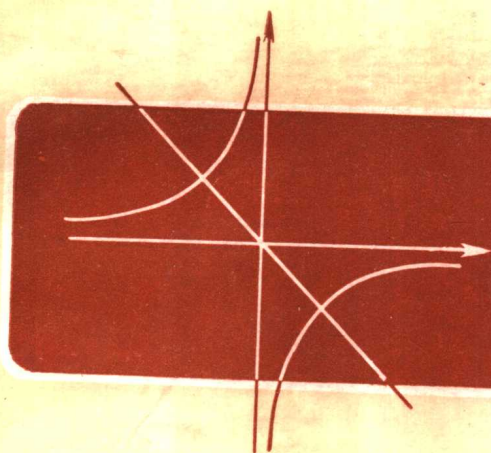


初中代数双基训练

第二版

主 编 翟 连 林



中国农业机械出版社

数学自学丛书

初中代数双基训练

第二版

主编 翟连林

编者 张国旺 俞颂萱 汪祖亨

中国农业机械出版社

本书是《数学自学丛书》之一，本书出版后，深受广大读者欢迎。这是第二版，作者在第一版的基础上经过认真修改，充实了基础知识的内容，突出了能力的培养与训练。主要内容包括：实数、代数式、方程和方程组、不等式、指数和对数、函数及其图象、综合训练和一个专题（整数的性质）等八章。

本书比较全面、系统地归纳和总结了初中代数的基础知识，并通过各章典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法，在各关键处指出了易犯的错误的以及应注意的事项，通过综合训练，帮助读者沟通各部分代数知识，提高综合运用代数知识解决问题的能力。

本书适合于青年职工、自学青年自学用，亦可供初中生和中学数学教师参考。

初中代数双基训练

（第二版）

主编 翟连林

编者 张国旺 俞颂萱 汪祖亨

★

中国农业机械出版社出版（北京阜成门外百万庄附近一号）

（北京市书刊出版业营业登记证出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

★

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 $14 \frac{1}{8}$ 字数 311 千字

1983年6月北京第一版

1985年12月北京第二版·1985年12月北京第二次印刷

印数 412,001—441,300·定价 2.50 元

★

统一书号：7216·56

序

为适应我国四化建设的新形势，从根本上提高广大职工的科学文化水平，已成为当务之急。从我国广大职工的实际出发，科学水平的提高尤感迫切。中共中央、国务院《关于加强职工教育工作的决定》，正是针对着这一迫切需要而作出的。但是这样的认识在许多实际工作中往往得不到贯彻，总认为抓教育、提高科学文化水平只是久缓的计议，不是当务之急，这样当然就谈不上有什么迫切感了。其实这种看法既不符合中央的方针，又和广大群众的需要相违背。中国农业机械出版社编辑出版的《数学自学丛书》（第一版）问世以来，受到极为广泛的读者热烈欢迎，很重要的一个因素，就是因为它适应了当前的迫切需要。

数学已日益成为一切近代科学技术的重要基础。当前已不只是理、工、农、医的各专业愈来愈需要数学，就象心理学、经济学、语言学等专业的发展也都离不开数学，而且还需要很高深的近代数学。要提高我国广大职工的科学水平，如果数学不首先提高，就将成为拦路虎。所以这套丛书的出版具有深远的意义。

这套丛书在编写方面有许多特点，归结起来有以下三个方面。

一、取材允当，适用面广泛

事实上，该丛书是根据中学和大学专科数学的内容，由浅入深地编排，概括了全部中学和大学专科数学的内容，它

不仅适合于广大职工自学的需要，也适合于在校的中学生和大专学生自修参考之用，以及中学数学老师进修提高之用。

二、重视双基，突出能力的培养

这套丛书的每一册都按基础知识提要、典型例题、习题三部分组成，而且内容精练，例题典范，习题多样。在内容的叙述中又注意揭露实质与规律，在典型例题的讲解中又能注意启发思路，在习题的设置上注意基本训练题与综合训练题的配合，从而既能使读者巩固地掌握基础知识，熟悉基本技能，又能使读者得到能力的培养，科学地处理了知识传授和能力培养这两个重要环节。

三、重视启发诱导，利于自学

该丛书针对自学青年缺乏辅导的情况，力求叙述简明，讲清思路的来龙去脉，揭示解题规律，纠正易犯的错误，循循善诱，利于自学。还通过提示方式，启发读者自行解题。既为读者提供自学的方便，又能启发读者独立思考。

以上是概括这套丛书的特点，当然不是说每一本书都一样，更不是说每一本书都是完美无缺。而且随着形势的发展，今后还必须继续更新，使这套丛书在我国四化建设中继续发挥它的根本性的作用。

