



天骄之路中学系列

读 想 用

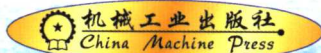
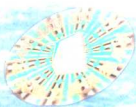
高一数学 (下)

让我们做你学海中的帆

助你乘风破浪.....

驶进大学的港湾

主编 管兴明 于其刚 (特级教师)
审定 全国中学课程改革研究组



天骄之路中学系列

读 想 用

高一数学 下

管兴明 于其刚 主编

全国中学课程改革研究组 审定



机械工业出版社

读想用丛书

编委会名单

主 编:杨学维

副主编:吴海章 刘从光 刘新平 王艳秋

编 委:(按姓氏笔画排列)

丁桂珍	于其刚	王艳秋	田 伟	刘新平	刘从光	李景收	李玉屏
许贵忠	许彩霞	辛万祥	张德友	张春芳	张晓慧	吴海章	陈 丽
陈汝祥	汪晓波	范建军	金凤鸣	周晓萍	郭正泉	贺晓军	姬维多
高自强	黄永丰	梁庆海	曾惠敏	曾 萍	管兴明	靳建设	裴光宇

“天骄之路”已在国家商标局注册(注册号:1600115),任何仿冒或盗用均属非法。

因编写质量优秀,读者好评如潮,“天骄之路”已独家获得国内最大的门户网站——新浪网(www.sina.com)在其教育频道中以电子版形式刊载,并与《中国教育报》、中国教育电视台合作开办教育、招生考试栏目。

本书封面均贴有“天骄之路系列用书”椭圆形激光防伪标志(带转动光栅),凡无上述特征者为非法出版物。盗版书因错漏百出、印制粗糙,对读者会造成身心侵害和知识上的误解,希望广大读者不要购买。盗版举报电话:(010)82608886。

欢迎访问全国最大的中高考专业网站:“天骄网”(<http://www.tjzl.com>),以获取更多信息支持。

版权所有 翻印必究

图书在版编目(CIP)数据

读想用 高一数学(下)/管兴明,于其刚主编 —4版 —北京:机械工业出版社,2005.11
(天骄之路中学系列)
ISBN 7-111-01489-8

I. 读… II. ①管…②于… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第124107号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑:王春雨 版式设计:沈玉莲

封面设计:李文广 责任印制:何全君

北京振兴源印务有限公司印刷厂印刷

2005年11月第4版·第1次印刷

880mm×1230mm 1/32·11.375印张·434千字

定价:13.80元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010)82608889,68326294

封面无防伪标均为盗版

编写说明

目前,我国基础教育事业正经历着一次深刻的变革。一方面《新课程标准》的实施范围正在逐步扩大,另一方面高考各省(市)的单独命题工作也正如火如荼地展开。这种教材改革和考试改革带动了课堂教学改革。这个变革的核心,对于教师来说,就是改变角色定位;对于学生来说,就是变革学习方式。本着这一精神,经各家名师的苦心构思和精心编写,各位编辑的层层推敲和点点把关,一套与中学最新修订版教材同步配套并经全国部分著名重点中学师生试用成功的新型教学辅导丛书与全国广大中学生和教师见面了。

读、想、用(Reading, thinking & using)是当今国际教育领域的最新科研成果,现已受到国内教研名家的高度重视,必然会带来中学教学方法的大革命。“读”即让学生变苦读为巧读,融会贯通课本知识;“想”即让学生对所学知识进行规律性的把握和思想能力的培养;“用”即让学生在现行考试制度下具备用综合能力素质应考的本领。教学质量的高低不完全取决于教师、教材、教学法。上述三方面只是提高教学质量的外因,而学生的求知欲望、能动性则是内因。现在,很多学生学得十分被动。他们的学习方法简单、落后,并有相当程度的个体性和盲目性。比如说,课前预习是个重要的步骤,它直接影响45分钟的教学质量。可是目前由于学生的独立自学能力差,他们把课前预习只理解为教材的通读,至于诸如教材向学生传递了什么重要知识点?教材中的重点难点如何把握?这些重点难点如何才能有效突破?如何才能运用已有的知识点形成独特的解题技巧与思路等等问题,则很少思考。学生既然在课前没有充分思考,上课自然十分被动,必然出现课上被教师牵着鼻子走和“满堂灌”的现象,而学生却失去了宝贵的参与和讨论的机会。“读想用”正是从学的角度出发为学生提供思考、实践的机会,并帮助学生培养良好的学习方法、收集处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力 and 语言文字表达能力。

