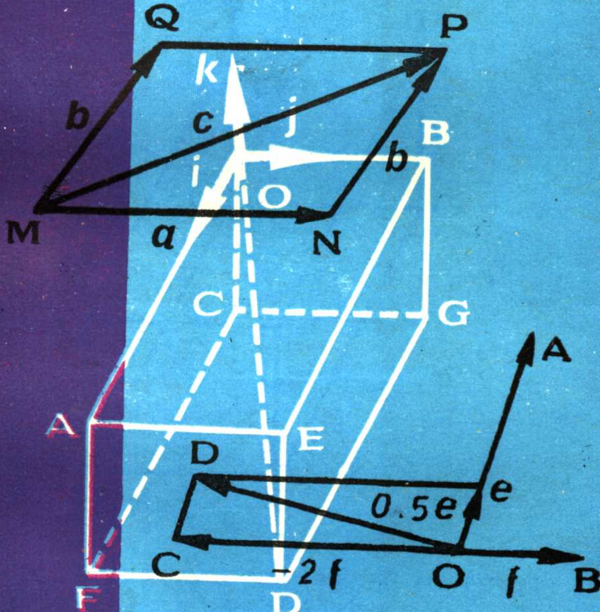
中学生文库

ZH… HENG WENKU

平面向量和空间向量



上海教育出版社

中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

平面向量和空间向量

吕 学 礼

上海教育出版社

责任编辑　冯　贤

封面设计　范一辛

中学生文库　平面向量和空间向量

吕　学　礼

上海教育出版社出版发行

（上海永福路123号）

各地新华书店经销　　上海崇明印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 4.25　插页 2　字数 78,000

1990年4月第1版　1990年4月第1次印刷

印数 1—8,100 本

ISBN 7-5320-1776-1/G·1731　　定价：1.30元

前　言

现实世界中有一个人、两只鸟、……，数学中表示这样的量的数就是整数1、2、…….

现实世界中有分成两半的西瓜、切成四块的月饼、……，数学中表示这样的量的数就是分数$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、…….

同样，现实世界中有向东30厘米的移动、向西50千米/小时的速度、…….对于这样的量，它们的大小固然重要，它们的方向也同样重要.我们在数学中研究这种既有大小又有方向的量，这就是向量.

向量的研究很有用处.可能你在物理中已经看到，一个力可以用一个向量表示，力的合成与分解可以用向量的加法和减法来计算.将来还可以看到，物理中还有许多重要的量，也是既有大小又有方向，都可以用向量来表示，它们的一些运算也可以利用向量的相应运算来进行.

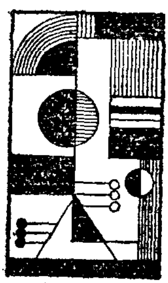
这本小册子比较详细地介绍了向量.讲了平面向量，它们的加减、数乘、点乘；又讲了空间向量，它们的加减、数

乘、点乘和叉乘. 向量的这些运算,都是具有实际意义的. 此外,还举了一些例子,说明平面向量和空间向量在几何中的应用.

希望读者通过这本小册子,不但可以获得有关这个数学对象——向量的一些入门知识,而且可以得到怎样研究一个一般的数学对象的一些方法.

这本小册子可供初中以上学生课外阅读. 对于书中的缺点错误,敬请读者批评指正.

目　录



一 平面向量

1. 什么是向量

什么是向量呢?

要回答这个问题,让我们先来看一些例子.

从家里向东走 300 米到学校,向北走 300 米到工厂(图 1·1). 同样从家里出发,同样走 300 米,由于所走的方向不同,到达的地点也不同. 这样的两个移动,虽然距离相等,但因方向不同,所以是两个不同的移动. 这就是说,一个移

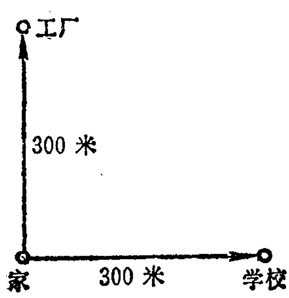


图 1·1

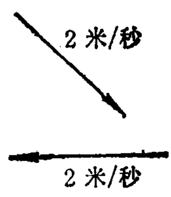


图 1·2

动，既要考虑它的大小①，又要考虑它的方向.