程民德

1984年12月20日

注：程民德教授是中国科学院学部委员，中国数学学会副理事长，北京大学数学研究所所长。

前 言

为了帮助广大职工和自学青年学好中学数学和大学专科数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学、职工业余中学和电视大学、职工大学的数学教材，结合自学特点，编写了这套《数学自学丛书》。

这套丛书包括：

一、初中部分

1. 《初中代数双基训练》；
2. 《平面几何双基训练》；
3. 《初中数学总结辅导》。

二、高中部分

1. 《高中代数双基训练》；
2. 《立体几何双基训练》；
3. 《平面三角双基训练》；
4. 《平面解析几何双基训练》；
5. 《高中数学总结辅导》。

三、大学专科部分

1. 《一元微积分双基训练》；
2. 《多元微积分双基训练》；
3. 《线性代数双基训练》；
4. 《概率统计双基训练》；
5. 《复变函数双基训练》；

6. 《逻辑代数与 BASIC 语言双基训练》.

为便于自学,在这套丛书的各册中,首先帮助读者系统地归纳和总结数学基础知识;然后通过对典型例题的分析、解答和评注,帮助读者总结常用的解题方法和技巧,分析并纠正常易犯的错误;最后通过各种类型的基本训练题、综合训练题以及自我测验题(包括解答或提示)的演算,帮助读者巩固概念,熟悉定理、公式和法则,提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力.

为了满足较高水平读者的需要,在各册的最后还安排了一些专题.在这本《初中代数双基训练》中,安排了“整数的性质”这个专题.

在本书编写过程中,承蒙张载羽、徐松柏、竺志平三同志的大力支持和帮助,符布君同志最后做了认真的核算,在此一并表示感谢.

由于我们的水平有限,加之时间仓促,不妥和错误之处,敬希读者批评指正.

编 者

1985年6月

目 录

序

前言

第一章 实数	1
一、基础知识提要	1
(一) 实数的概念	1
(二) 实数的运算	3
二、基本训练举例	5
三、基本训练题	14
四、基本训练题解答或提示	30
五、自我检查题及解答	36
试题	36
解答	38
第二章 代数式	40
一、基础知识提要	40
(一) 代数式	40
(二) 整式	41
(三) 分式	45
(四) 根式	47
二、基本训练举例	49
三、基本训练题	86
四、基本训练题解答或提示	114
五、自我检查题及解答	126
试题	126
解答	133
第三章 方程和方程组	138

一、基础知识提要	138
(一) 方程	138
(二) 方程组	145
(三) 列方程(组)解应用题	147
二、基本训练举例	148
三、基本训练题	203
四、基本训练题解答或提示	222
五、自我检查题及解答	238
试题	238
解答	245
第四章 不等式	257
一、基础知识提要	257
(一) 不等式基本概念	257
(二) 不等式的性质	257
(三) 不等式(组)的解法	257
二、基本训练举例	261
三、基本训练题	269
四、基本训练题解答或提示	274
五、自我检查题及解答	282
试题	282
解答	283
第五章 指数和对数	287
一、基础知识提要	287
(一) 指数和对数	287
(二) 常用对数	288
(三) 科学记数法	289
二、基本训练举例	289
三、基本训练题	302
四、基本训练题解答或提示	310

五、自我检查题及解答	320
试题	320
解答	322
第六章 函数及其图象	325
一、基础知识提要	325
(一) 直角坐标系	325
(二) 函数	326
二、基本训练举例	332
三、基本训练题	356
四、基本训练题解答或提示	368
五、自我检查题及解答	377
试题	377
解答	380
第七章 综合训练	384
一、综合训练提要	384
二、综合题举例	386
三、综合训练题	399
四、综合训练题解答或提示	403
五、自我检查题及解答	411
试题	411
解答	413
第八章 专题：整数的性质	420
(一) 整除	420
(二) 整数的奇偶性	423
(三) 素数与复合数	426
(四) 平方数	428
(五) 整数表示法	430
(六) 连续整数的性质	433
(七) 不定方程	435
(八) 整数的末位数问题	439
练习题	442

第一章 实数

一、基础知识提要

(一) 实数的概念

1. 有理数和无理数统称实数。任何一个有理数都可以写成有限小数(整数可以看作小数点后面是0的小数)或者循环小数的形式;无限不循环小数是无理数。另外,有理数与无理数的区别还在于有理数都可以表示为分数的形式,而无理数则不能。

2. 整数和分数统称有理数。整数又分正整数(自然数)、零和负整数;分数也分为正分数和负分数。

3. 对于正整数和整数还有如下的概念:

