的字母是因变数。

(2) 定义域的值与值域的值对应成立。

(3) 对应的方式是：对于定义域中的任何一个值，一定有并仅有值域中的一个值与之相对应。

把这样的对应叫做单值对应*。

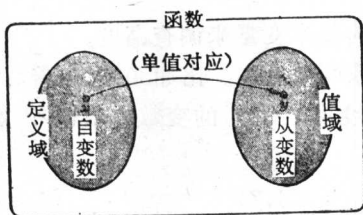


图 1-5

具备这三个条件时，就把这种对应规律叫做函数，(function)。用变数 $x \xrightarrow{f} y$ 表示。

为详细研究各种现象或物体的变化，要找出存在着怎样的函数关系。

【例题5】太阳光线照射在地面上的影子是不断变化着的。为了调查它的变化，在地面上立起一根杆就可以出现一个影子，这时会构成怎样的函数？

* 单值对应 对应的方法有如图1-6的三种情况。其中一一对应与多一对应属于单值对应。

函数要求“如定义域的值已知，就可知道值域的值”所以必须限定是单值对应。

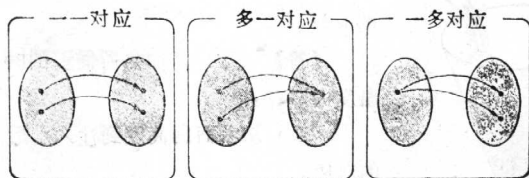


图 1-6 三种类型的对应

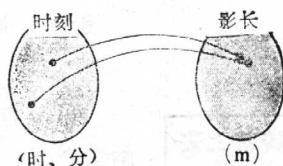
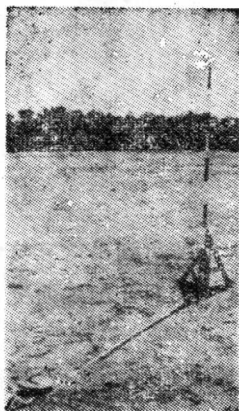


图 1-7

【解】我们要调查的是影子的长度，所以影子长度的集合是值域。而影子的长度是由太阳位置决定的，所以太阳位置一时刻的集合是定义域。因为午前和午后时刻不同而影长会相等，所以这是二一对应的情况。

【问4】下面的现象是从怎样的变量到怎样变量的函数对应关系？

(1) 用水壶烧开水的时候；

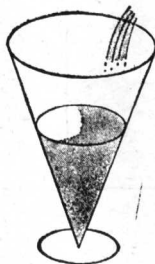


图 1-8

(2) 往圆锥形的容器(图1-8)内注水的时候。

【答】 (1) 从加热所需要的时间到水的温度的对应。

(2) 从水面的高度到注入水后水的体积的对应。

§ 2 递增、递减

一转就上去
一转就下来

吊篮的运动, 是从旋转角到吊篮高度的函数对应。根据这一点, 我们仔细地研究旋转车的运动。

将旋转起始的角度作为 0° , 从 0° 按每隔 30° 去进行观测时, 便有下面一些数值。

$0^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow 90^\circ \rightarrow 120^\circ \rightarrow \dots \rightarrow 360^\circ$

其中任一角度都对应着吊篮的高度。将这些旋转角顺次地排列, 就可弄清楚高度的变化。我们可以把它们归结成表, 这个表就叫对应表。

我们从图1-3的缩图读取对应值列成下表:

$r(^{\circ})$	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$h(m)$	2.0	2.7	4.7	7.5	10.3	12.3	13.0	12.3	10.3	7.5	4.7	2.7	2.0