·高中学生数学读物·

换元法

吴大樑

福建教育出版社

换 元 法

吴 大 椽

福建教育出版社

内容提要

本书介绍了中学数学中“元”的形态和相互转化的规律，阐明了“换元法”解题的方法、步骤、注意事项和广阔用途，并揭示了“换元法”的实质，有助于读者掌握“换元法”的运用技巧，提高数学思维水平和解题能力。本书还配有一定数量的习题（附解题提示或答案）供读者自学时练习参考。

本书熔资料与学术性于一炉，可供中学师生和中学教研人员阅读，也可供社会青年自学时参考。

高中学生数学读物

换　元　法

吴大樑

福建教育出版社出版

福建省新华书店发行

福州东门印刷厂印刷

787×1092毫米　32开本　5.75印张　120千字

1989年10月第一版　　1989年10月第一次印刷

印数 1—3,800

ISBN7—5334—0392—4/G·276　定价：1.65元

前言

换元法是一种重要的数学方法。它在中学数学教材中，占有重要的地位，往往被列为高中数学总复习的一个专题。

本书主要是为高中学生写的。首先介绍中学数学中"元"的各种形态以及它们之间的转化，由此引入"换元法"的概念；而后转入本书的重心部分——展示换元法广阔的运用领域，让读者从具体运用中领会换元法的真谛及有关的构造规律；最后，分别从"映射"的观点和"自由度"的观点阐明换元法的实质，指出运用换元法解题时应该注意的问题；力求挖掘有关数学知识与数学方法的思想精蕴，点明其方法论启示，希望对读者有所裨益。

本书选用的例题绝大多数限于全日制中学数学教学大纲规定的范围之内，少数标有"•"号的例题超出"大纲"规定的"基本要求"。

数学是锻炼思维的"体操"。学习数学，最重要的是肯动脑筋，善于思考。希望读者对本书所提供的各个例题的解法，不要贸然接受。最好是先看题目，暂时不看解法，先通过自己思考探寻解法，而后把自己的想法跟书上的解法加以对照。可以肯定地说，在某些问题上，许多读者自己想出的解法会比书上提供的解法更简捷。因为，许多问题的解决并不是非用换元法不可的，即使同样使用换元法，也会有构造

技巧方面的差异。

本书附有习题及其答案或解法提示，供读者思考与练习。

本书编写过程中得到余伟然老师的不少帮助，他不但提供了许多资料，还为本书配置了习题；吾兄大钟对本书作了若干文字上的修饰；我的老师，福建师大欧阳琦副教授对本书的编写提了许多指导性的意见，还精心审阅了本书的初稿。在此，谨表衷心的感谢！

吴大樑

1987 年 8 月

凡　　例

1. 本书例题的编码规则

例3204：指第三章第二节的第 4 个例题．其中第一个数码表示章序，第二个数码表示节序，第三、四个数码的整体表示例序。不分节的章中列举的例题的编码，其第二个数码都记为“ 0 ”

例1003：指第一章的第 3 个例题。

2. 几种符号

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ 含义为：$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$；

$\prod_{i=1}^{n} x_i$ 含义为：$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$；

$\forall x \in G$，表示“集合G中任一元素x”，例如$\forall x \in R$，表示“任一实数 x”；

$\exists x \in G$，表示“集合G中有一元素x”，例如$\exists x \in R$，表示“有一实数x”。

目　　录

一、中学数学中的“元”

1. “元”

初中一年级数学课本上就出现“一元一次方程”这个名称，它指的是“只含有一个未知数，并且未知数的次数是一次的方程”. 这里的“元”指的是“表示未知数的字母”. 一般地说，含有一个未知数的方程称为一元方程；含有两个或两个以上未知数的方程称为多元方程. 这里“元”的数目，指的是表示未知数的不同字母的个数.

就函数而言，也有“一元”与“多元”之分. 具有一个自变量的函数称为一元函数，具有两个或多于两个自变量的函数称为多元函数. 这里的“元”指的是“表示自变量的字母”.

总之，我们把表示未知数（未知量）、变数（变量）的字母统称为元.（“数”与“量”的区别，在于后者带有具体量度单位，而前者不带具体量度单位. 一定种类的量，在取定作为同类量的比较标准的“单位量”以后，都具有确定的数值，亦即都对应一个数.）这是“元”的基本含义（狭义）. 广义地说，表示研究对象（如数、向量、集合、命题、事件等）的文字符号都可称为“元”.

