国家工科数学课程教学基地建设系列教材

线性代数学习指导

华南理工大学数学科学学院

洪 毅 主编

华南理工大学出版社

国家工科数学课程教学基地建设系列教材

线性代数学习指导

华南理工大学数学科学学院

洪 毅 主编

华南理工大学出版社

·广州·

内 容 简 介

本书是华南理工大学数学科学学院编写的《线性代数》(华南理工大学出版社,2005)的同步辅导教材,概述了教材的重点、难点、考试核心习题、近年硕士研究生入学试题和解题技巧.主要内容包括:矩阵、行列式、线性方程组、n 维向量空间、特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等.

本书可作为高等学校工学、经济学和其他专业"线性代数"课程学习参考用书,也可作为参加全国硕士研究生入学考试的复习参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/洪毅主编.—广州:华南理工大学出版社,2006.3
(国家工科数学课程教学基地建设系列教材)
ISBN 7-5623-2382-8

Ⅰ.线…　Ⅱ.洪…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 012083 号

总 发 行:华南理工大学出版社 (广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)
发行部电话:020-87113487　87111048(传真)
E-mail:scutc13@scut.edu.cn　**http://www.scutpress.com.cn**
责任编辑:赵　鑫
印 刷 者:广东省农垦总局印刷厂
开　本:787×960　1/16　**印张**:9.25　**字数**:208 千
版　次:2006 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
印　数:1~4 000 册
定　价:16.00 元

总　序

自1995年以来，华南理工大学应用数学系（现数学科学学院）的老师们为建设国家工科数学课程教学基地不懈努力，在教育改革中做出了显著的成绩。"国家工科数学课程教学基地建设系列教材"的出版，就是这些成果的重要部分。

21世纪是经济全球化、信息化的时代，数学科学在科学技术中占有核心地位，成为直接的生产力。大学数学课程在高等教育中起着关键的作用，对学生素质的提高和创新能力的培养起着越来越重要的作用。提高大学数学的教学质量，是一项艰巨、重要的任务。

大学数学的教学，应该使学生在理解数学思想、数学建模和运算能力等方面，得到最基本的训练。为使学生理解数学思想，必须讲清基本概念，并通过必要的逻辑推理训练使学生理解基本概念和基本定理。通过数学建模的学习，学生可以了解数学的来源，并且学会运用数学。运算能力的培养是以上两种能力的基础。当然，这三种能力的培养是一个有机的整体，根据不同专业的要求和学生的实际情况可以有所侧重。

为了适应新形势，本系列教材力求反映数学与其他学科的最新发展，删减过时的内容，介绍各种数学软件的应用，充分使用多媒体等技术。

本系列教材的出版，反映了我院教师多年来教学改革的成果，也吸取了不少兄弟院校同行的宝贵经验。限于我们的水平，其中疏漏在所难免，恳请国内外专家、同行指正。本系列教材的出版得到华南理工大学校领导与华南理工大学出版社的大力支持，特此表示感谢。

华南理工大学数学科学学院

2004年8月

前　言

本书是与洪毅等编写的《线性代数》(华南理工大学出版社,2005年版)配套的辅导教材.本书也可为使用其他教材的读者作为“线性代数”课程学习参考用书,还可作为参加全国硕士研究生入学考试的复习参考用书.

学习任何数学课程,关键是要认真阅读课本,深入思考概念和定理,理解其中包含的数学思想.做习题的目的,是为了帮助理解,检验自己对概念和定理掌握的程度.微积分、线性代数等课程,经过上百年的教学实践,已经形成一套国际公认的完整的教材体系,其所包含的都是学生应该掌握的重要内容,可以说涵盖了数学思想中的精髓.要学好这些内容,当然需要刻苦钻研,独立完成一定数量的习题才行.企望有什么速成的捷径、不费力气的诀窍可以学到知识,是一种十分有害的懒汉思想.目前,由于应试教育的恶劣影响,许多学生在中学里已经养成了不认真阅读课本、沉溺于题海和大量参考书之中的坏习惯.他们可能记住了各种各样的“题型”,但并没有理解基本概念,更不了解其中包含的数学思想.不改掉这种坏习惯,数学是不可能学好的.课本的内容,看起来虽不起眼,但却是整个学科的精华,参考书编得再好,也是辅助性的,绝不能代替课本,只有处理好课本和参考书的关系,才能学好知识,这是我们给同学们的一点忠告.

