高职高专计算机系列规划教材

中国计算机学会高职高专教育学组推荐出版

概率与数理统计

（第2版）

季夜眉　吴大贤　等编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高职高专计算机系列规划教材

概率与数理统计

（第2版）

季夜眉　吴大贤　等编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书由中国计算机学会、全国大专计算机教材编审委员会审定并推荐出版。

《概率与数理统计》是高等工程专科教育的一门技术基础课。本书按照高职高专教育对数学课程教学的基本要求，适度精简了概率基础部分的数学内容，在取材上以数理统计为主体。全书在阐述基本的数学思想和原理的基础上，重点介绍在各个领域被广泛运用的参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等统计推断方法和最基本的数据处理方法，体现了对学生运用数理统计方法表述和解决实际问题能力的培养。本书还特意增设了课程实验，这些实验可以运用 MATLAB 软件很方便地在计算机上实现。

本书可作为高职高专院校计算机专业基础课教材，对工科基他专业及管理、经济类专业也都适用；还可作为工程技术人员和管理人员参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

概率与数理统计 / 季夜眉，吴大贤等编著. —2 版. —北京：电子工业出版社，2006. 3
（高职高专计算机系列规划教材）
ISBN 7-121-02314-8

Ⅰ. 概… Ⅱ. ① 季… ② 吴… Ⅲ. ① 概率论—高等学校：技术学校—教材 ② 数理统计—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 013478 号

责任编辑：王　博
印　　刷：北京牛山世兴印刷厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1 092　1/16　印张：13.5　字数：345 千字
印　　次：2006 年 3 月第 1 次印刷
印　　数：5 000 册　定价：18.00 元

出 版 说 明

高职高专的计算机专业面临着两方面的巨大变化，一方面是计算机技术的飞速发展，另一方面是高职高专教育本身的改革和重组。

当前，计算机技术正经历着高速度、多媒体及网络化的发展。计算机教育，特别是计算机专业的教材建设必须适应这种日新月异的形势，才能培养出不同层次的、合格的计算机技术专业人才。

自 20 世纪 70 年代末高等专科学校计算机专业相继成立以来，高等专科学校积极探索具有自己特色的教学计划和配套教材。1985 年，在原电子工业部的支持下，由全国数十所高等专科学校参加成立了“中国计算机学会教育委员会大专教育学组”，之后又成立了“大专计算机教材编委会”。从 1986 年到 1999 年，在各校老师的共同努力下，相继完成了 3 轮高等专科计算机教材的规划与出版工作，出版了 78 种必修课、选修课、实验课教材，较好地解决了高专层次计算机专业的教材需求。

为了适应计算机技术的飞速发展以及高职高专计算机教育发展的需要，“中国计算机学会教育委员会高职高专教育学组”和“高职高专计算机教材编委会”从 2000 年 7 月开始，又组织了本科高校、高等专科学校、高等职业技术院校和成人教育高等院校的有教学经验的老师，学习、研究、参考了“全国高校计算机专业教学指导委员会”和“中国计算机学会教育委员会”制定的高等院校《计算机学科教学计划 2000》，制定了《高职高专计算机教育 2002》，规划了高专、高职、成人高等教育三教统筹的第 4 轮教材。

第 4 轮教材的编写工作以招标的方式征求每门课程的编写大纲和主编，要求投标老师详细说明课程改革的思路、本课程和相关课程的联系、重点和难点的处理等。在第 4 轮教材的编写过程中，编委会强调加强实践环节、强调三教统筹、强调理论够用为度的原则，特别要求教学内容要适应高职高专教育发展的新形势。经过编委会、编者和出版社的共同努力，第 4 轮教材比前 3 轮教材得到了更广泛的使用，已经出版 60 多种。

在第 4 轮教材的出版过程中，得到了教育部高教司高职高专处的支持、指导和帮助，经过专家的评审，已有 8 种被列为“国家十五规划教材”，14 种被列为“教育部规划教材”。

