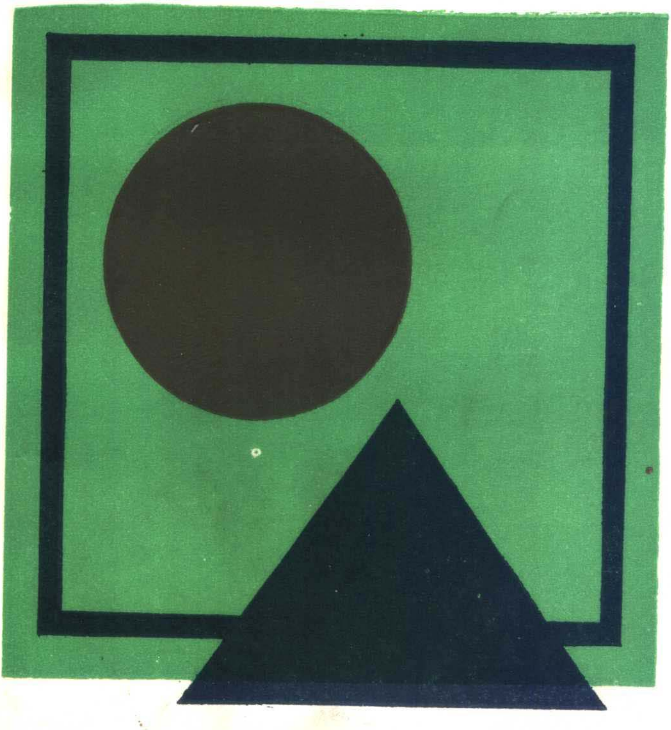
乔加瑞　任中文

教师学生总复习参考书

初中数学基础知识

北京日报出版社



教师学生总复习参考书

初中数学基础知识

乔家瑞　任中文

北京日报出版社

教师学生总复习参考书

初中数学基础知识

乔家瑞　任中文

*

北京日报出版社出版

（北京市东单西裱褙胡同34号）

北京市新华书店发行

北京纺织印刷厂排版　冶金印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　11.75印张　250千字

1987年2月第1版　1987年3月第2次印刷

印数：20,001—60,000

书号：7265·022　定价：1.90 元

内 容 提 要

本书是根据现行初中数学教学大纲的要求编写的。全书按知识系统共分十三章，每章包括基础知识、基本方法和练习题三部分。在基础知识部分，用简炼的语言或口诀及图表简列了基础知识；在基本方法部分，突出总结了定理或公式的应用或解决各种类型问题的常用方法；在练习题中配备了形式新颖的选择题。

本书可供初中师生平时学习或中考前总复习使用，同时也可以作为在职职工、自学青年学习初中数学的参考书。

前　言

为了指导初中学生系统地掌握初中数学的全部内容，我们根据全日制十年制初中数学教学大纲及统编教材编写了本书。全书按知识系统共分十三章，每章包括基础知识、基本方法和练习题三部分。在基础知识部分，我们力求以简炼的语言或图表，把基础知识进行系统整理，以使同学们能够加强对基础知识结构的理解，并便于巩固记忆；在基本方法部分，我们用典型的例题，突出总结本章的重要定义、定理和公式的应用，或解决某种类型问题的常用方法。并根据同学们的实际情况，提出有关的注意事项。通过这些归纳总结，以使同学们掌握解题规律，开阔解题思路，围绕重点知识深入进行复习；在练习题部分，分基本练习题和综合练习题两部分。在基本练习题中，我们配备了形式新颖的判断题和选择题，以便帮助同学们熟练地掌握基础知识，同时也可以使同学们逐步适应考试改革的形势。在综合练习题中，我们配备了一定数量有代表性的综合题，编选这些综合题时，我们参阅了历年各省市中考试题，因此题目的难度都控制在近几年各省市中考题的水平上。

本书可以在学习过程中使用，也可以在进行复习巩固时使用。本书还可以作为在职职工、自学青年学习初中数学时的参考书，及初中数学教师的教学参考书。

本书是由乔家瑞和任中文等老师编写的，限于我们的水

平，必有错误与不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1986年9月

目　录

第一章　实数

一、数的系统表

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{有限小数}\\\text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数—无限不循环小数}\end{cases}
$$

二、有理数

1 自然数

（1）质数(素数)大于1的整数，除了它本身和1以外，不能被其它正整数所整除的叫质数，最小的质数是2.