2．常元与变元

在数学中，表示常数的字母称为“常元”．其中表示已知（给定）常数的字母称为“已知元”；表示未知(待定)常数的字母称为“未知元”．例如，方程 $x^2-4x+3=0$ 中的 x，它的值我们还未知，就是“未知元”．通过解方程，这种未知元又可转化为已知元

在公式 $\cos^2x+\sin^2x=1$ 中的 x，既不是已知元，也不是未知元．当 x 代之以任意实数时，这个等式都成立．我们把这种可以在一定范围内取任意值的元称为“变元”．

在函数 $y=f(x)$ 中，自变量 x 可在一定范围内取任意值，因此也是变元，称为“自变元”，y 称为“因变元”．

在公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 中的字母 a、b 也都是变元．一般地说，数学公式中都含有变元，它们可用在一定范围内的任意数值代入．正因为这样，数学公式才表示一般规律．

比如说，“勾三股四弦五”，虽然是大量经验的总结，但还不是理论水平上的一般规律，只有引进适当的符号和变元，才能完善地表述一般规律．在勾股定理的科学表述中就含有变元：

“在△ABC 中，设 C 为直角，a、b、c 为角 A、B、C 的对边的长，则 $a^2+b^2=c^2$．”

这里，a、b、c 都是变元．

用含有变元的符号组合表示一般规律，是数学的一个突出特点，是数学的高度抽象性的标志，也是数学应用广泛性的根源所在．

3. 参变元

在平面解析几何中，方程 $y=kx+b$（其中 k、b 为常数）表示一条直线．这里 x，y 是变元．当 k、b 取确定值而让 x，y 变动时，动点 (x,y) 就描绘一条直线；若赋 k、b 以另外一组确定的值，这个方程就描绘出另外一条直线．可见，我们也可以把 k、b 看作变元，这样 $y=kx+b$ 就表示动直线方程．但 k、b 跟变元 x，y 还应该有所区别，否则我们就难以说清"四元方程 $y=kx+b$"到底表示什么．因此，当我们讨论动直线方程 $y=kx+b$ 时，变元的变动应分为两个层次．在第一层次上，k、b 是常元，x、y 是变元，动点 $P(x, y)$ 在条件 $y=kx+b$ 约束下描绘出一条直线；在第二层次上，k、b 也看成变元，它们各自独立地取任意实数值．这样就得到无穷多条不同的直线，它们组成一个直线系．当 k 确定，b 取任意实数值时，方程 $y=kx+b$ 表示一个平行直线族；当 b 确定，k 取任意实数值时，方程 $y=kx+b$ 表示平面上过点 $(0, b)$ 的直线束（除直线 $x=0$ 外）．

象 k、b 这样的元，称为参变元．相对于参变元 k、b 而言，变元 x，y 又可称为主变元．

参变元是常元，又可看作变元．在第一层次上，它们是常元，在第二层次上它们又成了变元．

关于主变元与参变元的区别，我们还可用力学上的一个简单例子来说明．大家知道，地球上的自由落体运动，遵循公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$，其中 t(秒)表示下落的时间，h(米)表示下落的距离，它们都是变元，而 g 是常元，表示重力加速度．但在研

究不同行星上的自由落体运动时，公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 中的 g 就可取不同的值．这样，g 又成为变元了．这时，公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 中的 g 就是参变元．

应该指出，常元与变元，已知元与未知元，参变元与主变元，也是相对而言的．随着我们看问题角度的改变，它们之间的地位也会发生转化．例如，方程 $f(x)=0$ 中的 x 是未知的常元，但是当我们用函数的观点来研究方程 $f(x)=0$ 时，就把其中的 x 看作变元，即函数 $f(x)$ 的自变元，从而在 x 的变动过程中考察 $f(x)$，看它何时取"零值状态"．于是，解方程 $f(x)=0$ 就是求函数 $f(x)$ 的"零点"．有时，我们又需要把变元看成常元，把主变元看成参变元……请看以下各例．