第 4 轮教材具有以下特点：

1. 在编写上突出高等职业教育的特点，强调淡化理论，加强实训，突出职业技能训练。
2. 内容反映新知识、新技术和新方法，使学生能更快地适应就业岗位的需要。
3. 对实践性较强的课程，本系列设计了主教程、上机指导教程（初级实践指导与练习）和实训教程（高级实践指导与练习）。
4. 为了满足课堂教学和教师备课的需要，教材配有电子教案或电子课件。
5. 为了配合计算机等级考试和认证考试，部分教材的习题中安排了相应的题型。

本系列教材已于 2004 年 7 月至 9 月陆续推出 32 个新品种，使得第 4 轮教材达到近 100 种，基本覆盖了高职高专计算机专业的主要课程。

“中国计算机学会教育委员会高职高专教育学组”和“高职高专计算机教材编委会”恳切希望学生、教师和专家对本套教材提出宝贵的批评和建议。

中国计算机学会教育委员会高职高专教育学组

2004 年 9 月

前　言

概率与数理统计是研究随机现象客观规律性的数学分支。由于随机现象存在人类活动的几乎所有领域，包括工程技术应用领域，概率与数理统计也因此成为高职高专教育工科各专业的一门必修的技术基础课。

根据《教育部关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》，在全国计算机专业教学指导委员会的统一组织下，围绕培养高等技术应用性人才的目标，遵循突出应用性、实践性的原则，结合多年的教学工作实践，我们编写了这本教材。

作为一门技术基础课，应该突出基础理论知识的应用和实践能力的培养。因此，在教材内容的安排上，我们选择以数理统计为主干，适度精简了概率基础部分的教学内容，主要介绍与数理统计方法密不可分的基础知识。对于数理统计部分，也努力做到在讲清基本数学思想，指明基本原理与结论的基础上，以介绍常用的统计推断方法为主。相应地，例题、习题、复习题的选配均以帮助学生理解数学概念，理解数学建模思想，掌握常用统计推断方法为目的。

为了便于学生了解各章教学内容的知识结构及其相互联系，从而更清晰地掌握基本知识以及应用技能，我们在每一章的结尾专门给出了本章小结。

另外，值得指出的是，为了增强学生运用数理统计方法解决实际问题的能力，结合计算机应用技术的普及和发展，本教材特意安排了课程实验。这些实验，通过运用 MATLAB 软件，可以很方便地在计算机上实现。

本书由季夜眉、吴大贤主编。第 1、2、3、4 章由季夜眉执笔，第 5 章由周家全执笔，第 6、7、8 章由吴大贤执笔，第 9 章由王宇翔执笔。另外，王思维、黄薇精心地为本书绘制了全部插图。

由于对高职高专教育课程体系和教学内容改革的探索还很不够，本教材一定有不当之处，恳请同行教师和读者不吝赐教，批评指正。

季夜眉　吴大贤

2005 年 12 月

目　录

第1章 随机事件及其概率

自然现象与社会现象五光十色，千姿百态。我们留心观察，细细考虑，它们虽有千差万别，但总可以分为两大类。一类有明确的因果关系，即在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，称为确定性现象。例如：冬去春来，万物复苏；同性电荷不会相吸；上抛的石子一定要落下来；等等。另一类称为随机现象，因果关系不明显，或根本没有什么因果关系，即在一定条件下可能发生，也可能不发生，具有多种可能发生结果的现象。后一类现象发生什么结果是事先无法确切预测的，“随机而遇”，因此谓之“随机”。例如：投掷一枚质地均匀的硬币，可能正面（国徽一面）朝上，也可能反面（数字一面）朝上；远距离射击一个目标，可能击中，也可能击不中；等等。随机现象有两个特点：(1) 有偶然性的一面，在一次观察中，某现象可能发生，也可能不发生，即结果呈现不确定性；(2) 又有其必然性的一面，在大量重复观察中，其结果会呈现某种规律，即具有统计规律性。例如，多次重复投掷一枚硬币，就会发现出现正面与反面的次数几乎各占一半。产生随机现象的原因是由于存在着大量影响事物发展的偶然因素，概率与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

