空间解析几何学

朱鼎勋　陈绍菱　著

北京师范大学出版社

空间解析几何学

朱鼎勋　陈绍菱　著

北京师范大学出版社

1 9 8 1年

空间解析几何学
朱鼎勋　陈绍菱　著
*
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省大厂县印刷厂印刷
*
开本　850×1168　1/32　印张　8　字数·196,000
1981年3月第一版　1982年6月第二次印刷
印数21,001—30,000
书号13243 5　　定价1.00元

前　言

本书是根据 1977 年 10 月高等学校教材编写会所拟空间解析几何的教学大纲及 1980 年师范院校教学大纲的精神，和多年来从事教学实践的一些体会，在历年所使用讲义的基础上经修改而成，它可作为各种类型的大学一年级的教材。

本书系统地讲授欧氏空间解析几何，共分六章，另有两个附录。考虑到目前中学教材关于平面解析几何的内容，对于数学专业同学来讲，似嫌不足，因此编写三章平面解析几何的复习及补充作为附录的第一部分。另外本课需要行列式、矩阵等一些基本知识，因恐与高等代数的讲授时间不易配合，故编写这部分内容作为附录的第二部分，但祗加叙述，而未论证。

为了配合欧氏空间度量性质的特点，采用笛氏直角坐标系，同时利用了向量和坐标两种方法。由于欧氏三维解析几何，一方面是二维解析几何的推广。但另一方面两者又不尽相同，通过三维解析几何则可较易地推广到 n 维解析几何。因此较系统地、完整地介绍三维解析几何是完全必要的。至于仿射和射影的解析几何则留待高等几何中讲授。

关于课时可有两种安排：如果祗讲三维，则平面解析几何部分可作为课外阅读材料估计每周 4 学时，可以用半年时间讲完；另一种安排是先复习平面部分的三章，再讲空间全部，每周 5 学时全部讲授完毕。但最好隔周安排两学时的习题课，为了便于讲授和复习，在概念的引入和定理的论证方面都较详尽，对一些问题的提法，注意课程本身前后的联系，特别是与平面解析几何的类比。为了使学生掌握解题方法和技巧配备了一定数量的例题和

习题。对题目的选择是由简到繁注意到不同类型问题的解法，它是本书很重要的组成部分。

本书在编写过程中，北师大及一些院校的老师们，在使用原讲义时曾提出许多有益的意见对进一步修改起了很大作用，又北师大几何组的同志们在制图、校对方面付出了很大劳动，在此同表谢意。由于作者见闻有限，不妥之处在所难免，请多予指正。

作者识于北京师范大学数学系

1981 年 1 月 20 日

现将本书所采用的记号说明如下：

1. 在定理及例题证明完毕时附以记号█
2. 图 2.1 表示第二节第一图
3. 定理 1.1 表示第一节定理 1
4. 习题前附以 * 号的表示难度较大习题

又在本书出版后，一些兄弟院校及本校的老师和同学又提出很多宝贵意见，由于此版面不作较大更动，故仅作小量修改。值此第二次印刷之际，仅向同志们致以谢意，并望继续提出意见，以便再版时予以更正。

作者又识

1982 年 1 月 10 日

目　录

附录Ⅰ 平面解析几何复习及补充

附录Ⅱ 有关代数的一些知识

第一章　向量代数

我们已经知道，在平面解析几何里，对几何问题的解决是通过建立适当的坐标系，利用坐标间的代数运算来进行研究的。对于空间解析几何，我们同样可利用坐标方法，它是解析几何的重要工具。但对某些问题来讲，可利用另一种方法——向量法，它能避免一些繁复的计算而简捷地使问题得到解决。而且向量和坐标可以互相转化，这又对我们提供了很大的方便。本章就先介绍向量的线性运算和两种乘法以及它们的运算规律，我们必须熟悉这些规律，以便应用它们去解决一些关于空间直线和平面的问题。

§1. 数量与向量

在自然界中，我们常遇到两种不同类型的量，其中一类较简单的量，在取定测量单位后，就可以用一个实数来表示，例如物体的体积、温度、质量等，这种只具有大小的量叫做**数量**。数量可以是正，也可以是负，例如温度高于零度是正，而低于零度则是负。又数量是代数量，对它们可施行各种代数运算，例如加、减、乘、除等。另外还有一种较复杂的量，它们不但有大小，而且还必须指出方向，例如说 3 千克的力是不明确的，还必须指出力的作用方向。又如位移、速度、加速度、电场等等，它们虽有不同的力学意义或物理意义，但它们都是既有大小又有方向的量，于是就有必要把它们的共同点抽象出来，作为统一研究的对象。我们把既有大小，又有方向的量叫做**向量**或**矢量**。