(1) 偶数与奇数: 整数中能被2整除的数叫做偶数, 比如, $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ 。偶数一般表成 $2n$ 的形式, 其中 n 是整数。

整数中不能被2整除的数叫做奇数, 比如, $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ 。奇数一般表成 $2n+1$ 或 $2n-1$ 的形式, 其中 n 是整数。

(2) 质数与合数: 在大于1的自然数中, 只能被1和它本身整除的自然数, 称为质数(或素数); 除1和它本身以外, 而且还能被其他自然数整除的自然数, 称为合数。合数总可以表示为一个质数的幂或几个质数幂的连乘积的形式, 其中的每一个质数称为质因数。1既不是质数, 也不是合数。

(3) 互质数：如果两个自然数的最大公约数是1，这两个自然数称为互质数（互素数）。例如，3和5是互质数，4和9也是互质数。互质数与质因数是不同的。互质的两数可以是质数，也可以不是质数；而质因数必须是质数。

4. 数轴：规定了正方向、原点和长度单位的直线，称为数轴。数轴上的点与实数之间是一一对应的。

5. 相反数：如果实数 $a \neq 0$ ，则 $-a$ 称为 a 的相反数。在数轴上， a 和 $-a$ 所对应的点分别位于原点的两侧，且到原点的距离相等。互为相反数的两个数的和为零。

如果 $a = 0$ ，则零的相反数仍然是零。

6. 倒数：如果实数 $a \neq 0$ ，则 $1 \div a = \frac{1}{a}$ 称为 a 的倒数。互为倒数的两个数的积为1。

如果 $a = 0$ ，则零没有倒数。

7. 绝对值：一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。即

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

绝对值的几何意义是实数 a 在数轴上的对应点到原点的距离。

8. 实数大小的比较：对于给定的两个实数 a 和 b ，下列三种情况有一种并且只有一种成立。

$$a > b \iff a - b > 0,$$

$$a = b \iff a - b = 0,$$

$$a < b \iff a - b < 0.$$

用数轴上的点来表示两个实数，右边的点所对应的实数总比左边的点所对应的实数大。因此，正数都大于零，负数都小于零，正数大于每一个负数；两个负数中，绝对值大的反而小。

(二) 实数的运算

在实数集合里，可以进行加、减、乘、除、乘方和开方（开偶次方时，被开方数不为负数）这六种代数运算。运算时，如果遇到无理数，并且需要求出结果的近似值，可以按照所要求的精确度用近似的有限小数去代替无理数，再进行计算。

1. 运算法则：实数的运算法则见表1-1。

表 1-1

运 算 法 则	同 号		异 号	
	符 号	绝 对 值	符 号	绝 对 值
加 法	保持原号	相 加	同绝对值较大者	相 减
减 法	减去一个数等于加上它的相反数，然后按加法做			
乘 法	+	相 乘	-	相 乘
除 法	+	相 除	-	相 除

2. 乘方和开方

(1) 乘方：求相同因数的积的运算，称为乘方。乘方运算的结果称为幂。即

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ 个}} = a^n.$$

其中 a 称为底数， n 称为指数， a^n 称为 a 的 n 次幂或 a 的 n 次方。二次方也叫做平方，三次方也称为立方。特别地，一

个数也可看作这个数本身的一次方。

正实数的任何次幂都是正数，负实数的奇次幂是负数，负实数的偶次幂是正数。特别地，有

$$(-1)^n = \begin{cases} (-1)^{2k-1} = -1, \\ (-1)^{2k} = 1. \end{cases} \quad (\text{其中 } n, k \text{ 为正整数})$$

(2) 开方：主要是掌握开平方。

如果 $x^2 = a$ ，则 x 叫做 a 的平方根或二次方根。求 a 的平方根的运算，叫做开平方，其中 a 叫做被开方数，2 是根指数。正数 a 的平方根有两个，它们互为相反数。其中，正的一个平方根用 “ $\sqrt[2]{a}$ ” 表示，负的一个平方根用 “ $-\sqrt[2]{a}$ ” 表示；“ $\sqrt[2]{}$ ” 读作 “二次根号”，通常根指数 2 省略不写。如 $\pm\sqrt[2]{a}$ 写作 $\pm\sqrt{a}$ ，读作 “正、负根号 a ”。零的平方根是零，即 $\sqrt[2]{0}$ 就是 0。因为任何实数的平方都不是负数，因此，负数没有平方根。

正数 a 的正的平方根，也叫做 a 的算术平方根，记作 $\sqrt{a}$ 读作 “根号 a ”。零的算术平方根仍是零，即 $\sqrt{0} = 0$ 。所以有

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

3. 运算定律：实数的运算定律见表1-2。

表 1-2

	加 法	乘 法
交换律	$a + b = b + a$	$ab = ba$
结合律	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
分配律	$a(b + c) = ab + ac$	