因此,“读想用”丛书的编写思路与众不同,它博采众长,匠心独运,注重实效,融入了近几年高中教学科研的最新成果和高考的最新特点,遵循教、学、练、考的整体原则,各科以节为点,以章为面,以点带面进行透彻详细的解说及训练。

具体来说,高一数学(下)的“章”栏目有:

【**课前自我构建**】:对本章的知识体系、内容背景、能力要求及学习目标进行提炼以供读者在课前进行预习之用,使读者在上课时能做到心中有数,有的放矢。

【**本章知识整合**】:对本章的知识点、能力点按课程进度进行梳理、总结,使读者对所学知识能融会贯通。

【**单元专题归纳**】:对本章的知识点、能力点以专题形式进行归纳、提炼,有利于读者对所学知识进行系统复习。

【**注意问题总结**】:对本章的一些重要问题单列出来进行精辟讲解并给予解题提示,锻炼读者举一反三的能力。

【**规律方法指津**】:对本章涉及的解题规律及方法加以阐释,有利于提高读者在应试过程中的应变能力。

【**高考命题探究**】:将高考中有关本章的考点及历年真题进行了详尽的总结说明,使读者在同步学习过程中对高考的命题趋势及规律有前瞻性的认识。

〔单元综合测试〕:模拟“实战”演练,提高对学科知识点、知识体系、规律性的整体掌握水平以及灵活运用知识的学科能力。

〔奥赛趣味练习〕:给自学能力较强、学习成绩较好的高才生和尖子生在平时接触各类竞赛、奥赛试题的机会,所占篇幅不大。

〔课外兴趣阅读〕:为推进素质教育,培养学生对本学科的学习兴趣,本栏目的设立给学生们提供了一个广阔的课外阅读思考空间。

〔创新研究学习〕:以学生的探索性学习为基础,从生活中选择和确定研究专题,通过亲身实践获取直接经验,从而培养学生的创新能力和解决实际问题的能力。

本书的“节”栏目有:

〔要点详析〕:对本节应掌握的基础及重要知识点、考试要求与学习方法进行提炼和延展。

〔典例剖析〕:通过对本节典型例题的精析,将该题所涉及的知识体系和能力体系加以言简意赅的点评。

〔误点批答〕:将读者在本节学习、应试中容易犯错的题型进行归纳、总结,并由名师予以批注。

〔创新应用〕:近年来各科试题中的创新题和实际应用题不断增多,本栏目着力培养学生的创新精神和创新能力,将理论贴近生活、应用于生活,时代气息较浓。

〔高考链接〕:将涉及本节知识点的历年高考题及各地著名模拟试题进行总结、例析,培养学生的高考意识和应试能力。

〔强化评估〕:通过选编适量的习题,使学生对本节所学的知识点进行融会贯通并有所巩固和提高,分A、B两卷,A卷为基础跟踪自测,B卷为综合创新演练。

另外,本书还特设了〔期中综合测试〕、〔期末综合测试〕等栏目,供学生自学自测及教师评估教学效果时参考。

这套丛书是由多年工作在教学第一线的全国著名重点中学的特、高级教师编写的。他们不但精熟自己所执教的学科内容,善于精析教材中的重点和难点,而且对高考有深入的研究。

虽然我们在成书过程中,本着近乎苛刻的态度,题题推敲,层层把关,力求能够帮助读者更好地把握本书的脉络和精华,但书中也难免有疏忽和纰漏之处。读者对本书如有意见、建议,请来信寄至:(100080)北京市海淀区苏州街18号长远天地大厦B座15层 天骄之路丛书编委会收,电话:(010)82608889,或点击“天骄网”(http://www.tjzl.com),在留言板上留言,也可发电子邮件,以便我们在再版修订时参考。