1.1 基本概念

1.1.1 随机事件

1. 随机试验

在一定条件下，对随机现象加以研究所进行的观察或实验，称为**试验**。

如果一个试验满足下列三个条件：

(1) 重复性：可以在相同条件下重复进行；

(2) 明确性：每次试验的可能结果不止一个，并且事先能明确知道试验的所有可能结果；

(3) 随机性：在一次试验之前不能确定哪一个结果一定出现。

则称这一试验为**随机试验**，简称**试验**，记为 E。

【例 1.1】 下列试验都是随机试验。

E_1：投掷一枚质地均匀的硬币，观察它出现正面或反面。

E_2：投掷一枚骰子，观察朝上的那一面的点数。

E_3：在一批产品中，任取一件，考察它是正品，还是次品。

E_4：从一批灯泡中，任取一只，测试其寿命。

E_5：投掷两枚质地均匀的硬币，观察它们出现正面或反面。

2. 随机事件与样本空间

在随机试验中，可能发生也可能不发生的结果，称为**随机事件**，简称**事件**。记为 A 或 B 或 C 等。我们将通过考察随机事件研究随机现象。

在每次试验中一定出现的事件称为**必然事件**，记为 Ω。在每次试验中一定不出现的事件称为**不可能事件**，记为 ϕ。必然事件与不可能事件都是确定性的，它们不是随机事件，只是为了今后讨论方便，把它们当做一类特殊的随机事件。

在一个随机试验中，不论可能发生的结果有多少，总可以从中找出这样一组基本结果（不能再分的），满足：

（1）每进行一次随机试验，必然出现而且只能出现其中的一个基本结果；

（2）任何事件，都是由其中的一些基本结果所组成。

这样的基本结果称为**基本事件**，或称为**样本点**，记为 e。

随机试验 E 的所有基本事件（样本点）组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**，记为 Ω。

在每个随机试验中，确定样本空间是至关重要的。这样，一个基本事件（样本点）e 可视为样本空间 Ω 中的一个元素，即 $e\in\Omega$；一个随机事件 A 由一个或若干个基本事件构成，视它为样本空间 Ω 中的一个子集合，有 $e\in A, A\subset\Omega$，等等。

在一次试验中，当事件 A 中包含的某个基本事件（样本点）出现，则称为**事件 A 发生**。

样本空间 Ω 包含所有的基本事件，每次试验中必然有它所包含的某基本事件（样本点）出现，因此它必然发生，是一个必然事件，故样本空间也用 Ω 表示。不可能事件是样本空间的一个空子集，故用 ϕ 表示。

【例 1.2】 写出例 1.1 中各随机试验的样本空间。

$E_1:\Omega_1=\{$正面，反面$\}$。

$E_2:\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$。

$E_3:\Omega_3=\{$正品，次品$\}$。

$E_4:\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$。

$E_5:\Omega_5=\{$（正面，正面），（正面，反面），（反面，正面），（反面，反面）$\}$。

【例 1.3】 在例 1.2“投掷一个骰子”的试验 E_2 中，试用样本空间的子集表示下列事件：

（1）$A=$“出现的点数为偶数”；

（2）$B=$“出现的点数小于 5”；

（3）$C=$“出现的点数为小于 5 的奇数”；

（4）$D=$“出现的点数大于 6”。

解 （1）$A=\{2,4,6\}$； （2）$B=\{1,2,3,4\}$；

（3）$C=\{1,3\}$； （4）D 为不可能事件，即 $D=\phi$。

又如，在例 1.1 的 E_4 中，随机事件“灯泡的寿命为 500 至 550 小时”可以用 $\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$ 的子集 $E=\{t\mid 500\leqslant t\leqslant 500\}$ 表示，等等。

1.1.2 事件的关系及运算

我们把随机事件定义为样本点的某个集合，就能方便地将集合论的全部知识用来解释事件之间的关系、运算及其运算律（见图 1.1），也就是能用简单事件来表示较为复杂的事件。

（1）包含关系：如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，即 A 中的样本点一定属于 B，则称事件 B **包含**事件 A，也称事件 A **包含于**事件 B；或称事件 A 为事件 B 的**子事件**，记为 $A\subset B$（或 $B\supset A$）。如在例 1.3 中 $\{1,3\}\subset\{1,2,3,4\}$，即 $C\subset B$，所以 C 是 B 的子事件。任何事件都是样本空间的子事件，都包含于 Ω。