4. 运算顺序：加、减、乘、除、乘方和开方这六种运算总称为代数运算。其中，加、减运算称为一级运算；乘、除运算称为二级运算；乘方、开方运算称为三级运算。

无括号时，先乘方开方，后乘除，再加减；同级运算从左向右。有括号时，先求最内层，逐层向外。

二、基本训练举例

例1 填空：

(1) $-\frac{12}{7}$ 、 $-1\frac{3}{4}$ 、 -1.73 三数中最大的一个数是 _____；

(2) _____ 的相反数的倒数与1之和是 $\frac{1}{3}$ ；

(3) $a =$ _____ 时， $|a - 3| = 2$ ；

(4) 已知 $|a - 3| - 3 + a = 0$ ，则实数 a 的范围是 _____。

解：(1) $-\frac{12}{7}$ 。

评注：

1) 解题思路是：

$$\because \left| -\frac{12}{7} \right| = 1.71\dots, \quad \left| -1\frac{3}{4} \right| = 1.75,$$

$$\therefore \left| -\frac{12}{7} \right| < |-1.73| < \left| -1\frac{3}{4} \right|,$$

$$\text{即 } -\frac{12}{7} > -1.73 > -1\frac{3}{4}.$$

2) 比较两个负数的大小，通常先将分数化为小数（或将诸分数化成同分母的分数），再看其绝对值，绝对值大的，

数值反而小.

$$(2) \frac{3}{2}.$$

评注: 解题思路是:

利用逆推的方法. $\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$ 的倒数是 $-\frac{3}{2}$,

$-\frac{3}{2}$ 的相反数是 $\frac{3}{2}$.

$$(3) 5 \text{ 和 } 1.$$

评注: 解题思路是:

由 $a - 3 = 2$ 和 $-(a - 3) = 2$ 即 $a - 3 = -2$ 两种情况推出. 特别注意不要漏掉后一种情况.

$$(4) a \leq 3.$$

评注: 解题思路是:

由已知 $|a - 3| = -(a - 3)$,

$\therefore$ 当 $a - 3 \leq 0$ 时, 上式成立, 即 $a \leq 3$.

例2 若 a 、 b 、 c 三数在数轴上的对应点如图1-1, 则 $|a| - |a + b| + |c - b| - |a + c|$ 等于 ().

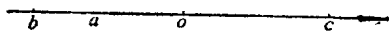


图 1-1

- (A) $2b + a$; (B) $-2b + a$; (C) $-2b - a$;
(D) $-a$; (E) $2b - a - 2c$.

解: (D).

评注:

1) 解题思路是: 由 a 、 b 、 c 三数在数轴上的位置,

知

$$b < a < 0 < c, \text{ 且 } |b| > |c| > |a|.$$

$$\begin{aligned} \therefore |a| - |a+b| + |c-b| - |a+c| \\ = -a + (a+b) + (c-b) - (a+c) \\ = -a. \end{aligned}$$

2) 本题的形式不同于一般的计算题和证明题, 它给出了五个可供选择的答案, 这类问题称作选择题. 即要求从正、误几个答案中选出正确的一个.

3) 解选择题除了直接通过演算获得正确结论外, 根据题型特点, 还有特殊技巧的简捷解法. 如本题用特殊值法, 按照已知条件, 设 $a = -1$, $b = -3$, $c = 2$, 得原式的值为 1. 而将 a 、 b 、 c 的值代入各供选择的结果中, 有 (A) -7 ; (B) 5 ; (C) 7 ; (D) 1 ; (E) -9 . 从而选 (D).

例 3 选择正确答案填入括号:

(1) 和数轴上的点一一对应的数是 ().

(A) 整数; (B) 有理数; (C) 无理数; (D) 实数.

(2) 设 a , b 是实数, 下列命题中正确的是 ().

(A) 当 $a > b$ 时, 则 $a^2 > b^2$; (B) 当 $|a| > b$ 时, 则 $a^2 > b^2$;

(C) 当 $a > |b|$ 时, 则 $a^2 > b^2$; (D) 当 $a \neq |b|$ 时, 则 $a^2 \neq b^2$.

(3) 已知 (A) $|a| = a$; (B) $|a| = -a$; (C) $|a| = |-a|$; (D) $a = -a$. 则能得下列结论的等式分别是: (i) a 为任意实数. (); (ii) $a = 0$. (); (iii) $a > 0$. (); (iv) $a < 0$. ().

(4) 下列各对数中, (i) 互为相反数的是 (); (ii) 互为倒数的是 (); (iii) 互为负倒数的是 ().