例1001 分解因式：$x^2-xy-6y^2+x+17y-12$．

解：原式是二元多项式，但我们若把 y 看作常元，则原式成为以 x 为变元的二次多项式．写成 x 的降幂形式为

$$x^2-(y-1)x-(6y^2-17y+12),$$

解方程 $x^2-(y-1)x-(6y^2-17y+12)=0$，得

$$x_1=3y-4,\qquad x_2=-2y+3.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 原式&=(x-x_1)(x-x_2)\\&=[x-(3y-4)]\cdot[x-(-2y+3)]\\&=(x-3y+4)(x+2y-3).\end{aligned}$$

本例中由于暂时把 y（或 x）看作常数，故把二元多项式看作一元多项式，从而可用"求根法"分解因式．其根据

是：

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

其中 x_1、x_2 是方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0)\text{的根.}$$

例 1002 求证：k 为任意实数时，曲线

$$k^2x^3+kxy+2x-(1+k^2)y-(1+k)=0$$

过定点.

分析：所谓曲线"过定点"，从"数"的方面看，就是 $\exists x$、$\exists y\in R$，（作为定点的坐标(x, y)）使

$$k^2x^3+kxy+2x-(1+k^2)y-(1+k)=0,$$

对 $\forall k\in R$ 成立．若把这个等式左边的式子看作以 k 为元的多项式，则它恒等于零．

证明：把曲线方程写成关于 k 的方程的形式

$$(x^3-y)k^2+(xy-1)k+(2x-y-1)\equiv0.$$

（我们用"$\equiv$"代替"$=$"，是要强调"恒等"．）

根据多项式恒等于零的充要条件，得到

$$\begin{cases}x^3-y=0,\\xy-1=0,\\2x-y-1=0.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$

$\therefore$ 所给曲线恒过定点$(1, 1)$.

本例中，我们首先把"形"的问题转化为"数"的问题，其次，把参变元 k 看作主变元，而把主变元 x、y 都看作

参变元，进而看成待定常数．经过这种转化，最终把问题归结为证明方程组$\begin{cases}x^3-y=0,\\ xy-1=0,\\ 2x-y-1=0.\end{cases}$

存在实数解．

关于解由三个方程所组成的二元方程组，我们只要把其中较简单的两个方程联立起来求解，再把求得的解代入第三个方程进行检验．若这解满足第三个方程，则它就是整个方程组的解；若某两个方程的联立组无解或由某两个方程的联立组求得的解不满足第三个方程，则整个方程组便无解．

例1003 试求出一个实数，使对 $\forall a\in R$，它都不是关于 x 的方程 $(a+1)x^2+2x+(1-a)=0$ 的解．

分析：待求的数 x 具有这种性质，它使等式

$$(a+1)x^2+2x+(1-a)=0$$

对$\forall a\in R$都不成立，即不存在实数 a使这个等式成立，也就是说，使关于 a 的方程

$$(a+1)x^2+2x+(1-a)=0$$

无解．

解：把原方程写成关于 a 的方程的形式

$$(x^2-1)a+(x^2+2x+1)=0.$$

本题的要求就是：找出一个实数 x，使这个关于 a 的方程无解．其充要条件为

$$\begin{cases}x^2-1=0,\\ x^2+2x+1\neq 0.\end{cases}$$

解得　$x=1$.

$\therefore$ 所求的实数是 $x=1$.

本题的关键在于如何理解题意及破除思维的某种定势而实现未知元与已知元的灵活转换.

例 1004 解方程

$$x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$$

(其中 a 为给定常数，$a\geqslant-9$)

解：把原方程写成关于 a 的方程的形式

$$a^2-2(x^2-5x-1)a+(x^4-10x^3+22x^2+12x)=0.$$

解得 $\quad a=x^2-6x \qquad (1)$

或

$$a=x^2-4x-2 \qquad (2)$$

把(1)、(2)再看成关于 x 的方程，解得

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{a+9}, \qquad x_{3,4}=2\pm\sqrt{a+6}.$$

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=3+\sqrt{a+9}$，$x_2=3-\sqrt{a+9}$，$x_3=2+\sqrt{a+6}$，$x_4=2-\sqrt{a+6}$.

本例中，我们先把未知元 x 看作已知元，而把已知元 a 看作未知元，解得(1)、(2)后，又还 x 以未知元的地位. 经过已知元与未知元的这样的两次转换，求得原方程的解.