（2）合数　在自然数中，不但能被1和它本身整除，还能被其它正整数所整除的叫合数.

1.既不是质数，也不是合数.

2.整数

（1）奇数和偶数　不能被2整除的整数叫做奇数，能被2整除的整数叫做偶数. 奇数一般表示为$2n-1$，偶数一般表

示为$2n$，其中n为整数.

（2）整数整除性的几个特征

① 一个数的末位数字能被 2 或 5 整除，那么这个数就能被 2 或 5 整除.

② 一个数各位上的数字和能被 3 或 9 整除，那么这个数就能被 3 或 9 整除.

③ 一个数末两位数字所表示的数能被 4 或25整除，那么这个数就能被 4 或25整除.

④ 一个数末三位数字所表示的数与末三位以前数字所表示的数的差能被 7 整除，那么这个数就能被 7 整除.

⑤ 一个数奇数位上数字之和与偶数位上数字之和的差能被11整除，那么这个数就能被11整除.

3.有理数

（1）数轴　规定了方向、原点和单位长度的直线叫做数轴. 零用原点表示，原点右边的点表示正数，左边的点表示负数.

（2）互为相反的数　只有符号不同的两个数叫做互为相反的数. 零的相反数是零.

（3）绝对值　一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对数是它的相反数；零的绝对值是零. 即

$$|a|=\begin{cases} a\,(a>0); \\ 0\,(a=0); \\ -a\,(a<0). \end{cases}$$

（4）有理数大小的比较

① 正数都大于零，也大于一切负数；

② 负数都小于零，也小于一切正数；

③ 两个正数中，绝对值大的较大，绝对值小的较小.

④ 两个负数中，绝对值大的反而小，绝对值小的反而大.

（5）有理数的运算

① 运算法则

加法 同号两数相加，绝对值相加，符号不变；

异号两数相加，绝对值相减，取绝对值较大的数的符号.

减法 减去一个数，等于加上这个数的相反数.

乘法 同号两数相乘，绝对值相乘，符号取正；

异号两数相乘，绝对值相乘，符号取负.

除法 除以一个数，等于乘以这个数的倒数.

乘方 正数的任何次方为正数；

负数的奇次方为负数，偶次方为正数.

② 运算定律

加法 交换律 $a+b=b+a$；

结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

乘法 交换律 $ab=ba$；

结合律 $(ab)c=a(bc)$；

分配律 $a(b+c)=ab+bc$.

三、实数

1.实数与数轴上的点一一对应

2.实数的绝对值

$$|a|=\begin{cases} a\ (a\geqslant 0)；\\ -a\ (a<0). \end{cases}$$

3.方根和算术根

如果一个数的n次方等于a，那么这个数就叫做a的n次方根；正数的正的方根，叫做这个数的算术根．零的算术根是零．

4.实数大小的比较

任何两个实数都可以比较大小，即正数大于任何负数；负数都小于零；两个正数中绝对值大的那个数较大；两个负数中绝对值大的那个数较小．

5.实数的运算

在实数范围内，对于加、减、乘、除(除数不等于零)、乘方五种运算可以实施．

在这一章中，重点研究绝对值和算术根的化简以及非负数的性质：

第一 绝对值和算术根的化简

根据$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0);\\-a(a<0).\end{cases}$ 所以算术根的问题，一般都可以转化成绝对值的问题来解决．而在化简含有绝对值符号的式子时，关键是去掉绝对值符号．怎样才能正确而合理地去掉绝对值符号，从而达到化简的目的呢？

1.如果绝对值符号内的式子的符号是确定的，则可以直接运用绝对值定义去掉绝对值符号．

绝对值符号内的式子的符号是确定的，一般有三种形式：

（1）是具体的数值；

（2）是符号确定的式子；

（3）由给定条件可以确定符号的式子.

例1　求下列各式的值：

（1）$|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$；　　（2）$|\lg 0.01|$；

（3）$\sqrt{3-2\sqrt{2}}$；　　（4）$\sqrt{\cos^2 120^\circ}$.