向量的表示法 上面我们看到，向量具有两个特征，即大小和方向，而具备这两个特征的最简单的几何图形是有向线段，于是向量就用有向线段来表示：有向线段 $\overline{AB}$ 的长度表示向量的大小，有向线段两个端点的顺序，例如由 A 到 B 表示向量的方向。为了避免向量与有向线段记法相混，我们用上面带有箭头的线段来表示向量。例如图 1.1 中的向量记作 $\overrightarrow{AB}$，且 A 叫做向量的**始点**，B 叫做向量的**终点**。为了应用上的方便，我们也常用 $\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$…或黑体字 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$…来表示向量。又向量的大小也叫向量的**长度**或**模**。向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度记作 $|\overrightarrow{AB}|$。

我们把长度是 1 的向量叫做**单位向量**，长度是零的向量叫做**零向量**，记作 $\vec{0}$。显然零向量的始点与终点相重合，所以它没有确定的方向。

图 1.1

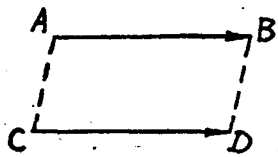

图 1.2

由于用有向线段表示向量，起点是可以任意取的，这就是说，长度相等方向相同的有向线段表示相同的向量。我们把同向等长的向量称为相等的，仍以等号表示，例如图 1.2 中 $ABCD$ 为一平行四边形，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$。因此给出一个向量，就有很多向量和它相等。如果把相等的向量看作是在不同地点的同一向量，这时的向量叫做**自由向量**。它的起点可以是空间内任何一点。以后为了研究问题的方便，常将一组向量移到共同始点——原点（见 § 4），我们把以原点为始点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 叫做 P 点的**半径向**

量(或位置向量)。

§2. 向量的加法和减法

一、两个向量的加法 根据力及位移等的合成法则，我们规定向量的加法如下：

〔**定义**〕以两向量为邻边所作的平行四边形之对角线所表示的向量叫做两向量的**和**。这种运算叫做**向量的加法**（平行四边形规则）。

如图2.1中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$。则以$\vec{a}$、$\vec{b}$为邻边所作平行四边形之对角线所成向量$\overrightarrow{OC}$即为$\vec{a}$、$\vec{b}$的和，记作

$$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b} \tag{2.1}$$

又
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\vec{b}$$

故(2.1)式又可写成

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} \tag{2.2}$$

于是可得二向量相加的三角形规则：

由第一个向量的终点作出第二个向量，则以第一个向量的始点为始点，以第二个向量的终点为终点所成的向量即为已知二向量的和，见图2.2。

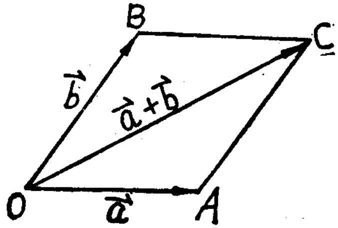

图 2.1

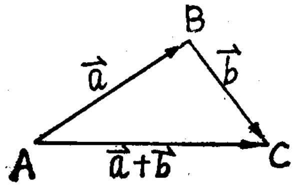

图 2.2

关于两个向量及其和向量，它们长度之间有以下的简单性质：

两向量和的长度不大于两向量长度之和，且又不小于两向量长度差的绝对值，即

$$|\vec{a}| \sim |\vec{b}| \leqslant |\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}| \qquad (2.3)$$

利用三角形边的和差定理，是很容易推出的。

在规定了向量的加法以后，我们很易证明，它和实数加法有相同的运算规律，由图 2.3 及 2.4 显见有：

交换律： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (2.4)

结合律： $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (2.5)

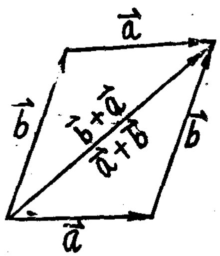

图 2.3

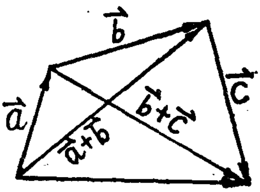

图 2.4

这里，不难看出，关于多个向量和的求法：在第一个向量的终点作一向量等于第二个向量，再从这个向量的终点作一向量等于第三个向量，一直进行下去得一折线，则以第一个向量的始点为始点，最后一个向量的终点为终点所成的向量，即是多个向量的和。见图 2.5。

二、两个向量的减法 根据向量的加法来规定向量的减法。

〔**定义**〕两个向量的差是一个向量，它与所减向量的和就是被减向量。这种运算叫做向量的**减法**。

例如 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，则 $\vec{c}$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差，记作

