高等工业专科学校试用教材

高等数学

下 册

江苏省《高等数学》编写组

江 苏 教 育 出 版 社

高等工业专科学校试用教材

高 等 数 学

下 册

江苏省《高等数学》编写组

江苏教育出版社

高等工业专科学校试用教材

高等数学

下册

江苏省《高等数学》编写组

江苏教育出版社出版
江苏省新华书店发行　　靖江印刷厂印刷
开本787×10[illegible]毫米1/32　印张9.5　字数200,000
1985年10月第1版　　1985年10月第1次印刷
印数1—13000册

书号：7351·224　　定价：1.60元
责任编辑　王建军

前　　言

为了适应高等工业专科学校数学教学的需要，大力提高教学质量，改变专科借用本科教材的现状，我们在江苏省高教局的组织领导下，在有关学校的支持下，编写了这本教材，供高等工业专科学校、职业大学各专业使用；也可供要求相近的大学本科、专科、职工大学、业余大学、干部训练班等作为选用教材；还可供具有高中文化水平有志于自学成才的同志选用。

本书在内容选择、结构体系和应用举例诸方面都努力体现专科特色，力求贯彻少而精的原则。教材比较注重学生基本运算能力的训练和运算方法上的归纳与指导；同时还尽可能注意理论与实际的联系以及能力的培养。

本教材实际授课时数为160学时左右，分上、下两册出版。上册包括一元函数微积分和微分方程，下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数，每节配有习题，各章有复习题，书末附有答案。书中*号内容可供不同专业取舍。

参加本书编写工作的有（以姓氏笔划为序）：王清俊（连云港化学矿业专科学校），江天学(常州工业技术学院)，庄海宜(南通纺织工学院)，张茂康（扬州工业专科学校），张谭生（南通纺织工学院），吴敬溧（连云港化学矿业专科学校），汪瑶同（扬州工业专科学校），杨慧玥、柴伯琪(无锡大学)，黄绍贤(扬州工业专科学校)，常柏林（盐城工业专科学校），

彭玉芳（常州工业技术学院）。汪瑶同、庄海宜、杨慧琍等同志对稿件作了进一步修改，最后由汪瑶同定稿。

全国工科教材编审委员会编委、南京工学院陶永德副教授审阅了本书全稿，提出了不少改进意见，对完成本教材起了重要的指导作用，对此我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正，以便再版时修改。

江苏省《高等数学》编写组

一九八五年六月

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是用代数方法来研究空间几何问题的，本章在建立空间直角坐标系后，将介绍向量及其运算，并以向量为工具来讨论空间的平面和直线，最后介绍空间的曲面和曲线的方程。

第一节　空间直角坐标系与向量

一、空间直角坐标系

过空间一个定点O作三条相互垂直的数轴Ox、Oy、Oz，这就建立了一个空间直角坐标系．定点O称为**坐标原点**，三条数轴称为**坐标轴**，分别为x轴、y轴、z轴，各坐标轴的顺序和正向可按右手法则规定如下：以右手握住z轴，让右手的四指从x轴正向以$\frac{\pi}{2}$角度转向y轴正向时，大姆指所指方向就是z轴正向。每两条坐标轴可以确定一个平面，这样的平面共有三个，统称为**坐标平面**，顺次为xy面、yz面、zx面，其中xy面是由x轴与y轴确定的，其余类同．这三个平面相互垂直，且把空间分成八个部分，每一部分称为一个**卦限**，含有正向x轴、正向y轴和正向z轴的那个卦限称为**第一卦限**(图７—１)。

设P为空间的一点（图7—2），过点P作垂直于三坐标轴

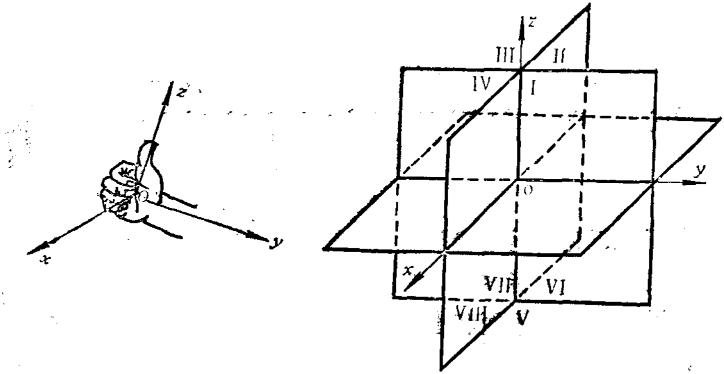

图 7—1

的平面，与三坐标轴分别相交于A、B、C三点，设这三点在x轴、y轴、z轴上的坐标顺次为x、y、z，于是空间的一点P唯一地确定了一个有序数组（x，y，z）。反之，已知一个有序数组（x，y，z），在空间必有唯一确定的一点与它对应，因此空间的所有点与全体有序数组（x，y，z）之间建立了一一对应的关系。