如图 1·2，春天里的一天，刮 2 米/秒的东风（从东刮来的风）；冬天里的一天，刮 2 米/秒的西北风（从西北刮来的风）. 用示意图表示，如图 1.2 所示. 这两个速度的大小虽然相同，都是 2 米/秒，但是方向不同，一是从东向西，一是从西北向东南，所以是不同的速度. 这就是说，一个速度，既要考虑它的大小，又要考虑它的方向.

现实世界中，像这样既有大小又有方向的量是很多的. 再举一些例子.

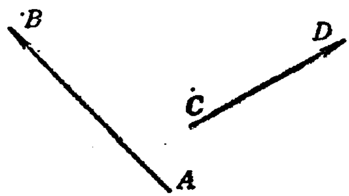


图 1·3

一条线段，指定它的一个端点作为起点，另一个端点作为终点，就是一个既有大小又有方向的量. 它的大小就是线段的长度，方向就是从起点到终点所指的方向. 如图 1·3 中的线段 AB，把 A 作为起点，B 作为终点，就是一个既有大小又有方向的量，它的大小是 3 厘米，方向就是从 A 到 B 的方向. 又如线段 CD，把 C 和 D 分别作为起点和终点，也是一个既有大小又有方向的量，它的大小是 2.3 厘米，方向就是从 C 到 D 的方向.

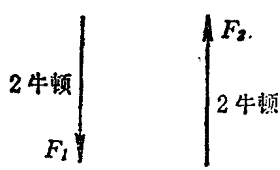


图 1·4

一个力 F_1，它的大小是 2 牛顿，方向向下；另一个力

① 本书所说的大小，都是指非负值，即绝对值.

F_2, 它的大小是 2 牛顿,方向向上(图 1·4). 对于力来说,不但它的大小很有关系, 而且它的方向也很有关系. 如图 1·4 中的 F_1 和 F_2,虽然同是 2 牛顿,但 F_1 向下, F_2 向上,方向不同,所以是两个不同的力①.

我们从这些量中抽出它们既有大小又有方向这一共同性质,而舍弃某种具体的量(如力、速度)的其他性质,就得到向量的概念.

我们把既有大小又有方向的量叫做**向量**(有的书上也叫**矢量**,矢是箭的意思).

两个向量,如果大小不同,方向不同,当然是不相等的向量;即使大小相同,但方向不同,或者方向相同,但大小不同,也都是不相等的向量;只有大小相同,方向也相同,才是相等的向量. 就是说,相等的向量,起点的位置在哪里是没有关系的. 例如,图 1·5 中的三个向量,大小相同,方向也相同,它们的起点虽然不同,也是相等的向量.

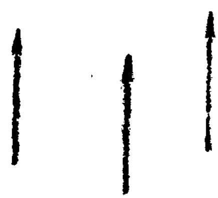


图 1·5

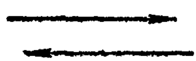


图 1·6

但要注意,两个向量,虽然互相平行或共线,如图 1·6 的两个向量,它们的指向不同,一向右,一向左,也不能算是方向相同. 这本小册子里所说的方向相同,是指既要互相平行或共线,又要指向相同(有的书上把互相平行或共线就叫做方向相同,互相平行或共线而

① 力的作用点,同样十分重要.

且指向相同的叫做指向相同).

知道了什么是向量,那么怎样表示一个向量呢?各本书上有一些不同的表示方法.有的用一个黑体字母来表示一个向量,如 $\boldsymbol{a}$,有的在黑体字母上面还添加一个箭头,如 $\vec{\boldsymbol{a}}$,有的不用黑体,而用普通字母上面添加一个箭头,如 $\vec{f}$,有的先写表示起点的字母,后写表示终点的字母,上面添加一个箭头,如 $\overrightarrow{AB}$,来表示向量(图 1·7).