编者

2005年11月于北京大学燕园

目 录

第 四 章

三角函数

课前自我构建 (1)

4.1 角的概念的推广 (2)

4.2 弧度制 (11)

4.3 任意角的三角函数 ... (22)

4.4 同角三角函数的基本关系式 (37)

4.5 正弦、余弦的诱导公式..... (49)

4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切 (62)

4.7 二倍角的正弦、余弦、正切 (74)

4.8 正弦函数、余弦函数的图像和性质 (89)

4.9 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像 (113)

4.10 正切函数的图像和性质 (130)

4.11 已知三角函数值求角 (144)

本章知识整合 (159)

单元专题归纳 (160)

注意问题总结 (166)

规律方法指津 (166)

高考命题探究 (169)

单元综合测试 (171)

奥赛趣味练习 (173)

课外兴趣阅读 (173)

创新研究学习 (175)

第 五 章

平面向量

课前自我构建 (176)

5.1 向量 (178)

5.2 向量的加法与减法..... (186)

5.3 实数与向量的积 (192)

5.4 平面向量的坐标运算 (200)

5.5 线段的定比分点 (206)

5.6 平面向量的数量积及运算律 (215)

5.7 平面向量数量积的坐标表示 (223)

5.8 平移 (231)

5.9 正弦定理、余弦定理 (238)

5.10 解斜三角形应用举例	高考命题探究	(268)
..... (249)	单元综合测试	(269)
实习作业 解三角形	奥赛趣味练习	(272)
在测量中的应用 ... (249)	课外兴趣阅读	(272)
研究性学习课题:向量	创新研究学习	(273)
在物理中的应用 ... (257)	期中测试题	(274)
本章知识整合	期末测试题	(277)
单元专题归纳	参考答案提示	(280)
注意问题总结		
规律方法指津		

注:每节均包含〔要点详析〕、〔典例剖析〕、〔误点批答〕、〔创新应用〕、〔高考链接〕、〔强化评估〕六个板块.

第 四 章

三角函数

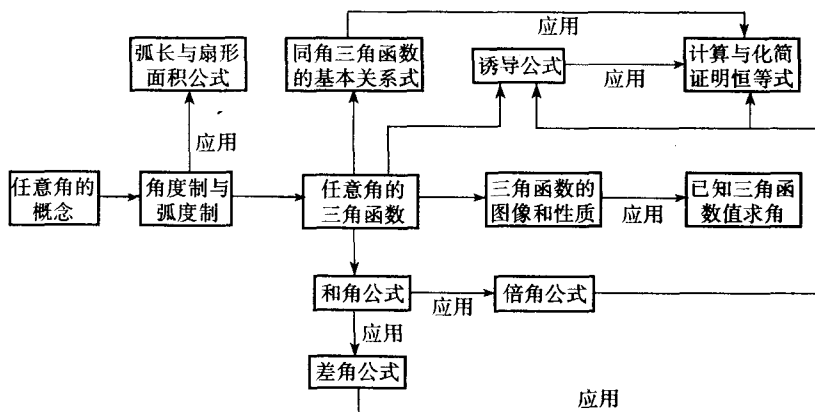


课前自我构建

一、本章纵览

本章的主要内容是任意角的概念、弧度制、任意角的三角函数的概念,同角三角函数间的关系、诱导公式、两角和与差的三角函数、二倍角的三角函数、三角函数的图像和性质及已知三角函数值求角度.

二、知识图解



三、能力要求

1. 理解任意角的概念、弧度的意义,能正确进行弧度与角度的换算.
2. 掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义,了解余切、正割、余割的定义,掌握同角三角函数的基本关系式,掌握正弦、余弦的诱导公式,理解周期函数与最小正周期的意义.
3. 掌握两角和与两角差的正弦、余弦、正切公式,掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式.
4. 能正确运用三角公式进行简单三角函数式的化简、求值和恒等式证明.

5. 了解正弦函数、余弦函数、正切函数的图像与性质,会用“五点法”画正弦函数、余弦函数和函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的简图,理解 A, ω, φ 的物理意义.