做习题的目的是为了加深对概念和定理的理解.课本上的习题,数量和难度已经基本能满足学习的需要.适当多做一些习题,对希望学得更扎实,希望今后进一步深造的同学当然有一定好处.但是,为做题而做题,大搞题海战术,那就是舍本求末,捡了芝麻丢了西瓜.如果有时间的话,我们倒是建议有些好题不妨多做几次:第一遍学习时做一次,期末考试再做一次,到准备考研时再做一次——看忘了没有,看理解加深了没有.还可以思考一下,这些题如果改变条件,可以得出什么结论.这样的思考会大大加深你对数学的理解,比盲目大量做题效果好得多.

建议同学们可以这样使用这本参考书:当你学完课本的某一章时,先对照一下“基本要求”,看这些概念和定理记住没有,最好是能背下来;再看“内容提要”部分,看这些内容是否记得,自己写下来看看,对照课本有无错误,错在哪里,为什么错;在内容掌握较好以后再去做题,自己做完题后对照答案,如有错

误，要找出原因，是哪个概念或定理没有理解正确. 失败是成功之母，从自己的错误中学习是最好的学习，切忌未做题之前先去看答案，这也是我们选编一些补充习题而没有给出答案的原因. 当你经过冥思苦想，终于柳暗花明，解出一道难题，学数学的乐趣也就在其中了.

我们不希望这本书成为纯粹应试的工具，所以也编入一些我们认为较为重要而未列入"基本要求"的内容，特别是有关实际应用的内容. 如果这本书对同学们的学习能起小小的作用，我们就很高兴了.

本书由洪毅主编. 参加本书编写的老师有：洪毅(第一章、附录一、附录三)、马东魁(第六章)、陆子强(第五章)、陈小莹(第四章、附录二)、覃永安(第二章、第三章)、吴洪武(第七章). 由于编者水平有限，不妥之处难免，恳请读者批评指正.

编　者

2005 年 11 月

目　录

第一章　矩　阵

一、基本要求与内容提要

(一)基本要求

(1)理解矩阵的概念;了解零矩阵、单位矩阵、对角矩阵、上(下)三角矩阵、对称矩阵及反对称矩阵等特殊的矩阵.

(2)熟练掌握矩阵的线性运算(即矩阵的加法与矩阵的数乘)、矩阵的乘法运算、矩阵的转置以及它们的运算规律;了解矩阵运算的实际意义,矩阵运算与数的运算的异同.

(3)理解可逆矩阵的概念;熟练掌握逆矩阵的运算性质.

(4)了解分块矩阵及其运算规律.

(二)内容提要

1.矩阵

(1)矩阵的概念. $m\times n$ 个数(实数或复数)$a_{ij}(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$排成 m 行 n 列的表:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 就称为 $m\times n$ 矩阵,也可写作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,数 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素,简称(i,j)元素.

矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 也可以看成两个变元(i,j)的函数,其中第一个变元 i 的取值范围为$\{1,2,\cdots,m\}$,第二个变元 j 的取值范围为$\{1,2,\cdots,n\}$.若把 $\boldsymbol{A}$ 写成分块的形式:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量,那么 $\boldsymbol{A}$ 也可以看做从集合$\{1,2,\cdots,m\}$到所有 n 维行向量(即 $1\times n$ 矩阵)的映射.同样,$\boldsymbol{A}$ 可看做从集合$\{1,2,\cdots,n\}$到所有 m 维列

向量(即 $m\times 1$ 矩阵)的映射. 这些观点广泛地应用在计算机科学中.

(2)特殊矩阵.

零矩阵:元素全为零的矩阵.

对角矩阵:主对角线以外的元素全是零的方阵. 若 $\boldsymbol{D}$ 为 n 阶对角矩阵,其对角元分别为 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$,则 $\boldsymbol{D}$ 可记为

$$\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n).$$

单位矩阵:主对角线元素全是 1 的对角矩阵,记为 $\boldsymbol{E}_n$(n 表示阶数).

