中学生学习指导丛书

初三几何学习指导

北京西城区教研中心
数学教研室　　编

中学生学习指导丛书

初三几何学习指导

北京西城区教研中心数学教研室 编

北京师范大学出版社

中学生学习指导丛书
初三几何学习指导
北京西城区教研中心数学教研室　编
·
北京师范大学出版社出版发行
全国新华书店经销
北京通县电子外文印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：7　字数：146千
1988年7月第1版　1989年4月第2次印刷
印数：19 001—28 000

ISBN7-303-00329-0/G·146
定价：2.25元

前　言

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学，它在现代生活和现代生产中的应用非常广泛，是学习和研究现代科学和技术必不可少的基本工具．在中学阶段，数学是重要的学科之一．怎样使学生爱学数学、学会数学、会学数学，已成为每个学生、教师所经常思考与研究的问题．已成为每个学生家长所关注的问题．为了帮助青少年学生在中学阶段系统牢固地掌握数学基础知识，加深对基本概念、定理、公式、法则的理解，培养运用基础知识解决问题、分析问题的能力，开阔眼界，活跃思维，激发学生对数学学习的兴趣，我们编写了这套“初中数学学习指导”小丛书．

这套小丛书是以国家教育委员会制定的全日制中学数学教学大纲为依据编写的，共五册，初一、初二、初三代数各一册，初二、初三几何各一册．它的特点是，每册书的每章主要包括以下三个方面的内容：（1）每章前言、（2）单元学习指导、（3）全章小结．

每章开始部分：简介本章内容，分析本章知识的重点、难点；指出应注意的问题；介绍必要的学习方法．

单元学习指导部分：介绍数学知识产生的背景；针对知识的重点、难点讲清基本概念、基本思路；从各个角度来分析概念、巩固概念、分析知识内在的联系、区别、通过例题

介绍典型的解题思路，在例题中尽量采取一题多解、一题多变．并在每单元后配备巩固知识、加强判断分析能力的练习．

每章小结部分：分析一章知识间的联系，总结一章中主要解题思路、数学方法、以及与以后章节的联系，在每章后配有全章练习．

这套小丛书是北京市西城区教研中心数学教研室及西城区部分有经验的教师协同编写的．参加本书编写的有肖淑英、凌为淑、李大贞、康英琴、高秀琴、冼伟强、李松文、欧阳东方、方珊、刘绍贞等十位老师．由于我们水有限，缺乏经验，如有缺点、错误请批评、指正．我们希望这套小丛书能为贯彻我国九年义务教育法，贡献出它的力量．

编者

1987.4．

目　　录

第六章　相似形……………………………………………… 1

第一单元　比例线段……………………………………… 2

第二单元　相似三角形……………………………………21

小结……………………………………………………………45

习题一…………………………………………………………60

第七章　圆…………………………………………………68

第一单元　圆的有关性质………………………………69

第二单元　直线和圆的位置关系………………………91

第三单元　圆与圆的位置关系…………………………117

第四单元　正多边形和圆………………………………138

第五单元　点的轨迹……………………………………164

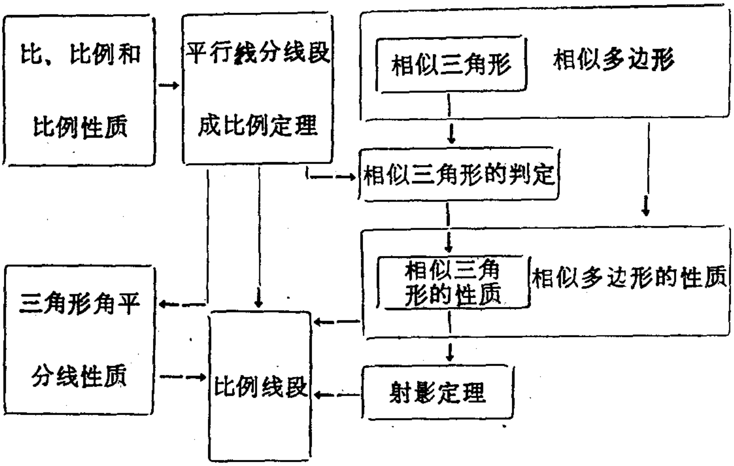
小结……………………………………………………………173

习题二…………………………………………………………200

习题答案或提示……………………………………………207

第六章 相似形

本章知识系统如下表



从表中可知本章主要研究比例线段和相似三角形，最后归结为比例线段．平行线分线段成比例定理是研究比例线段和相似形的理论基础．本章虽然理论性较强，推理论证较严密，知识系统较完整，但是要理解、掌握好知识还是比较容易．由于本章知识的应用较为广泛、灵活而且难度较大，故本章的难点是灵活应用知识，为此需要注意：1.熟练地掌握等比、等积线段的证明方法，（1）构造相似三角形方法；（2）等量（等比）代换法；（3）平行线法．2.掌握好两条基本思路，（1）证明比例线段的基本思路；（2)证明等积线段的基本思路．