6. 会由已知三角函数值求角,并会用符号 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ 表示.



4.1 角的概念的推广



要点详析

一、学法指导

1. 学习脉络

角的定义 $\rightarrow$ 正角、负角、零角 $\rightarrow$ 象限角 $\rightarrow$ 轴线角 $\rightarrow$

终边相同角的统一表示法

2. 方法指导

本节内容把过去学习的不大于周角的非负角扩充到了任意角. 理解定义的关键是“抓旋转”,依旋转方向不同,划分正角和负角,逆时针旋转超过一周则形成大于 360° 的角,无限旋转,则可形成无限大的正角. 反之,顺时针无限旋转可形成绝对值无限大的负角. 不做旋转定义为零角.

建立适当坐标系,使角顶点重合于原点,始边重合于 x 轴非负半轴,终边旋转落在第几象限称为第几象限角,落在坐标轴上称为“轴线角”,进而理解终边相同的角是旋转相差若干周的角. 即它们角度值相差 360° 的整数倍,从而所有与 α 终边相同的角的集合可表示为: $\{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$. 注意通过数形结合来认识角的终边和终边相同角的集合是学好本节内容的关键.

二、重点聚焦

1. 角的概念即正角、负角、零角的概念. 在这些概念中要注意旋转的方向.
2. 象限角的概念. 这个概念的前提是这个角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴非负半轴重合. 在这个前提下,才能由终边所在象限来判定某角为第几象限角. 在上述前提下,如果某角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任一象限.
3. 终边相同角的统一记法. 与角 α 终边相同的角的一般形式为 $\alpha + k \cdot 360^\circ$. 要注意: (1) $k \in \mathbb{Z}$; (2) α 是任意角; (3) 终边相同的角不一定相等,但相等的角的终边一定相同. 终边相同的角有无限多个,它们相差 360° 的整数倍.



典例剖析

题型1 角的概念

例1 把 1230° 、 -3290° 写成 $k \cdot 360^\circ + \alpha$ (其中 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$) 的形式.

精析与解答 用所给角除以 360° , 将余数作 α .

$$\therefore 1230 \div 360 = 3 \text{ 余 } 150,$$

$$\therefore 1230^\circ = 3 \times 360^\circ + 150^\circ.$$

$$\therefore -3290 \div 360 = -10 \text{ 余 } 310,$$

$$\therefore -3290^\circ = -10 \times 360^\circ + 310^\circ.$$

说明:负角除以 360° , 为保证余数为正角, 试商时应使得到的负角的绝对值大于已知负角的绝对值.

例 2 $A = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}, B = \{\text{第一象限的角}\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

A. $\{\text{锐角}\}$

B. $\{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$

C. $\{\text{第一象限的角}\}$

D. 以上都不对

精析 小于 90° 的角由锐角、零角、负角组成, 而第一象限角包含有锐角及其他终边在第一象限的角, 所以 $A \cap B$ 是由锐角和终边在第一象限的负角组成; 故上述 A、B、C 都不对.

答案 D

说明:小于 90° 的角不都是锐角, 它还包含有零角、负角, 只有小于 90° 的正角才是锐角, 要注意从现在开始角已经推广到了零角和负角.

例 3 若 $90^\circ < \beta < \alpha < 135^\circ$, 则 $\alpha - \beta$ 的范围是_____, $\alpha + \beta$ 的范围是_____.

精析 $90^\circ < \beta < \alpha < 135^\circ$

则有 $90^\circ < \alpha < 135^\circ$

$90^\circ < \beta < 135^\circ$

$0^\circ < \alpha - \beta$

$-135^\circ < -\beta < -90^\circ$

由①、④、③得 $0^\circ < \alpha - \beta < 45^\circ$

由①、②得 $180^\circ < \alpha + \beta < 270^\circ$

答案 $0^\circ < \alpha - \beta < 45^\circ$ $180^\circ < \alpha + \beta < 270^\circ$

说明:在给定角的范围的条件下, 求两角和、差, 可利用不等式性质, 在正角、零角、负角范围内进行求解.