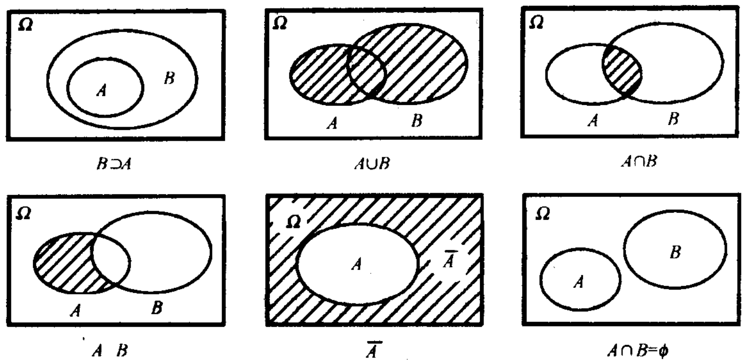

图 1.1

(2) 相等关系：如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A、B **相等**，记为 $A=B$。

(3) 事件的和(并)：事件 A 与事件 B 中至少有一个发生这一事件，称为事件 A 与事件 B 的**和**，也称为事件 A 与事件 B 的**并**，它是一个新的事件，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$。即

$$A\cup B=\{A\text{ 发生或 }B\text{ 发生}\}$$
$$=\{A,B\text{ 中至少有一个发生}\}$$

事件 A、B 的和是由 A 与 B 的样本点合并而成的事件。

例如，在例 1.3 中 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$。

n 个事件的和为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，或记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$；无穷可列个事件的和记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$。

(4) 事件的积(交)：事件 A 与事件 B 同时发生这一事件，称为事件 A 与事件 B 的**积**，也称为事件 A 与事件 B 的**交**，它也是一个新的事件，记为 $A\cap B$ 或 AB。即

$$A\cap B=\{A\text{ 发生且 }B\text{ 发生}\}$$
$$=\{A,B\text{ 同时发生}\}$$

事件 A、B 的积是由 A 与 B 的公共的样本点所构成的事件。

例如，在例 1.3 中 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $A\cap B=\{2,4\}$。

n 个事件的积为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，或记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$；无穷可列个事件的积记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$。

(5) 事件的差：事件 A 发生而事件 B 不发生这一事件，称为事件 A 与事件 B 的**差**，记为 $A-B$。即

$$A-B=\{A\text{ 发生而 }B\text{ 不发生}\}$$

事件 A 与 B 的差是由属于 A 而不属于 B 的样本点所构成的事件。

例如，在例 1.3 中 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $A-B=\{6\}$，$B-A=\{1,3\}$。

(6) 事件的互斥(互不相容)：如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\phi$，则称事件 A 与事件 B **互斥**，也称事件 A 与事件 B **互不相容**。

事件 A 与 B 互斥就是 A 与 B 中无公共的样本点。

例如，在例 1.3 中 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{1,3\}$，则 A、B 不互斥，B、C 不互斥，而 A、C 是互斥的。

如果一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中任意两个都互斥，则称这组事件**两两互斥**。

显然，基本事件是两两互斥的。

(7) 对立事件：如果两个事件 A 与 B 满足 $A\cup B=\Omega$，且 $AB=\phi$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，也称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**，记 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$。事件 A 与事件 B 对立，是指事件 A 与事件 B 既不能同时发生又不能同时不发生，即在每次试验中，A 与 B 中有且仅有一个发生。显然

$$A=\Omega-\overline{A}$$

例如，在例 1.3 中 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $\overline{A}=\{1,3,5\}$，$\overline{B}=\{5,6\}$。又如，“至少有一个事件发生”与“没有一个事件发生”互为对立事件。

由定义可知，对立事件必为互斥事件；反之，互斥的两个事件未必为对立事件。

例如，在例 1.3 中，$A=\{2,4,6\}$，$C=\{1,3\}$，则 $A\cap C=\phi$，故 A，C 互斥。但是，$A\cup C=\{1,2,3,4,6\}\neq\Omega$，故 A，C 不是对立事件。