解：（1）$\because$　$\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$，

$\therefore$　$|\sqrt{2}-\sqrt{3}|=-(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{3}-\sqrt{2}$；

（2）$\because$　$\lg 0.01=-2$，

$\therefore$　$|\lg 0.01|=-(-2)=2$；

（3）$\because$　$3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$，且$\sqrt{2}-1>0$，

$\therefore$　$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$；

（4）$\because$　$\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}<0$，

$\therefore$　$\sqrt{\cos^2 120^\circ}=-\cos 120^\circ=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

例2　化简下列各式：

（1）$|x^2-x+1|$；　（2）$|\sin\alpha-1|$；

（3）$\sqrt{\lg^2 6-\lg 36+1}$.

解：（1）$\because$　$x^2-x+1=x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

$\therefore$　$|x^2-x+1|=x^2-x+1$；

（2）$\because$　α是任何角时，$|\sin\alpha|\leqslant 1$，

$\therefore$　$|\sin\alpha-1|=-(\sin\alpha-1)=1-\sin\alpha$；

（3）$\because$　$\lg^2 6-\lg 36+1=\lg^2 6-2\lg 6+1$

$=(\lg 6-1)^2$，且$\lg 6-1<0$，

$\therefore$　$\sqrt{\lg^2 6-\lg 36+1}=\sqrt{(\lg 6-1)^2}=-(\lg 6-1)$

$=1-\lg 6$.

例 3　化简下列各式：

（1）$|x-1|(x<1)$；　（2）$|\lg a-1|(0<a<10)$；

（3）$\sqrt{4x^2-4x+1}\ \left(x>\frac{1}{2}\right)$.

解：（1）$\because\ x<1$时，$x-1<0$,

$\therefore\ |x-1|=-(x-1)=1-x$；

（2）$\because\ 0<a<10$时，$0<\lg a<1$,

$\therefore\ |\lg a-1|=-(\lg a-1)=1-\lg a$；

（3）$\because\ x>\frac{1}{2}$时，$2x-1>0$,

$\therefore\ \sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(2x-1)^2}=2x-1$.

2.如果绝对值符号内的式子的符号是不确定的，则需先求出绝对值的零点（使绝对值符号内的式子为零的字母的值），然后按绝对值符号内的式子的正负零性，将字母划分区间讨论，从而把绝对值符号去掉.

例 1　化简下列各式：

（1）$|3x-2|$；　（2）$\sqrt{9x^2+12x+4}$.

解：（1）$|3x-2|=\begin{cases}3x-2\left(x\geqslant\frac{2}{3}\right),\\-(3x-2)\left(x<\frac{2}{3}\right);\end{cases}$

（2）$\sqrt{9x^2+12x+4}=\sqrt{(3x+2)^2}=|3x+2|$

$$=\begin{cases}3x+2\left(x\geqslant-\frac{2}{3}\right),\\-(3x+2)\left(x<-\frac{2}{3}\right).\end{cases}$$

例2　化简$|x-1|+|x+3|$.

解：两个绝对值的零点分别是$x=-3$，$x=1$. 因此可以相应地根据x的三个取值范围（图1—1），讨论化简.

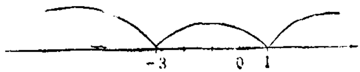


图1—1

（1）$x<-3$时，$|x-1|+|x+3|=-(x-1)-(x+3)$
$=-2x-2$；

（2）$-3\leqslant x<1$时，$|x-1|+|x+3|=-(x-1)+(x+3)=4$；

（3）$x\geqslant 1$时，$|x-1|+|x+3|=(x-1)+(x+3)=2x+2$.

第二　非负数及其应用

1.什么是非负数

正数和零总称为非负数．也就是

$$非负数\begin{cases}正数，\\零.\end{cases}$$

相应地，我们把负数和零总称为非正数.

2.非负数的形式

（1）任何一个实数的偶次方是非负数．即对于任何实数a，都有$a^{2n}\geqslant 0$（n是自然数）．我们经常使用的非负数是a^2（a是实数）.

（2）任何一个实数的绝对值是非负数．即对于任何实数a，都有$|a|\geqslant 0$.

（3）任何非负数的n次算术根是非负数.即对于任何实数$a\geqslant 0$,都有$\sqrt[n]{a}\geqslant 0$.我们经常使用的非负数是$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）.