题型 2 象限角和终边相同角

例 1 已知角 α, β 的终边相同, 那么 $\alpha - \beta$ 的终边在()

A. x 轴的非负半轴上

B. y 轴的非负半轴上

C. x 轴的非正半轴上

D. y 轴的非正半轴上

精析 将角 α, β 按终边相同角公式写出, 然后作差 $\alpha - \beta$, 对其进行研究即可作出判断.

$\therefore$ 角 α, β 终边相同

$$\therefore \alpha = k \cdot 360^\circ + \beta, k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{作差 } \alpha - \beta = k \cdot 360^\circ + \beta - \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$$

$\therefore \alpha - \beta$ 的终边在 x 轴的非负半轴上.

答案 A

例 2 终边与坐标轴重合的角 α 的集合是()

A. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

精析 终边为 x 轴的角的集合 $M = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

终边为 y 轴的角的集合 $P = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

终边为坐标轴的角的集合 S

$$S = M \cup P = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{\alpha | \alpha = 2k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = (2k+1) \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{\alpha | \alpha = n \cdot 90^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$$

答案 C

说明: 终边为 x 轴的角的集合、终边为 y 轴的角的集合及终边为坐标轴的角的集合要熟悉.

例 3 求终边为直线 $y = -x$ 的角的集合.

精析与解答 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内满足条件的角为 135° 和 315°

$\therefore$ 终边为直线 $y = -x$ 的角的集合是

$$\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 135^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 315^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{\alpha | \alpha = 2k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ + 135^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$$

说明: (1) 利用相同的方法, 可以求出终边为 $y = x$ 的角的集合, 即:

$$\{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ + 45^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$$

(2) 由本例和(1), 可得出终边为 $y = \pm x$ 的角的集合, 即:

$$\{\alpha | \alpha = n \cdot 90^\circ + 45^\circ, n \in \mathbf{Z}\}$$

题型 3 已知角 α 所在象限, 求 2α 、 $\frac{\alpha}{2}$ 、 $\frac{\alpha}{3}$ 所在象限

例 1 已知角 α 是第二象限角, 求角 2α 是第几象限角.

精析与解答 $\because \alpha$ 为第二象限角

$$\therefore k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$$

$$\therefore 2k \cdot 360^\circ + 180^\circ < 2\alpha < 2k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$$

$\therefore 2\alpha$ 是第三或第四象限角或终边落在 y 轴的非正半轴上的角

例 2 已知 α 是第二象限角, 求 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角, 并画出图形.

精析与解答 $\because \alpha$ 为第二象限角

$$\therefore k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$$

$$\therefore k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}$$

当 k 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角, 当 k 为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角

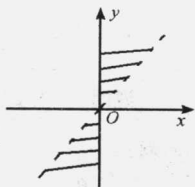


图 4-1

限角

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角, 画出图形如图 4-1 所示.

说明: (1) 有的同学处理本问题时, 由 α 是第二象限角, 仅想到 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 从而得到 $45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, 仅得到 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角, 而将 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角的可能性丢掉, 此种错误以后一定要避免. (2) 要熟悉下列事实, 这对我们解答有关问题大有好处

当 α 为第一象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、第三象限角的前半区域.

当 α 为第二象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、第三象限角的后半区域.

当 α 为第三象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第二、第四象限角的前半区域.

当 α 为第四象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 为第二、第四象限角的后半区域.

例 3 若 α 是第一象限角, 求 $\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角.

精析与解答 $\because \alpha$ 是第一象限角, $\therefore k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}$

$$\therefore \frac{k}{3} \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{3} < \frac{k}{3} \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \in \mathbf{Z}$$

$$(1) \text{ 当 } k=3n \text{ 时, 则有 } n \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 30^\circ, n \in \mathbf{Z}$$

$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角

$$(2) \text{ 当 } k=3n+1 \text{ 时, } n \cdot 360^\circ + 120^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 150^\circ, n \in \mathbf{Z}$$

$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 为第二象限角

$$(3) \text{ 当 } k=3n+2 \text{ 时, } n \cdot 360^\circ + 240^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 270^\circ, n \in \mathbf{Z}$$

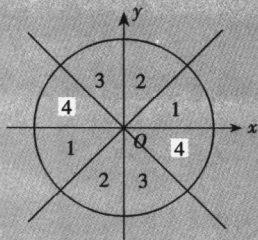
$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 为第三象限角

综上所述,知 $\frac{\alpha}{3}$ 为第一或第二或第三象限角.