事件的运算与集合的运算具有完全相同的运算规则：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)C=AC\cup BC$，$(AB)\cup C=(A\cup C)\cup(B\cup C)$；

(4) 对偶律（德·摩根律）：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$（它们可以推广到任意多个的情形。这里，$\overline{A\cup B}$是指事件 A，B 中至少发生一个事件一个的对立事件，它表示事件 A，B 都不发生；$\overline{AB}$是指事件 A，B 同时发生的这一事件的对立事件，它显然表示 A，B 中至少有一个不发生。）

根据约定，事件运算的顺序是先求逆后求积，最后求和或差，遇到括号优先计算。

【例 1.4】 设 A，B，C 为三个事件，试用 A，B，C 表示下列事件：

(1) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(2) A 发生而 B 与 C 都不发生；

(3) A，B，C 中至少有一个发生；

(4) A，B，C 中恰好有一个发生；

(5) A，B，C 中至多有一个发生；

(6) A，B，C 中恰好有两个发生；

(7) A，B，C 中不多于两个发生；

(8) A，B 中至少有一个发生而 C 不发生。

解

(1) $AB\overline{C}$，或 $AB-C$；

(2) $A\overline{B}\,\overline{C}$，或 $A-B-C$；

(3) $A\cup B\cup C$，或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$；

(4) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(5) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(6) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$，或$\overline{ABC}$；

(8) $(A\cup B)\overline{C}$，或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup AB\overline{C}$。

1.1.3 事件的概率

在实际问题中，知道随机事件是否发生是很重要的，但常常更关心随机事件发生的可能性的大小。随机事件发生的可能性的大小可以用一个确定的数来表示，这个数就叫随机事件 A

的概率，记为 $P(A)$。

1. **频率与概率**

定义 1.1 在相同的条件下，进行了 n 次重复试验，若随机事件 A 在这 n 次试验中发生了 n_A 次，则比值 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**。

频率具有**性质**：

(1) 非负性：对任一事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) 规范性：对必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega)=1$；对不可能事件 ϕ，有 $f_n(\phi)=0$；

(3) 可加性：对两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有 $f_n(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{k} f_n(A_i)$。

【例 1.5】 历史上曾有不少著名的科学家分别做过一个实验："大量重复投掷一枚质地均匀的硬币，观察它出现正面或反面的次数。"表 1.1 是他们所做实验结果的部分记录。

表 1.1

实　验　者	投掷次数 n	出现正面 A 的次数 n_A	频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
费　勒	10 000	4 970	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 6

事件 A 发生的频率表示事件 A 发生的频繁程度，频率越大，说明事件 A 发生得越频繁。但是，从表 1.1 可以看出，频率具有**随机波动性**，也就是说 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 不是一个常数。然而，这种波动也不是无规律可言的，随着 n 逐渐增大，频率的波动性逐渐消失而呈现出稳定趋势，也就是逐渐稳定于某个常数 p。频率的这一性质，称为频率的**稳定性**。正如表 1.1 最后一列所表明的，投掷硬币出现正面的频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 总在 0.5 附近波动，随着试验次数 n 的增加，它逐渐稳定于 0.5。一个合理直观的解释便是因为硬币的质地和形状是均匀的，所以出现正面和反面的机会相等，这个频率的稳定值 0.5 反映了投掷硬币正面出现的可能性的大小，也就是上面所说的"某个常数 p"。对于每个事件都有这样一个客观存在的常数 p 与之对应。

因而，我们将事件 A 的频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 随 n 增大时所逐渐趋向稳定的那个常数 p 定义为事件 A 发生的**概率**，记为 $P(A)=p$。这是**概率的统计定义**。

显然，当 n 相当大时，可以用事件 A 的频率 $f_n(A)$ 作为事件 A 发生的概率的近似值，即 $P(A)\approx f_n(A)$。用频率近似代替概率的好处是便于实际应用。