这组数（x，y，z）就**称为点P的坐标**，记为P（x，y，z）。其中x称为**横坐标**，y称为**纵坐标**，z称为**竖坐标**。

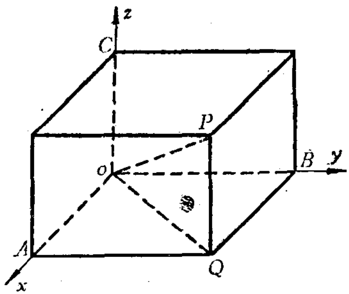

图 7—2

显然，原点O的坐标为（0，0，0）；在x轴上的点，$y=z=0$；在y轴上的点，$z=x=0$；在z轴上的点，$x=y=0$；在yz面上的点，$x=0$；在zx

面上的点，$y=0$；在xy面上的点，$z=0$。

从图7—2可以看出

$|OQ|^2=|OA|^2+|AQ|^2=|OA|^2+|OB|^2=x^2+y^2$,

$|OP|^2=|OQ|^2+|QP|^2=|OQ|^2+|OC|^2=x^2+y^2+z^2$,

所以，点$P(x,y,z)$与原点$O(0,0,0)$的距离是

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

二、向量及其线性运算

1.向量的概念

在一些物理量中，如力、位移、速度等，它们除有大小外还有方向，这种既有大小又有方向的量称为**向量**.

我们用有向线段$\overrightarrow{OP}$来表示向量(图7—3)，其中O、P分别为向量$\overrightarrow{OP}$的起点和终点，线段的长度$|OP|$表示向量$\overrightarrow{OP}$的大小. 也可用粗体字母$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、…表示向量。

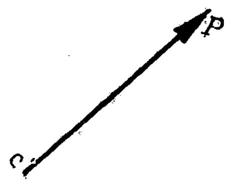

图 7—3

对于向量，我们只考虑其大小和方向，不考虑其起点，向量可以平行地自由移动（称为**自由向量**）。因此，如果两向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的大小相等，方向相同，就称它们是**相等的**，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

向量的大小称为**向量的模**，向量$\boldsymbol{a}$的模记作$|\boldsymbol{a}|$。模等于1的向量称为**单位向量**，模等于零的向量称为**零向量**，记作$\boldsymbol{0}$，零向量的方向不定。

2. 向量的加减法

设有两个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，平移$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$使起点重合，并以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为边作平行四边形（如图7—4所示），那么，以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的起点为起点的对角线所表示的向量定义为**两向量之和**，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这就是向量加法的**平行四边形法则**．由于向量$\boldsymbol{b}$的起点可以平行移动到$\boldsymbol{a}$的终点，因而向量的加法也可理解为：以向量$\boldsymbol{a}$的终点为向量$\boldsymbol{b}$的起点作向量$\boldsymbol{b}$，然后作出由$\boldsymbol{a}$的起点到$\boldsymbol{b}$的终点的向量，即为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这是向量加法的**三角形法则**，这个法则可以推广到求任意有限个向量的和。

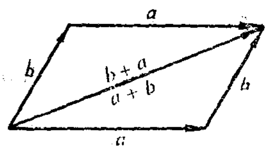

图 7—4

从图7—4、7—5可以看出：向量的加法满足交换律和结合律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

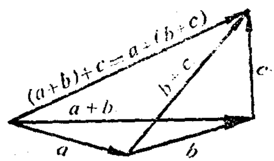

图 7—5

向量的减法，可以看作向量加法的逆运算．规定：若$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{c}$称为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差，记作$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图7—6）．

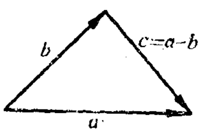

图 7—6

与已知向量$\boldsymbol{a}$的模相等而方向相反的向量称为$\boldsymbol{a}$的**负向量**，记作$-\boldsymbol{a}$．应用负向量的概念，可以把向量的减法变成向量的加法来运算，即

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$（图7—7）.

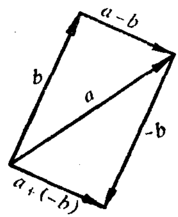

图 7—7

3.数乘向量

定义 向量$\boldsymbol{a}$与数量λ的乘积$\lambda\boldsymbol{a}$仍是一个向量，$\lambda\boldsymbol{a}$的模是$|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$。当$\lambda>0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向相同；当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向相反.

$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；$\lambda=1$时，$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；$\lambda=-1$时，$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

数乘向量满足结合律与分配律，即

$$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a},$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$

其中λ、μ都是数量.

设$\boldsymbol{a}$为非零向量，令$\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$，于是$\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$的模等于1，故$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是一个与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量，记作$\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，因此$\boldsymbol{a}$可以表示为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}.$$

这将给以后的向量运算带来很大方便．例如，设$\boldsymbol{i}$是与x轴同向的单位向量，$\overrightarrow{OA}$是x轴上的一个向量，点A的坐标为x，则不论$\overrightarrow{OA}$的方向是否与x轴同向，都有

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},$$

且当$x>0$时，$\overrightarrow{OA}$与x轴的方向相同；当$x<0$时，$\overrightarrow{OA}$与x轴的方向相反.