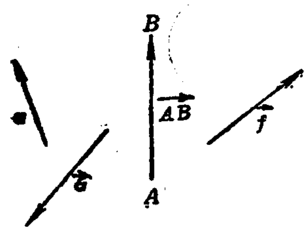


图 1·7

这本小册子采用一个黑体字母来表示向量,或用两个大写字母上面添加箭头的方法来表示向量,如 $\overrightarrow{AB}$.

用图来表示时,一般就画一条带箭头的线段来表示一个向量.这条线段的长度表示这个向量的大小,箭头所指的方向就是这个向量的方向.例如图 1·1 中,我们用带箭头的线段表示移动,每厘米长的线段表示 100 米的移动;图 1·2 中,用带箭头的线段表示速度,每厘米长的线段表示 1 米/秒的速度;图 1·4 中,用带箭头的线段表示力,每厘米长的线段表示 1 牛顿的力.箭头所指的方向就是它所表示的向量的方向.像这样,我们就可用一条带箭头的线段来表示一般的向量.

一个向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小(不管它的方向)记作 $|\boldsymbol{a}|$.例如,以牛顿为单位,图 1·4 中的两个向量,有 $|\boldsymbol{F}_1|=2$,又有 $|\boldsymbol{F}_2|=2$.

只用一个实数(正数、零、负数)就可明确表示的量，如时间、温度、功、等等，叫做数量(有的书上也叫纯量，标量)。

练 习 题 一

1. 温度有零上温度和零下温度，温度是不是一个向量？为什么？
2. 各画一条线段，分别表示一个向西南的 4 公里/小时的速度和一个向东南的 3 公里/小时的速度，用 1 厘米长的线段表示 1 公里/小时的速度.
3. 各画一条线段，分别表示一个向上的 18 牛顿的力和一个向下的 28 牛顿的力，用 1 厘米长的线段表示 10 牛顿的力.
4. 相等的向量，如果有相同的起点，那么它们的终点是不是相同？
5. 不等的向量，如果有相同的起点，那么它们的终点是不是相同？
6. (1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点是什么？终点是什么？向量 $\overrightarrow{BA}$ 的起点是什么？终点是什么？

   (2) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小怎样表示？向量 $\overrightarrow{BA}$ 的大小怎样表示？这两个向量大小是不是相等？

2. 向 量 的 加 法

我们先看一些实际例子.

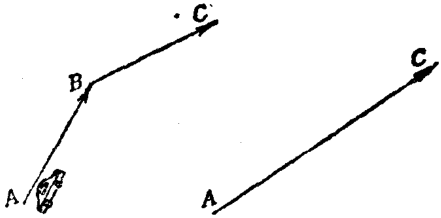


图 1.8

一辆汽车从 A 到 B, 再从 B 到 C, 结果就是从 A 到 C (图 1.8).

一块平板在桌上以 3 厘米/秒的速度向东移动 (图 1.9 中的 $\boldsymbol{a}$), 一只蚂蚁在板上以 3 厘米/秒的速度向南移动(图 1.9 中的 $\boldsymbol{b}$), 结果 1 秒钟后蚂蚁的位置对于桌面来说, 在原来的东南 $3\sqrt{2}$ 厘米处(图 1.9 中的 $\boldsymbol{c}$). 这说明一个向东 3 厘米/秒的速度与一个向南 3 厘米/秒的速度合起来跟一个向东南 $3\sqrt{2}$ 厘米/秒的速度是等效的, 即后者是前两个速度的合速度.

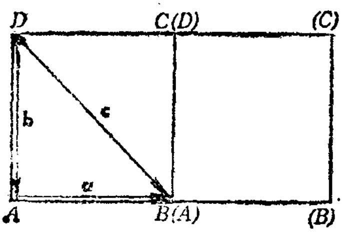


图 1.9

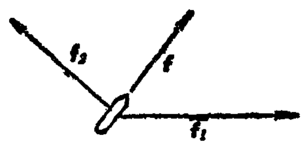


图 1.10

湖面上一个力 $\boldsymbol{f}_1$ 和一个力 $\boldsymbol{f}_2$ 同时拉一条船(图 1.10), 结果就等于一个力 $\boldsymbol{f}$ 在拉这条船.