2. 矩阵的运算

(1)矩阵的加法. 设有同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

(2)数与矩阵的乘法(矩阵的数乘). 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积为

$$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵的加法与矩阵的数乘统称为矩阵的线性运算,这是因为所有 $m\times n$ 矩阵在这些运算下构成线性空间(见第七章).

3. 矩阵与矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{s\times n}$,即 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积为 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

注意,只有矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时,它们才能相乘;乘积 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时,乘积 $\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义;即使它们都有意义,它们的行数和列数未必相同;如果 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义且行、列数都相同,一般来说它们也不相等. 总之,矩阵乘法不满足交换律.

另外,当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时,有可能 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都不是零矩阵;$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}$ 时,$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 也不能断定 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$. 这些都是矩阵乘法与数的乘法不同的地方,也是容易出错的地方.

矩阵乘法满足以下运算规律(设所有的运算都有意义):

①结合律:$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

②分配律:$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$; $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;

③关于数乘的结合律:$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$;

④设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,则 $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}_n=\boldsymbol{A}$.

4. 矩阵的转置

矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的转置矩阵是一个 $n\times m$ 矩阵,记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,它的$(i,j)$元素是 a_{ji},即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

转置矩阵有下列性质:

①$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$; ②$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

③$(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$; ④$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

最后一个性质要特别小心,将乘积转置时要记得颠倒相乘的次序.

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵;若满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

5. 逆矩阵

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 称为可逆矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 当然,$\boldsymbol{B}$ 也是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵.

一般来说,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_n$,但 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵时,$\boldsymbol{A}$ 不是可逆矩阵. 可逆矩阵一定是方阵. 例如,若

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_2$,但 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆矩阵.

逆矩阵的性质:

①可逆矩阵的逆矩阵是惟一的;

②若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

③若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;

④若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\lambda\neq0$,则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 也可逆,且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

⑤若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 都可逆,则 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{-1}=\boldsymbol{A}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$.

6. 分块矩阵

当对分块矩阵进行运算时,要注意几点:第一,所有的运算(矩阵加法和乘法)必须有意义;第二,注意矩阵乘法的顺序;第三,转置时不仅各分块矩阵本身要转置,它们在矩阵中的位置也要改变(即转置).

分块矩阵在矩阵的理论和应用中都是很重要的.

首先,在计算或证明中,可能矩阵的某一部分有一种规律,另一部分有另一种规律,那么用分块矩阵就可将不同的规律清楚地表示出来,方便运算或推理.

其次,适当的分块有助于理解矩阵的概念. 例如,考虑矩阵方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}$ 分别是 $m\times n,n\times1,m\times1$ 矩阵. 若把它们按列分块,可写成

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{b},$$

因此,可把矩阵方程转化成向量方程

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}.$$

从两种不同角度来研究同一问题,可使得我们对这一问题的理解更为透彻.

又如,研究 $m\times s$ 矩阵$\boldsymbol{A}$ 和$s\times n$ 矩阵$\boldsymbol{B}$ 的乘积.若把 $\boldsymbol{A}$ 按行分块,$\boldsymbol{B}$ 按列分块,则可写成

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\cdots\boldsymbol{b}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix},$$

可以看出,$\boldsymbol{AB}$ 的(i,j)元素是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行向量$\boldsymbol{a}_i$ 和$\boldsymbol{B}$ 的第j 列向量$\boldsymbol{b}_j$ 的“内积”,这一观点在几何上是很重要的.

最后,在实际应用中,例如在计算机理论、电路理论、图论以及经济学中的许多问题,所研究的矩阵通常具有“自然”的分块.应用分块矩阵研究这些问题,就可得到事半功倍的效果,而且可使得到的结果更为清楚明了.

二、补充例题

例 1.1 已知 n 阶矩阵$\boldsymbol{A}$ 满足$\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{0}$,证明 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n$ 可逆,并求其逆.

证 这类题目常见于各种考试中,关键是要知道逆矩阵的一般形式.