由概率的统计定义和频率的有关性质，可以得到概率的**基本性质**：

(1) 非负性：对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$； (1.1.1)

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$； (1.1.2)

(3) 可加性：对两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots$，有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$。 (1.1.3)

在这里可以清楚地看出，任意一个随机事件的概率是介于0与1之间的一个常数。它的大小刻画事件 A 在试验中发生的可能性的大小，数值越大表明事件 A 越可能发生。

由基本性质(1)、(2)、(3)可推知概率还具有下列性质：

(1) $P(\phi)=0$； (1.1.4)

(2) 求逆公式：$P(A)=1-P(\overline{A})$； (1.1.5)

(3) 加法公式：对任意事件 A、B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.1.6}$$

特别情况下，若事件 A、B 互斥，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \tag{1.1.7}$$

对于三个事件 A、B、C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1.1.8}$$

可以用"加奇减偶"对上式进行记忆。

(4) 减法公式：若 $A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B);P(A)\geqslant P(B) \tag{1.1.9}$$

对任意事件 A、B，则有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB) \tag{1.1.10}$$

【例1.6】 考察某城市发行的 A、B 两种报纸，订阅 A 报的住户数占总住户数的70%，订阅 B 报的住户数占总住户数的50%，同时订阅两报的住户数占总住户的30%。求下列事件的概率：

(1) C="只订阅 A 报"；

(2) D="至少订阅一种报纸"；

(3) E="不订阅任何报纸"；

(4) F="只订阅一种报纸"。

解 设 A="订阅 A 报"，B="订阅 B 报"，根据题设有

$$P(A)=0.70,\ P(B)=0.50,\ P(AB)=0.30$$

(1) $\because C=A\overline{B}=A(\Omega-B)=A-AB$，而 $AB\subset A$

$\therefore P(C)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.40$

(2) $\because D=A\cup B$

$\therefore P(D)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7+0.5-0.3=0.9$

(3) $\because E=\overline{A}\,\overline{B}$

$\therefore P(E)P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.1$

(4) $\because F=A\overline{B}\cup\overline{A}B$，而 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥

$$\begin{aligned}\therefore P(F)=P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)&=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)\\&=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)\\&=0.7-0.3+0.5-0.3=0.6\end{aligned}$$

2. 古典概型

设随机试验 E 满足下列条件：

(1) 试验的样本空间只有有限个基本事件(样本点)：$\Omega=\{e_1,e_2,e_3,\cdots,e_n\}$；

(2) 每个基本事件(样本点)的发生是等可能的，即

$$P(e_1)=P(e_2)=P(e_3)=\cdots=P(e_n)$$

则称此类随机试验的数学模型为**古典概型**，也称为**等可能概型**。

在古典概型中，对随机试验 E，若样本空间的基本事件（样本点）总数为 n，事件 A 所包含的基本事件（样本点）数为 m，则由于等可能性，事件 A 的概率的计算公式为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 中包含的基本事件数}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 中的基本事件总数}}=\frac{m}{n} \tag{1.1.11}$$

【例 1.7】 投掷两颗骰子，求两颗同时出现奇数点的概率。

解 把投掷两颗骰子看做一次试验，用 (i,j) 表示第一颗骰子出现 i 点，第二颗骰子出现 j 点，这时的样本空间可表示为

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\&(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

而这些样本点的出现是等可能的，显然这是古典概型问题。

设 A="掷两颗骰子，两颗同时出现奇数点"，则

$$A=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$

样本空间的基本事件总数为 $n=6^2=36$，事件 A 所包含的基本事件数为 $m=9$（或 $m=C_3^1C_3^1=9$），由(1.1.11)式得

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

【例 1.8】 有 10 个同型号的精密电阻，其中恰好有 7 个一级品，3 个二级品。求下列事件的概率：

(1) 从这些电阻中任取 4 个，其中恰好有 2 个二级品；

(2) 无放回地连续取 4 个，其中恰好有 2 个二级品；

(3) 有放回地连续取 4 个，其中恰好有 2 个二级品。

解

(1) 题设"从这些电阻中任取 4 个"应理解为"一次取出 4 个"，设 A="任取 4 个，其中恰好有 2 个二级品"。由于样本空间的基本事件总数 $n_A=C_{10}^4$，事件 A 所包含的基本事件数 $m_A=C_3^2C_7^2$，所以