上面的一些实例，说明了向量的一种运算——向量的加法.

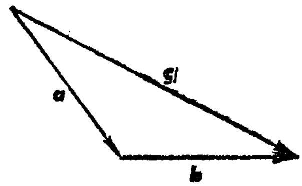


图 1·11

向量的加法是这样进行的. 要把两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相加，可以先画向量 $\boldsymbol{a}$，再以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为起点，接画向量 $\boldsymbol{b}$，那么从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$，就是向量 $\boldsymbol{a}$ 加上向量 $\boldsymbol{b}$ 所得的结果(图 1·11). 这就是说，$\boldsymbol{a}$ 加 $\boldsymbol{b}$ 的和是 $\boldsymbol{c}$，记作

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}.$$

可以看到，图 1·8 中的向量 $\overrightarrow{AO}$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 加上向量 $\overrightarrow{BO}$ 所得的和，图 1·9 中的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{b}$ 加上向量 $\boldsymbol{a}$ 的和.

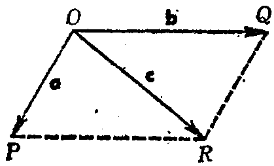


图 1·12

在两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不是互相平行或共线的时候，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法还可以像下面这样来进行. 以同一个点(如图 1·12 中的 O)为起点画向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{b}$. 以 OP、OQ 为两条邻边画平行四边形 $OPRQ$，那么从 O 出发的对角线 OR 所表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的和.

在图 1·12 的平行四边形 $OPRQ$ 中，$PR \perp\!\!\!= OQ$，所以 $\overrightarrow{PR}=\boldsymbol{b}$. 因此，这里的向量 $\overrightarrow{OR}$ 也就是在画出向量 $\boldsymbol{a}$ 以后，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点 P 为起点接画向量 $\overrightarrow{PR}=\boldsymbol{b}$，从 $\boldsymbol{a}$ 的起点 O 到接画的 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量.

这就是说，这里所说的向量加法的法则与前面所说的

向量加法的法则是一样的．这里所说的向量加法的法则叫做向量加法的平行四边形法则；前面所说的向量加法的法则叫做向量加法的三角形法则．图 1·10 中的 $\boldsymbol{f}$ 就是按向量加法的平行四边形法则进行的向量 $\boldsymbol{f}_1$ 加上向量 $\boldsymbol{f}_2$ 所得的和．

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相平行或共线时，$\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也和它们平行或共线．它的指向和大小可从图 1·13 中看出．

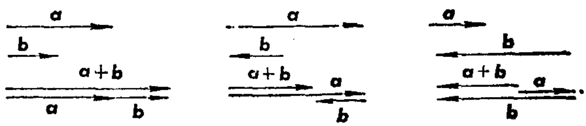


图 1·13

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直时（图 1·14），$\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{c}$ 的大小可以通过勾股定理求得，即由

$$OR=\sqrt{OP^2+OQ^2},$$

可得

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2}.$$

$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 所成的角 $\angle ROP$ 可以通过

$$\cos ROP=\frac{OP}{OR}=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{c}|}$$

或

$$\sin ROP=\frac{OQ}{OR}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{c}|}$$

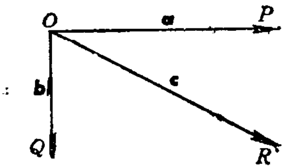


图 1·14

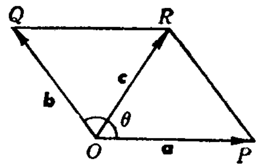


图 1·15

求得.

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 斜交，所成的角为 θ 时(图 1·15)，$\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{c}$ 的大小和方向可以通过解斜三角形求得.