所给条件中左边是 $\boldsymbol{A}$ 的三次多项式,可设

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 + a_1\boldsymbol{A} + a_2\boldsymbol{E},$$

希望$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{B}$ 是$\lambda\boldsymbol{E}_n$ 的形式,其中 $\lambda\neq 0$,是常数.由于

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{A}^3 + (a_1-2)\boldsymbol{A}^2 + (a_2-2)\boldsymbol{A} - 2a_2\boldsymbol{E}_n \\ &= (\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}_n) + (a_1-1)\boldsymbol{A}^2 + (a_2-5)\boldsymbol{A} + (1-2a_2)\boldsymbol{E}_n \\ &= (a_1-1)\boldsymbol{A}^2 + (a_2-5)\boldsymbol{A} + (1-2a_2)\boldsymbol{E}_n,\end{aligned}$$

于是取 $a_1=1,a_2=5$ 时,有

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n)(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}_n) = -9\boldsymbol{E}_n,$$

由此可以验证(请读者自证):取

$$\boldsymbol{C} = -\frac{1}{9}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}_n),$$

则

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n) = \boldsymbol{E}_n,$$

故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n$ 可逆,且

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n)^{-1} = -\frac{1}{9}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}_n).$$

例 1.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量,b 是常数.证明:$n+1$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}$$

可逆的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.当 $\boldsymbol{Q}$ 可逆时,求出它的逆.

证 本题思路比教材例 1.22 复杂一些,先要设法变成上三角矩阵.令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{p} & 1\end{pmatrix}$$

($\boldsymbol{p}$ 为 $1\times n$ 矩阵),希望 $\boldsymbol{PQ}$ 为上三角矩阵.因

$$\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{p} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{pA}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{p\alpha}+b\end{pmatrix},$$

所以应使 $\boldsymbol{pA}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}$,这时有

$$\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}+b\end{pmatrix}.$$

当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$ 时,右端矩阵可逆,因 $\boldsymbol{P}$ 也可逆,故

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}+b\end{pmatrix}$$

也可逆.根据教材例 1.23,知

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}+b\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & -(-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}+b)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & (-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}+b)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}+(-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}+b)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & -(-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}+b)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ (-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}+b)^{-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & (-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}+b)^{-1}\end{pmatrix}.$$

反之,若 $\boldsymbol{Q}$ 可逆,因 $\boldsymbol{P}$ 可逆,$\boldsymbol{PQ}$ 也可逆,故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$,否则 $\boldsymbol{PQ}$ 有一行全为零,显然不可逆.(请与第二章用初等变换求逆的方法比较)

例 1.3 求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵 $\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

解 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix},$$

则条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 可写成

$$\begin{pmatrix}2b_{11}+b_{21}&2b_{12}+b_{22}&2b_{13}+b_{23}\\2b_{21}+b_{31}&2b_{22}+b_{32}&2b_{23}+b_{33}\\2b_{31}&2b_{32}&2b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b_{11}&b_{11}+2b_{12}&b_{12}+2b_{13}\\2b_{21}&b_{21}+2b_{22}&b_{22}+2b_{23}\\2b_{31}&b_{31}+2b_{32}&b_{32}+2b_{33}\end{pmatrix},$$

由矩阵相等条件,得 $b_{21}=0,b_{31}=0,b_{32}=0,b_{11}=b_{22},b_{12}=b_{23},b_{22}=b_{33}$,所以 $\boldsymbol{B}$ 应有以下

形式:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{11} \end{pmatrix}.$$

反之,可直接验证这种形式的矩阵必可与 $\boldsymbol{A}$ 交换.

例 1.4 求 $\boldsymbol{A}^n$,其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

解 可将 $\boldsymbol{A}$ 表示为 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此
$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{E}_3$ 可交换,所以可以应用二项式定理,即

$$\boldsymbol{A}^n=(2\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{B})^n=(2\boldsymbol{E}_3)^n+\mathrm{C}_n^1(2\boldsymbol{E}_3)^{n-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_n^2(2\boldsymbol{E}_3)^{n-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+\boldsymbol{B}^n.$$

当 $n\geqslant 3$ 时,仅有前三项不等于零,所以

$$\boldsymbol{A}^n=2^n\boldsymbol{E}_3+2^{n-1}n\boldsymbol{B}+2^{n-3}n(n-1)\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}\cdot n & 2^{n-1}\cdot n(n+1) \\ 0 & 2^n & 3\cdot 2^{n-1}\cdot n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

注意,求矩阵的高次幂时,一般总要求出矩阵所满足的方程,这样就可降低指数.