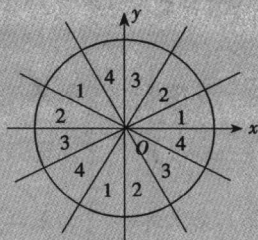
说明:由例 2、例 3 可以得出,已知 θ 为某象限的角,如何确定 $\frac{\theta}{n}$ 所在的象限的问题:

(1) $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限问题:

作出各个象限的角平分线,它们与坐标轴把周角等分成 8 个区域,从 x 轴的非负半轴起,按逆时针方向把这 8 个区域依次循环标上号码 1、2、3、4,则标号是几的两个区域,就是 θ 为第几象限的角时, $\frac{\theta}{2}$ 终边所落的区域, $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限就可以直观地看出,如图 4-2 甲所示.



甲



乙

图 4-2

(2) $\frac{\theta}{3}$ 所在象限的问题:

作出三等分各个象限的从原点出发的射线,它们与坐标轴把周角等分成 12 个区域,从 x 轴的非负半轴起,按逆时针方向把这 12 个区域依次循环标上号码 1、2、3、4. 则标号是几的区域,就是 θ 为第几象限角时, $\frac{\theta}{3}$ 终边所落的区域, $\frac{\theta}{3}$ 所在的象限就可直观地看出,如图 4-2 乙所示.

(3) $\frac{\theta}{n}$ 所在象限的问题:

一般地,要确定 $\frac{\theta}{n}$ 所在的象限,可以作出 n 等分各个象限从原点出发的射线,它们与坐标轴把周角等分成 $4n$ 个区域,从 x 轴的非负半轴起,按逆时针方向把这 $4n$ 个区域依次循环标上号码 1、2、3、4,则标号是几的区域,就是 θ 为第几象限的角时, $\frac{\theta}{n}$ 终边所落的区域, $\frac{\theta}{n}$ 所在的象限就可直观地看出.

误点批答

例题 下列说法中,正确的是()

- A. 第一象限的角是锐角
- B. 锐角是第一象限的角
- C. 小于 90° 的角是锐角
- D. $0^\circ \sim 90^\circ$ 的角是锐角

错解 A、C 或 D

错解分析 错选 A、C 或 D 的主要原因是没有区分开“ $0^\circ \sim 90^\circ$ ”、“第一象限角”、“锐角”和“小于 90° 的角”. 若设此四种角的集合依次为 A、B、C、D, 则 $A = \{\theta | 0^\circ \leq \theta < 90^\circ\}$; $B = \{\theta | k \cdot 360^\circ < \theta < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$; $C = \{\theta | 0^\circ < \theta < 90^\circ\}$; $D = \{\theta | \theta < 90^\circ\}$, 其中只是 $C \subsetneq A$, $C \subsetneq B$, 但 $D \not\subset B$.

正解 B

创新应用

例 1 请将图 4-3 中终边落在阴影部分的角的集合表示出来.(包括边界)

精析与解答 若终边落在 OB 边上的角表示为: $k \cdot 360^\circ + 225^\circ (k \in \mathbb{Z})$, 则终边落在 OA 上的角必须表示为: $k \cdot 360^\circ + 495^\circ (k \in \mathbb{Z})$, 所以终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合可表示为: $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 225^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 495^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

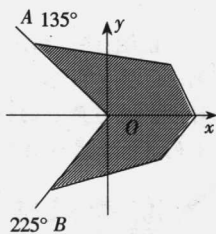


图 4-3

说明: 这种类型题目容易出现的错误是将结果写成 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 135^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 225^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 事实上, 虽然 $k \cdot 360^\circ + 135^\circ$ 也表示终边落在 OA 位置的角, $k \cdot 360^\circ + 225^\circ, k \in \mathbb{Z}$ 表示终边落在 OB 位置的角, 但阴影部分是由 OB 逆时针转到 OA 形成的, 所以应在 OB 位置的角的表达式上增加 270° 后作为 OA 位置的角才行.