（4）根据需要有时我们规定$a\geqslant 0$，那么a就是非负数，

它也具有非负数的一切性质.

3.非负数的常用性质

（1）有限个非负数的和仍然是非负数. 即当$x_1\geqslant0$, $x_2\geqslant0$, …, $x_n\geqslant0$时, $x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant0$.

（2）如果有限个非负数的和等于零，则必有每个非负数同时为零. 即当$x_1\geqslant0$, $x_2\geqslant0$, …, $x_n\geqslant0$, 并且$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$时，总有$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

4.非负数的应用

（1）解方程或方程组

如果只有一个方程，却含有两个或两个以上未知数时，或在方程组中，方程的个数少于未知数的个数时. 有时可以利用非负数的性质，把某一个方程分裂成n个方程，使得方程的个数与未知数的个数一样多. 这样就可以使方程或方程组得到确定的解.

例1　解方程$\sqrt{89x+135y-313}+\sqrt{111x-35y-187}=0$.

解：$\because\sqrt{89x+135y-313}\geqslant0$, $\sqrt{111x-35y-187}\geqslant0$, 并且它们的和等于零，

$$\therefore\quad\begin{cases}89x+135y-313=0, & (1)\\ 111x-35y-187=0. & (2)\end{cases}$$

（1）+（2），得　$200x+100y=500$.

$$\therefore\quad 2x+y=5 \qquad (3)$$

$$\text{解}\quad\begin{cases}111x-35y-187=0, & (2)\\ 2x+y=5. & (3)\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$$

因此原方程的解是$\begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases}$

例 2　解方程组 $\begin{cases} 5(x+2y-2)^2+|y+1|=0. \\ \dfrac{x^2}{2z}+\dfrac{3y^3}{z}-5=0. \end{cases}$

解：$\because 5(x+2y-2)^2 \geqslant 0$，$|y+1| \geqslant 0$，并且它们的和等于零，

$\therefore \begin{cases} x+2y-2=0, \\ y+1=0. \end{cases}$

解之，得　$x=4$，$y=-1$.

把$x=4, y=-1$代入　$\dfrac{x^2}{2z}+\dfrac{3y^3}{z}-5=0$，得

$$\frac{16}{2z}+\frac{-3}{z}-5=0.$$

$\therefore \quad z=1.$

因此原方程组的解是 $\begin{cases} x=4, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$

（2）求值

在求一个代数式的值时，有时必须根据已知条件首先求出每个字母的值，然后代入所求代数式再求值. 如果已知条件的个数少于其中字母的个数，则必须根据非负数的性质，将已知条件分裂，求出每个字母的值. 有时虽然不能求出每个字母的值，但可以找到字母之间的关系，也可以求出代数式的值.

例 1　设a、b是实数，且$\sqrt{2a+1}+|b+1|=0$，

求 $-a^2-b^{1985}$.

解：∵ $\sqrt{2a+1}\geqslant 0$，$|b+1|\geqslant 0$，并且它们的和等于零，

$$\therefore\quad \begin{cases}2a+1=0,\\ b+1=0.\end{cases}$$

因此 $a=-\frac{1}{2}$，$b=-1$.

$$\therefore\quad -a^2-b^{1985}=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-(-1)^{1985}=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}.$$

例 2　设 x、y 是实数，并且 $x^2+y^2-2x+4y+5=0$. 求 $\sqrt{(2x+3y)^2}$.

解：∵ $x^2+y^2-2x+4y+5=0$,

∴ $x^2-2x+1+y^2+4y+4=0$.

即 $(x-1)^2+(y+2)^2=0$.

∴ $x=1$，$y=-2$.

因此 $\sqrt{(2x+3y)^2}=\sqrt{(2-6)^2}=4$.

例 3　设 $\left(x+\frac{1}{x}-a\right)^2+\left(x^3+\frac{1}{x^3}-b\right)^2=0$，求 $\frac{a^2-3a}{b}$.

解：∵ $\left(x+\frac{1}{x}-a\right)^2\geqslant 0$，$\left(x^3+\frac{1}{x^3}-b\right)^2\geqslant 0$，并且它们的和等于零，

$$\therefore\quad \begin{cases}x+\frac{1}{x}-a=0,\\ x^3+\frac{1}{x^3}-b=0.\end{cases}$$

因此 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=a^3$,