$$P(A)=\frac{m_A}{n_A}=\frac{C_3^2C_7^2}{C_{10}^4}=0.3$$

(2) 设 B="无放回地连续取 4 个，其中恰好有 2 个二级品"。由于要考虑顺序，故样本空间的基本事件总数 $n_B=P_{10}^4$，事件 B 所包含的基本事件数 $m_B=C_4^2P_3^2P_7^2$，所以

$$P(B)=\frac{m_B}{n_B}=\frac{C_4^2P_3^2P_7^2}{P_{10}^4}=0.3$$

(3) 设 C="有放回地连续取 4 个，其中恰好有 2 个二级品"。由于样本空间的基本事件总数 $n_C=10^4$，事件 C 所包含的基本事件数 $m_C=C_4^2 3^2 7^2$，所以

$$P(C)=\frac{m_C}{n_C}=\frac{C_4^2 3^2 7^2}{10^4}=0.2646$$

由于"无放回地一次取一个，连续取 k 次"的效果等于"一次取出 k 个"，故本例中(1)与(2)虽然用了不同的模型，但结果是相同的。另外，应注意在"古典概型"计算中，计算"样本空间的基本事件总数"与计算"事件 A 所包含的基本事件数"时，必须在同一个样本空间中考虑，当其中一个考虑"顺序"时，另一个也必须考虑"顺序"。

【例 1.9】 有 10 个同型号的精密电阻，其中恰好有 7 个一级品，3 个二级品，现从中任取 4 个。求下列事件的概率：

(1) 其中最多只有 1 个二级品；

(2) 其中至少有 1 个二级品。

解 设 A_i =“任取 4 个，其中恰好有 i 个二级品”($i=0,1,2,3$)；B=“任取 4 个，其中最多有 1 个二级品”；C=“任取 4 个，其中至少有 1 个二级品”。

(1) $\because B=A_0\cup A_1$，且 A_0 与 A_1 互斥

$\therefore$ 由加法公式(1.1.7)可得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_0)+P(A_1)\\&=\frac{C_7^4}{C_{10}^4}+\frac{C_3^1C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(2) $\because C=\overline{A}_0$，

$\therefore$ 由求逆公式(1.1.5)可得

$$\begin{aligned}P(C)&=P(\overline{A}_0)\\&=1-P(A_0)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

在概率的计算中，经常把一个复杂的随机事件用已知的简单随机事件的和、差、积、逆的运算来表示，然后通过已知的简单随机事件的概率，再根据概率计算公式来计算这个复杂的随机事件的概率。

1.2 概率的运算法则

1.2.1 乘法公式与事件的独立性

1. 条件概率

在实际中，常常会遇到这样的问题：在事件 B 已经发生的条件下，另一个事件 A 发生的概率怎样计算呢？它与不考虑事件 B 是否发生的情况下事件 A 发生的概率是否相同呢？它们之间又有什么关系呢？研究下面的例子。

【例 1.10】 在 100 个零件中，如果长度合格的有 95 个，直径合格的有 94 个，长度与直径都合格的有 92 个，现在从这 100 个零件中任意抽取一个。求：

(1) 抽到的该零件长度合格的概率；

(2) 抽到的该零件直径合格的概率；

(3) 抽到的该零件长度及直径都合格的概率；

(4) 抽到的该零件，已知其直径合格，现在长度也合格的概率。

解 对 100 个零件逐个进行编号，把直径合格的 94 个零件编为 $e_1,e_2,\cdots,e_{94}$，其余的 6 个零件编为 $e_{95},e_{96},\cdots,e_{100}$，则样本空间 $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_{100}\}$。

设 A =“抽到的该零件长度合格”，B=“抽到的该零件直径合格”

(1) 由于 100 个零件中长度合格的有 95 个，按古典概型计算，得

$$P(A)=\frac{C_{95}^1}{C_{100}^1}=\frac{95}{100}$$