例 2 将钟表上的时针作为角的始边, 分针作为终边, 那么当钟表上显示 8 点 5 分时, 时针与分针构成的角度是_____.

精析 应从任意角的概念出发, 研究时针与分针所构成的角. 其中有正角、负角, 共有无穷多个角.

要求这无穷多个角, 根据图 4-4 可先求出负角中绝对值最小的角.

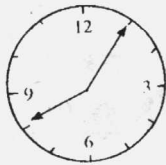


图 4-4

$$\text{应为 } -\left(4 + \frac{11}{12}\right) \cdot 30^\circ = -147.5^\circ$$

∴ 所有负角可表示为 $-k \cdot 360^\circ - 147.5^\circ (k \in \mathbf{N})$

在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 内最小正角为 $360^\circ - 147.5^\circ = 212.5^\circ$

∴ 所有正角可表示为 $k \cdot 360^\circ + 212.5^\circ (k \in \mathbf{N})$

综上, 所有角可表示为 $k \cdot 360^\circ + 212.5^\circ (k \in \mathbf{Z})$

答案 $k \cdot 360^\circ + 212.5^\circ, k \in \mathbf{Z}$

例 3 今天是星期一

(1) $7k (k \in \mathbf{Z})$ 天后的那一天是星期几? $7k (k \in \mathbf{Z})$ 天前的那一天是星期几?

(2) 158 天后的那一天是星期几?

精析与解答 从星期一、星期二、一直到星期日每星期 7 天, 呈现周期性变化, 每 7 天都要重复出现.

(1) ∵ 今天是星期一

∴ $7k (k \in \mathbf{Z})$ 天后的那一天仍是星期一

$7k (k \in \mathbf{Z})$ 天前的那一天仍是星期一

(2) ∵ $158 = 7 \times 22 + 4$, 又 ∵ 今天是星期一

∴ 158 天后的那一天是星期五

说明: 终边相同的角的集合是 $S = \{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$, 此公式隐含了周期这一数学内容, 每当角度增加 360° 或减少 360° 时, 角的终边相应按逆时针或顺时针方向就与角 α 的终边重合一次, 当 k 取一切整数时, 就一遍一遍地循环地变化着, 本例题也正是这样的问题.

高考链接

例题 (2005 · 全国卷 III) 已知 α 为第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是()

A. 第一或第二象限

B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限

D. 第二或第四象限

精析 ∵ α 为第三象限角, ∴ $k \times 360^\circ - 180^\circ < \alpha < k \times 360^\circ - 90^\circ (k \in \mathbf{Z})$

∴ $k \times 180^\circ - 90^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \times 180^\circ - 45^\circ (k \in \mathbf{Z})$, ∴ $\frac{\alpha}{2}$ 在第二或第四象限

答案 D

强化评估

(答案 → 280)

A 卷 · 基础跟踪自测

一、选择题

1. 与 -463° 角终边相同的角为()