因为在 $\triangle OPR$ 中，$PR \perp\!\!\!\!= OQ$，$\angle OPR = 180^\circ - \angle POQ = 180^\circ - \theta$，所以根据余弦定理，

$$\begin{aligned} OR &= \sqrt{OP^2 + PR^2 - 2 \cdot OP \cdot PR \cdot \cos OPR} \\ &= \sqrt{OP^2 + OQ^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos(180^\circ - \theta)} \\ &= \sqrt{OP^2 + OQ^2 + 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos\theta}. \end{aligned}$$

(因为 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$.）由此可得 $\boldsymbol{c}$ 的大小是

$$|\boldsymbol{c}| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\theta}.$$

又根据正弦定理，

$$\begin{aligned} \sin POR &= \frac{PR \sin OPR}{OR} \\ &= \frac{OQ \sin(180^\circ - \theta)}{OR} \\ &= \frac{OQ \sin\theta}{OR}. \end{aligned}$$

(因为 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$.）即

$$\sin POR = \frac{|\boldsymbol{b}| \sin\theta}{|\boldsymbol{c}|}.$$

或根据余弦定理，

$$\cos POR=\frac{OP^2+OR^2-PR^2}{2\cdot OP\cdot OR}=\frac{OP^2+OR^2-OQ^2}{2\cdot OP\cdot OR}.$$

即 $$\cos POR=\frac{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}{2\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|}.$$

由此可以求得 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 所成的角 POR，从而确定 $\boldsymbol{c}$ 的方向.

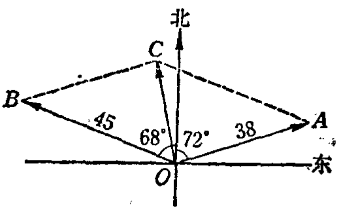


图 1·16

例 一个 38 牛顿的力 $\overrightarrow{OA}$，方向是北 72° 东，又一个 45 牛顿的力 $\overrightarrow{OB}$，方向是北 68° 西. 求它们的合力的大小和方向 (图 1·16).

解 设它们的合力是 $\overrightarrow{OC}$.

$$\angle AOB=72^\circ+68^\circ=140^\circ.$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{OC}|=\sqrt{38^2+45^2+2\times38\times45\times\cos140^\circ}$$
$$=29.14.$$

$$\cos AOC=\frac{38^2+29.14^2-45^2}{2\times38\times29.14}=0.1211,$$

$$\therefore\quad \angle AOC=83^\circ3'.$$

$$83^\circ3'-72^\circ=11^\circ3'.$$

答：合力的大小是 29.14 牛顿，方向是北 11°3′ 西.

从上面所说可以看到，向量的加法和数的加法有很大的不同. 向量的加法不但要考虑到向量的大小，而且要考虑到向量的方向.

向量的加法和数的加法有相同之处，即同样适合加法

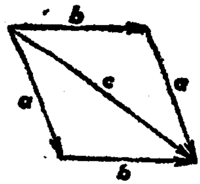


图 1·17

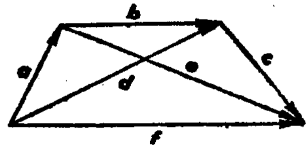


图 1·18

运算律. 就是说, 向量的加法也适合下列运算律.

（i）加法交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

（ii）加法结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

加法交换律的正确性可以从图 1·17 看出. 无论是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 还是 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$, 都得到同样的结果 $\boldsymbol{c}$.

加法结合律的正确性可以从图 1·18 看出. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的结果是 $\boldsymbol{d}$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ 就是 $\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}$. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的结果是 $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}$. 无论是 $\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}$ 还是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}$, 结果都是 $\boldsymbol{f}$. 这就说明了 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

要注意, 并不是任何数的加法适合交换律和结合律的. 对于每一种新的数学对象, 它的加法是不是适合交换律和结合律, 都要经过一番新的考察. 考察的结果, 这种新的数学对象, 可能被证明是适合加法交换律和结合律的, 也可能并不适合. 事实上, 对于向量来说, 虽然向量的加法适合交换律和结合律, 但在这本小册子的后面可以看到, 向量有一种乘法, 并不适合结合律; 另有向量的一种乘法, 既不适合交换律, 也不适合结合律.

向量的加法既然适合交换律和结合律, 那么多个向量