例 1.5 求 $\boldsymbol{A}^n$,其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 由
$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 24 & 25 & 24 \\ 16 & 16 & 17 \end{pmatrix}=8\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{E}_3,$$

为了得出递推公式,将上式写成

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=7(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3),$$

于是
$$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2=7(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)\cdot\boldsymbol{A}=7^2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3),$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{A}^n-\boldsymbol{A}^{n-1}=7^{n-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3).$$

把所有这些式子相加,得

$$A^n - A = (7 + 7^2 + \cdots + 7^{n-1})(A - E_3) = \frac{1}{6}(7^n - 7)(A - E_3),$$

所以

$$A^n = A + \frac{1}{6}(7^n - 7)(A - E_3) = \frac{1}{6}(7^n - 1)A - \frac{1}{6}(7^n - 7)E_3$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(7^n + 5) & \frac{1}{6}(7^n - 1) & \frac{1}{6}(7^n - 1) \\ \frac{1}{2}(7^n - 1) & \frac{1}{2}(7^n + 1) & \frac{1}{2}(7^n - 1) \\ \frac{1}{3}(7^n - 1) & \frac{1}{3}(7^n - 1) & \frac{1}{3}(7^n + 2) \end{pmatrix} \quad (n \geqslant 1).$$

注意,本例也可利用相似矩阵,参见第五章.

例 1.6 求$(E_3 + \alpha^T\beta)^n$,其中 $\alpha = (1,1,1), \beta = (1,2,4)$.

解 首先要研究 $\alpha^T\beta$ 的幂,因 $\alpha\beta^T = 7$,有

$$(\alpha^T\beta)^2 = (\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta) = \alpha^T(\beta\alpha^T)\beta = 7\alpha^T\beta,$$

$$(\alpha^T\beta)^3 = (\alpha^T\beta)^2(\alpha^T\beta) = (7\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta) = 49\alpha^T\beta.$$

一般地,用数学归纳法可证明

$$(\alpha^T\beta)^n = (\beta\alpha^T)^{n-1}\alpha^T\beta = 7^{n-1}\alpha^T\beta,$$

因此,

$$\begin{aligned}(E_3 + \alpha^T\beta)^n &= (E_3)^n + C_n^1(\alpha^T\beta) + C_n^2(\alpha^T\beta)^2 + \cdots + C_n^n(\alpha^T\beta)^n \\ &= E_3 + C_n^1(\alpha^T\beta) + C_n^2(\beta\alpha^T)\alpha^T\beta + \cdots + C_n^n(\beta\alpha^T)^{n-1}(\alpha^T\beta) \\ &= E_3 + [C_n^1 + C_n^2(\beta\alpha^T) + \cdots + C_n^n(\beta\alpha^T)^{n-1}](\alpha^T\beta) \\ &= E_3 + \frac{[1 + C_n^1(\beta\alpha^T) + C_n^2(\beta\alpha^T)^2 + \cdots + C_n^n(\beta\alpha^T)^n - 1]}{\beta\alpha^T} \cdot (\alpha^T\beta) \\ &= E_3 + \frac{(1 + \beta\alpha^T)^n - 1}{\beta\alpha^T} \cdot (\alpha^T\beta) = E_3 + \frac{8^n - 1}{7}\alpha^T\beta \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{7}(8^n - 1) + 1 & \frac{2}{7}(8^n - 1) & \frac{4}{7}(8^n - 1) \\ \frac{1}{7}(8^n - 1) & \frac{2}{7}(8^n - 1) + 1 & \frac{4}{7}(8^n - 1) \\ \frac{1}{7}(8^n - 1) & \frac{2}{7}(8^n - 1) & \frac{4}{7}(8^n - 1) + 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注意,形如 $\alpha^T\beta$(α,β 为行向量)的矩阵是很重要的,参见第四章.

例 1.7 设 A,B 分别为 n 阶对称矩阵和反对称矩阵.问:正整数 k,m 取何值时,$A^kB^m - B^mA^k$ 必为对称矩阵或反对称矩阵?

解 首先,因 A 为对称矩阵,$A^T = A$,

$$(A^2)^T = (AA)^T = A^TA^T = AA = A^2,$$

故 A^2 为对称矩阵.用数学归纳法可证 A^k 为对称矩阵(k 为正整数).