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b} \tag{2.6}$$

又由图 2.6，我们看到

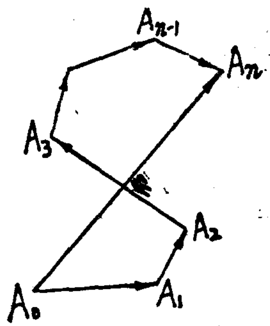

图 2.5

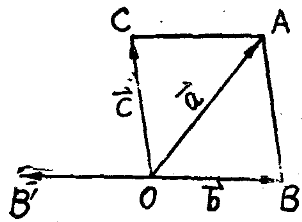

图 2.6

$$\vec{c}=\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b} \tag{2.7}$$

这就是说，自向量 $\vec{b}$ 的终点到向量 $\vec{a}$ 的终点所作的向量，就是 $\vec{a}-\vec{b}$。这种作图法，以后经常遇到。

在初等代数里，我们知道

$$a-b=a+(-b)$$

同样，在向量代数里也具有这种性质。在图 2.6 中，延长 BO 到 B'，使 $BO=OB'$，则向量 $\overrightarrow{OB'}$ 与 $\vec{b}$ 长度相等，而方向正好相反，我们把 $\overrightarrow{OB'}$ 叫做 $\vec{b}$ 的**反向量**。（当然，$\vec{b}$ 也是 $\overrightarrow{OB'}$ 的反向量）。记作

$$\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OB}=-\vec{b}$$

容易看出

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

即

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \tag{2.8}$$

故得

〔**定理 2.1**〕减去一个向量就等于加上它的相反向量。

由这个定理可以推出向量等式的移项方法：在一个向量等式中，将某个向量移到等号的另一端，只需改变它的符号即可。例如在 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$ 中，则有 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}-\vec{c}$，这是因为 $\vec{c}+(-\vec{c})=\vec{0}$。

又向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{a}-\vec{b}$ 关于它们的长度，以下不等式成立，即

$$|\vec{a}|\sim|\vec{b}|\leqslant|\vec{a}-\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}| \tag{2.9}$$

证明留待读者补出。

§3. 数乘向量

在代数里，我们知道，几个相等的实数相加，便得到几倍实数的概念。现在推广到几个相等的向量相加上去，我们有

〔**定义**〕n 个相等非零向量 $\vec{a}$ 相加的和叫做**向量 $\vec{a}$ 与正整数 n 的积**，记作 $n\vec{a}$ 或 $\vec{a}n$，即

$$n\vec{a}=\vec{a}n=\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\cdots+\vec{a}}_{\text{共 } n \text{ 个}} \tag{3.1}$$

显然 $1\vec{a}=\vec{a}$，且 $n\vec{a}$ 的长度是 $|\vec{a}|$ 的 n 倍，方向与 $\vec{a}$ 相同。

关于数乘向量的这种运算，对于一般向量极为有用，因此有必要将正整数 n 再推广到实数，

〔**定义**〕实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 是一个向量，它的长度是 $|\vec{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍，即

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$$

它的方向，当 $\lambda>0$ 时与 $\vec{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\vec{a}$ 相反。

显然，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$；$\lambda=-1$ 时，$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$。此外，数乘向量还满足以下的运算规律：

(1) $\mu(\lambda\vec{a})=(\mu\lambda)\vec{a}$ (3.2)

(2) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (3.3)

(3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (3.4)

首先，要证明 (1) 式成立，只需明确等号两边的向量是同向等长的。当 $\lambda>0$，$\mu>0$ 或 $\lambda<0$，$\mu<0$ 时，则等号两端的向量均与 $\vec{a}$ 同向；当 $\lambda>0$，$\mu<0$ 或 $\lambda<0$，$\mu>0$ 时，则两端的向量均与 $\vec{a}$ 反向。至于长度，由数乘向量的定义可知

$$|\mu(\lambda\vec{a})| = |\mu|\ |\lambda\vec{a}| = |\mu|\ |\lambda|\ |\vec{a}|$$
$$= |\mu\lambda|\ |\vec{a}| = |(\mu\lambda)\vec{a}|$$

即两端的向量等长。至于 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\lambda=0$，$\mu=0$ 的情形是显然的。

其次，要证明 (2) 式成立。我们首先注意到 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\lambda\geqslant0$ 而且 $\mu\geqslant0$ 的情形都是显然的；其他情形可按 λ，μ，$\lambda+\mu$ 的正负，分别根据定义来证明。