4. 辅助元

我们常常为适应解题的需要而引进某些新元. 它们既不是题设条件中给出的元，也不是求解或求证的关系式中所含的元. 引进这些新元的目的是要把分散的条件联系起来，或把隐蔽的条件显示出来，或在结论与条件之间搭起桥梁. 但是，在最后的结论中这些元将不再出现. 这种旨在促进求解

而引入的而在最后又需要被代换掉的元，叫做辅助元.

辅助元可分为辅助常元和辅助变元两种.

例如，式子 $y=a\sin x\pm b\cos x$（$a>0$，$b>0$）通过引进辅助元$\varphi=\mathrm{arc\ tg}\dfrac{b}{a}$，而化成$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\varphi)$，这里的 φ 就是辅助常元；函数 $y=a\sin^2x+b\sin x+c$（a、b、c 是常数，$a\neq0$）通过引进变元 $u=\sin x$ 而转化为二次函数 $y=au^2+bu+c$. 这里的 u 就是辅助变元.

引进辅助变元也就是换元.

5. 设元

列方程解题，需要引进字母如 x，y，…，表示问题中有关的量，这就是一种设元——引进"未知元"表示待求的常数；以函数为工具研究问题，也常常需要自己选定自变量，这也是一种设元——引进"自变元"以揭示有关量的变化规律；有时，即使是已知的常数，也需要引进一个字母来表示，以便进行运算，这也是一种设元.

关于上述最后一点，需要举几个例子来说明.

例 1005 计算 $\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^3}+\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^3}$.

解：设$\begin{cases}2+\sqrt{3}=x,\\2-\sqrt{3}=y,\end{cases}$ 则$\begin{cases}x+y=4,\\xy=1.\end{cases}$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{x^3+y^3}{x^3y^3}$

$$=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{(xy)^3}=\frac{4^3-3\times1\times4}{1^3}=52.$$

这里的设元，纯粹是为了简洁地表达运算过程.

例1006 化简 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$。

解：设 $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$，则

$$x^3=(\sqrt{5}+2)+(\sqrt{5}-2)$$
$$+3x\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)},$$

即 $$x^3=2\sqrt{5}+3x.$$

$\therefore$ $$x^3-3x-2\sqrt{5}=0,$$

$$(x-\sqrt{5})(x^2+\sqrt{5}x+2)=0.$$

$\because$ $x^2+\sqrt{5}x+2>0$（$x\in R$，$(\sqrt{5})^2-4\times2<0$），

$\therefore$ $$x-\sqrt{5}=0.$$

$\therefore$ $$x=\sqrt{5}.$$

即 $$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}.$$

这里，通过设元，把已知数当作未知数，又通过建立方程，把孤立的元置于一定的关系式中去研究，从而求得原式的化简了的值.

例1007 求 $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$ 的值.

解：设 $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}=\alpha$，$\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\beta$，则

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}(0<\beta<\frac{\pi}{2})$

$\therefore$ $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$， $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

$\therefore$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+1-(\sqrt{6}-2)}{6}=\frac{1}{2}.$$

$\because\qquad -\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2},$

$\therefore\qquad \alpha-\beta=\frac{\pi}{6},$

即
$$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

求反三角函数值的问题，常通过设角，转化为求三角函数值的问题来解．一般地说，设法把生疏的、难以驾驭的问题转化为熟悉的问题，以便驾轻就熟地加以解决．这是一种常用的策略．设元与换元的目的，往往就为了实现这种转化．

例 1008　求证：$\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots+\sqrt[3]{6}}}}}_{n\text{重根号}\,(n\in N)}<2$

证明：设$x_n=\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots+\sqrt[3]{6}}}}}_{n\text{重根号}}$，则

$$x_1=\sqrt[3]{6},\qquad x_n=\sqrt[3]{6+x_{n-1}}\ (n\geqslant 2)$$

现用数学归纳法证明 $x_n<2$。

1．当$n=1$时，$\because x_1=\sqrt[3]{6}<2$，$\therefore$ 结论成立。

2．假设当 $n=k$ 时，结论成立，即$x_k<2$，则

$$6+x_k<8$$

$\therefore\qquad \sqrt[3]{6+x_k}<2,$

即
$$x_{k+1}<2.$$

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，结论也成立。

综合1°，2°，证得原不等式成立。