三、向量的坐标表示

上面从几何角度介绍了向量及其运算，但是有些问题仅靠几何方法是很难解决的.现在用代数方法来讨论向量及其运算.

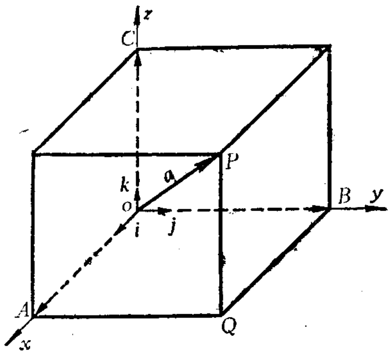

图 7—8

在空间直角坐标系中，沿x轴、y轴、z轴的方向分别取单位向量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，称为**基本单位向量**.

设向量$\boldsymbol{a}$的起点在坐标原点O(图7—8)，过$\boldsymbol{a}$的终点$P(x,y,z)$作三个平面，分别垂直于三条坐标轴，并顺次交于点A、B、C。因$\overrightarrow{OA}$在x轴上，点A的坐标是x，故有$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，同理有$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，从而有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

上式称为向量$\boldsymbol{a}$的**坐标表示式**，简记为

$$\boldsymbol{a}=\{x,\ y,\ z\}.$$

x、y、z也称为向量$\boldsymbol{a}$的**坐标**，而(x,y,z)恰是向量$\boldsymbol{a}$的终点P的坐标。向量$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$分别叫做$\boldsymbol{a}$在x轴、y轴、z轴上的**分向量**。显然，零向量的三个坐标全为零，即$\boldsymbol{0}=\{0,0,0\}$，基本单位向量的坐标分别为：$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$，

$\boldsymbol{j}=\{0, 1, 0\}$，$\boldsymbol{k}=\{0, 0, 1\}$。

例1 已知$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$是以$A(x_1, y_1, z_1)$为起点，$B(x_2, y_2, z_2)$为终点的向量（图7—9），求向量$\boldsymbol{a}$的坐标。

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$。

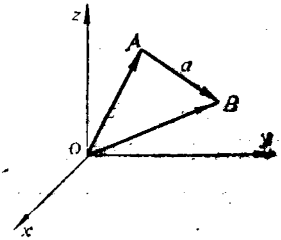

图 7—9

由此可知，起点不在坐标原点的向量的坐标，恰好等于向量终点坐标与起点坐标之差。

利用向量的坐标表示式、向量加法的交换律与结合律，以及数乘向量的结合律与分配律，可进行如下运算：

设$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，　　$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，

即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，　　$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，

则
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$ （λ为数量）

或记为

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

由此可见，对向量的运算可以转化为普通的代数运算。

例2 已知$\boldsymbol{a}=\{1, -2, 3\}$，$\boldsymbol{b}=\{1, 5, -4\}$，

求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$。

解 因 $2\boldsymbol{a}=\{2, -4, 6\}$，$3\boldsymbol{b}=\{3, 15, -12\}$，

所以

$$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=\{2-3,\ -4-15,\ 6-(-12)\}$$
$$=\{-1,\ -19,\ 18\}.$$

习　题　7—1

1.在空间直角坐标系中，定出点$A(3,1,2)$与$B(2,-1,3)$的位置．并求出它们关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）原点的对称点的坐标．

2.一立方体放置在xy平面上，其底面的中心与原点相合，底面的顶点在x轴和y轴上．已知立方体的边长为a，求其它各顶点的坐标．

3.已知平行四边形$ABCD$，设$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$，试用$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$，这里$M$是平行四边形对角线的交点．

4.已知向量$\mathbf{a}=\{3,\ 5,\ -1\}$，$\mathbf{b}=\{2,\ 2,\ 2\}$，$\mathbf{c}=\{4,\ -1,\ -3\}$，求（1）$2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$；（2）$m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$（$m$、$n$是常数）．

5.设向量$\mathbf{a}=\{3,\ 2,\ 1\}$，$\mathbf{b}=\{1,\ -1,2\}$，$\mathbf{c}=(x,y,z\}$，问当x、y、z分别取什么值时，等式$3\mathbf{a}-5\mathbf{b}+2\mathbf{c}=\mathbf{0}$才能成立？

第二节　数量积与向量积

一、两向量的数量积

首先，我们来建立空间两向量的夹角的概念．设在空间有两向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，交于点M（图7—10）．在两向量所决定的平面上，从一向量的正向到另一向量的正向所需旋转的角度为θ（限定

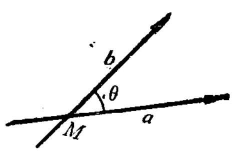

图　7—10