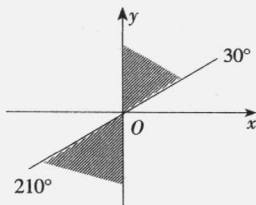
- A. $k \cdot 360^\circ + 463^\circ, k \in \mathbb{Z}$ B. $k \cdot 360^\circ + 103^\circ, k \in \mathbb{Z}$
 C. $k \cdot 360^\circ + 257^\circ, k \in \mathbb{Z}$ D. $k \cdot 360^\circ - 257^\circ, k \in \mathbb{Z}$
2. 若 α 是第一象限角, 则下面各角中第四象限的角是()
 A. $90^\circ - \alpha$ B. $90^\circ + \alpha$ C. $360^\circ - \alpha$ D. $180^\circ + \alpha$
3. 已知角 2α 的终边在 x 轴的上方, 那么 α 是()
 A. 第一象限角 B. 第一、二象限角
 C. 第一、三象限角 D. 第一、四象限角
4. 已知 α 是锐角, 那么 2α 是()
 A. 第一象限角 B. 第二象限角
 C. 第一或第二象限角 D. 小于 180° 的正角
5. 已知下列各角: (1) -135° ; (2) -239° ; (3) 181° ; (4) 500° . 其中在第二象限的角是()
 A. (1)(2) B. (2)(3) C. (2)(4) D. (1)(3)
6. 下列命题中, 正确的是()
 A. 第一象限的角必是锐角
 B. $\{\text{第一象限的角}\} \cap \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\} = \{\text{锐角}\}$
 C. 锐角在第一象限或第四象限
 D. 锐角必是第一象限的角
7. 下列命题中, 正确的是()
 A. 第二象限的角必是钝角 B. 钝角必在第二象限
 C. 第四象限的角必是负角 D. 负角必在第四象限

二、填空题

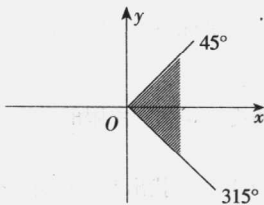
8. 与 $-18^\circ 30'$ 的角终边相同的最小正角是_____, 与 670° 的角终边相同的绝对值最小的角是_____.
9. 若角 α 与角 β 的终边在一条直线上, 则 α 与 β 的关系是_____.

三、解答题

10. 写出图 4-5 中阴影区域所表示的角的集合(包括边界).



甲



乙

图 4-5

11. 分别写出以下列射线(或直线)为终边的角的集合.

- (1) y 轴负半轴;
 (2) x 轴;
 (3) 第一象限角平分线.

12. 若 α 为第一象限角, 试判定 $-\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限.

B 卷 · 综合创新演练

一、选择题

1. 设 $-90^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$, 则 $\alpha - \beta$ 的取值范围是()
 A. $(-180^\circ, 180^\circ)$ B. $(-180^\circ, 0^\circ)$
 C. $(-90^\circ, 90^\circ)$ D. $(-90^\circ, 0^\circ)$
2. 在平面直角坐标系中, 若角 α 与 β 的终边互相垂直, 则 α, β 之间的关系是()
 A. $\beta = \alpha + 90^\circ$ B. $\beta = 90^\circ + \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
 C. $\beta = \alpha \pm 90^\circ$ D. $\beta = \alpha \pm 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
3. 若 α 为锐角, $-\alpha + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$ 所在的象限是()
 A. 第二象限 B. 第四象限 C. 第一、三象限 D. 第二、四象限
4. 下列各命题中正确的有()
 (1) 相等的角终边一定相同;
 (2) 终边相同的角一定相等;
 (3) 第二象限角一定大于第一象限任何一个角;
 (4) 若 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, 则 α 是第一或第二象限的角.
 A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个
5. 在直角坐标系中, 若角 α 与角 β 的终边互为反向延长线, 则角 α 与角 β 的关系是()
 A. $\alpha = -\beta$ B. $\alpha = -k \cdot 360^\circ + \beta (k \in \mathbb{Z})$
 C. $\alpha = 180^\circ + \beta$ D. $\alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ + \beta (k \in \mathbb{Z})$

二、填空题

6. 若角 $\alpha = -20^\circ + k \cdot 180^\circ$ 在 $-720^\circ \sim 360^\circ$ 间, 则整数 k 的取值是_____.
7. 若 β 的终边与 60° 角的终边相同, 在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内, 终边与 $\frac{\beta}{3}$ 角的终边相同的角为_____.
8. 若角 α 的终边是第二象限的角平分线, 则角 α 的集合是_____.

三、解答题

9. 在 0° 到 360° 之间找出与下列各角终边相同的角, 并判定它们是第几象限角.
 (1) -120° ; (2) 640° ; (3) $-950^\circ 12'$.
10. 时钟的分针所转的角是正角还是负角? 经过下列时间所转过的角各是多少度?
 (1) 12 分钟; (2) 2 小时 15 分.