又 B 为反对称矩阵,$B^T=-B$,

$$(B^2)^T=(BB)^T=B^TB^T=(-B)(-B)=B^2,$$
$$(B^3)^T=(B^2B)^T=B^T(B^2)^T=(-B)\cdot B^2=-B^3,$$

故 B^2 为对称矩阵,B^3 为反对称矩阵.用数学归纳法可证当 m 为偶数时,B^m 为对称矩阵;当 m 为奇数时,B^m 为反对称矩阵,即$(B^m)^T=(-1)^mB^m$.

再研究 $A^kB^m-B^mA^k$.

$$\begin{aligned}(A^kB^m-B^mA^k)^T&=(A^kB^m)^T-(B^mA^k)^T\\&=(B^m)^T(A^k)^T-(A^k)^T(B^m)^T\\&=(-1)^mB^mA^k-(-1)^mA^kB^m\\&=(-1)^{m+1}(A^kB^m-B^mA^k),\end{aligned}$$

所以,当 m 为偶数时,$A^kB^m-B^mA^k$ 为反对称矩阵;当 m 为奇数时,$A^kB^m-B^mA^k$ 为对称矩阵.

例 1.8 设

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&A_1\\0&A_2&0\\A_3&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}n_1\text{ 行}\\n_2\text{ 行},\\n_3\text{ 行}\end{array}\\ \begin{array}{ccc}n_3\text{ 列}&n_2\text{ 列}&n_1\text{ 列},\end{array}\end{array}$$

当 A_1,A_2,A_3 都可逆时,证明 A 也可逆,且求其逆.

证 根据矩阵 A 的特点,令

$$B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&A_3^{-1}\\0&A_2^{-1}&0\\A_1^{-1}&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}n_3\text{ 行}\\n_2\text{ 行},\\n_1\text{ 行}\end{array}\\ \begin{array}{ccc}n_1\text{ 列}&n_2\text{ 列}&n_3\text{ 列}\end{array}\end{array}$$

容易证明 $AB=BA=E_{n_1+n_2+n_3}$,所以 A 可逆,且 A 的逆矩阵为 B.

例 1.9 (1)证明:当 $AB=BA$ 时,$(AB)^2=A^2B^2$;

(2)举例说明:$(AB)^2$ 不一定等于 A^2B^2;

(3)举例说明:当 $AB\neq BA$ 时,$(AB)^2$ 可能等于 A^2B^2.

证 (1)当 $AB=BA$ 时,有

$$\begin{aligned}(AB)^2&=(AB)(AB)=A(BA)B=A(AB)B\\&=(AA)(BB)=A^2B^2.\end{aligned}$$

(2)例如,
$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

则
$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix},\quad B^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},$$

$$A^2B^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix},\quad (AB)^2=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}.$$

所以 $A^2B^2\neq(AB)^2$.

(3)例如，
$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$$

则
$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq AB,$$

但
$$A^2=B^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad A^2B^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=(AB)^2.$$

例 1.10 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的主对角线元素的和称为矩阵 A 的迹，即
$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

证明:(1)若 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

(2)若 A,P 都是 n 阶矩阵，P 可逆，则 $\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(A)$.

证 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$，则 AB 是 $m\times m$ 矩阵，其(i,j)元素为
$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant m),$$

所以
$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}.$$

同样，BA 是 $n\times n$ 矩阵，其(k,j)元素为
$$(BA)_{kj}=\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ij}\quad(1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n),$$

因此
$$\mathrm{tr}(BA)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ik}.$$

因而
$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA).$$

(2)利用已得结论，就有
$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(P^{-1}(AP))=\mathrm{tr}((AP)P^{-1})=\mathrm{tr}(A).$$

例 1.11 设 A,B 为 n 阶对称矩阵，且 $AB+E$ 和 A 都可逆.证明:$(AB+E)^{-1}A$ 是可逆对称矩阵.

解 显然，$(AB+E)^{-1}A$ 是可逆矩阵，但要直接证明它是对称的，似乎还有一定困难.试用逆推法.所要证明的是
$$((AB+E)^{-1}A)^{\mathrm{T}}=(AB+E)^{-1}A,$$

上式等价于
$$A^{\mathrm{T}}((AB+E)^{-1})^{\mathrm{T}}=(AB+E)^{-1}A,$$

继续变形，得