最后，我们来证明 (3) 式成立。当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$ 或 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 中至少有一个为零向量的情形都是显然的。因此只对 $\lambda\neq0$，$\lambda\neq1$，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ 的一般情况进行讨论。

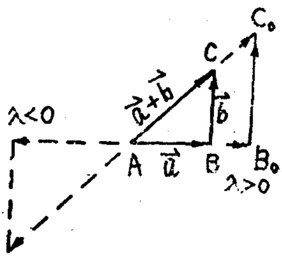

图 3.1

当 $\lambda>0$ 时，如图 3.1，作 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB_0}=\lambda\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{B_0C_0}=\lambda\vec{b}$，则 $BC\parallel B_0C_0$，$\angle ABC=\angle AB_0C_0$，且

$$\frac{AB_0}{AB}=\frac{B_0C_0}{BC}=\lambda\text{，故}\triangle ABC\sim\triangle AB_0C_0$$

∴ $$\frac{AC_0}{AC}=\lambda;\ \angle CAB=\angle C_0AB_0,$$

因此A，C，C_0在一条直线上。即知 $\lambda\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC_0}$

或者 $$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

至于 $\lambda<0$ 的情况留待读者自证。

总起来说，向量的加法和数乘向量可以象实数以及多项式那样去运算，因为它们的运算规律相同，又这两种运算叫做向量的**线性运算**。

根据数乘向量的定义，对任一向量$\vec{A}$都可写作

$$\vec{A}=|\vec{A}|\vec{A}^{\circ} \tag{3.5}$$

此处$\vec{A}^{\circ}$是向量$\vec{A}$的单位向量。

下面我们引进特殊位置的一组向量。

〔**定义**〕一组向量称为**共线的**或**共面的**，如果平行移动到同一个起点上时，它们是**共线的**或**共面的**；共线的向量也叫做**平行向量**，我们仍用$\vec{a}\parallel\vec{b}$表示$\vec{a}$与$\vec{b}$平行；用$\vec{a}\perp\vec{b}$表示$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，即它们的方向垂直。

〔**定理 3.1**〕设$\vec{a}$与$\vec{b}$是任意的两个非零向量，则$\vec{a}$、$\vec{b}$共线的充分必要条件是

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}\ (\lambda\text{ 为非零实数}) \tag{3.6}$$

证 条件的充分性，即由$\vec{b}=\lambda\vec{a}$推证$\vec{a}\parallel\vec{b}$，这可从数乘向量的定义直接得出。

条件的必要性，即由$\vec{a}\parallel\vec{b}$推证$\vec{b}=\lambda\vec{a}$。若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，只要这样选取实数 λ，使

$$|\lambda|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

它的正负依$\vec{a}$与$\vec{b}$是同向还是反向而定。由数乘向量的定义即可得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$。 ▮

〔**定义**〕零向量与任意向量共线。

〔**定理 3.2**〕三个非零向量$\vec{c}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$，其中无二共线，则共面的充分必要条件是

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\ (\lambda、\mu\ 为非零实数) \tag{3.7}$$

证 条件的充分性，即由$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$推证$\vec{c}$与$\vec{a}$，$\vec{b}$共面。这可从数乘向量与向量加法的定义直接得出。

条件的必要性，即由$\vec{c}$与$\vec{a}$、$\vec{b}$共面推证$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$。从一点$O$作出三向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$使其分别等于$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，从$C$作$OA$的平行线与$OB$延长线或其反向延长线相交于$B'$点，再从$C$作$OB$的平行线与$OA$的延长线或其反向延长线相交于$A'$点，由加法的平行四边形法则得

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'},$$

再由定理 3.1 得

$$\overrightarrow{OA'}=\lambda\overrightarrow{OA}=\lambda\vec{a},$$

$$\overrightarrow{OB'}=\mu\overrightarrow{OB}=\mu\vec{b}$$

故 $$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\quad(图\ 3.2\ 和\ 3.3)$$ ▮

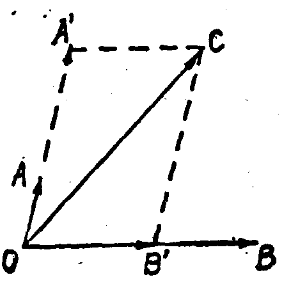

图 3.2

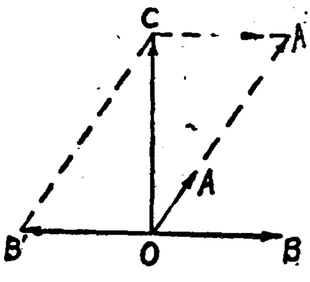

图 3.3