本章共有两个单元：比例线段和相似三角形．

建立比例线段的概念和论述比例性质是为研究相似三角形做准备．描述性地论证有关线段成比例的定理，从而建立了研究相似形的最重要，最基本的理论．理解相似形的概念后，着重研究相似三角形的判定、性质和应用．

第一单元　比例线段

一、学习指导

为了研究比例线段，要借助于比例和比例性质．初步利用数、形结合来研究几何问题．

比例性质既要牢固地掌握它又不能死记硬背，要弄清它们之间的互相关系，掌握它们的推理论证的方法，特别要掌握等比性质的推导方法．

两条线段的比指的是它们长度的比，这样，比例线段的问题就可转化为比例问题．

平行线分线段成比例定理是研究比例线段问题的最重要、最基本的定理，根据它导出了线段成比例的一整套理论．为研究相似形打下了坚实的基础．

1．比例

这节主要内容有：比例的概念和比例的性质．一般的比例$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$中的字母都表示不等于零的实数．对比例式$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$的理解不能只理解成两分数$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$相等，应该认识到“实即比值是某一数k”，“即$a=bk$，$c=dk$”．比例的性质是研究比例问题的基础，要从理论上来研究它，即掌握严格的推

理论证方法．以目前的初中代数课的内容看来，对恒等式的推证，所见也甚少，故在学习这个课题时，采取有效的学习措施．首先理解定理的含义，並掌握定理的证明方法，然后通过反复练习，熟练地应用定理．目的在于从理论上来研究它的推证方法．这对以后的学习、对提高推理论证能力都是很有益处的．

例1 已知：$\frac{x}{5}=\frac{y}{6}$，求$(x-y):y$．

解法一： $\frac{x}{5}=\frac{y}{6} \Rightarrow 6x=5y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{5}{6} \Rightarrow$

$\frac{x-y}{y}=\frac{5-6}{6} \Rightarrow \frac{x-y}{y}=-\frac{1}{6}$．

解法二： 设$\frac{x}{5}=\frac{y}{6}=k$，则$x=5k$，$y=6k$．

$$\frac{x-y}{y}=\frac{5k-6k}{6k}=-\frac{1}{6}.$$

解法三： $\frac{x}{5}=\frac{y}{6} \Rightarrow \frac{x-y}{5-6}=\frac{y}{6} \Rightarrow 6(x-y)=-y$

$\Rightarrow \frac{x-y}{y}=-\frac{1}{6}$．

说明： 解法一用了比例的性质定理和合比性质，解法二用了等比性质的推导方法，即将比例式转化为等式，解法三用了等比性质和比例的性质定理．可以看出比例的性质定理起到比例变形的作用．这些解法中，解法二较为简便．

例2 已知：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$．

求证：$\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$．

证法一：

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{b}&=\frac{a^2}{ab}\\ \frac{c}{d}&=\frac{c^2}{cd}\\ \frac{a}{b}&=\frac{c}{d}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a^2}{ab}=\frac{c^2}{cd}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{a}{b},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{b}&=\frac{ab}{b^2}\\ \frac{c}{d}&=\frac{cd}{d^2}\\ \frac{a}{b}&=\frac{c}{d}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ab}{b^2}=\frac{cd}{a^2},$$

$$\Rightarrow\frac{ab+cd}{b^2+d^2}=\frac{a}{b},$$

$$\therefore\quad\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}.$$

证法二： 设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，则$a=bk$，$c=dk$.

$$\because\quad\frac{a^2+b^2}{ab+cd}=\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k+d^2k}=\frac{k^2\,(b^2+d^2)}{k\,(b^2+d^2)}=k,$$

$$\frac{ab+cd}{b^2+d^2}=\frac{b^2k+d^2k}{b^2+d^2}=\frac{k(b^2+d^2)}{b^2+d^2}=k,$$

$$\therefore\quad\frac{a^2+b^2}{ab+cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}.$$

证法三： $\because\quad\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\therefore\quad ad=bc$.

$$\because\quad\frac{a^2+c^2}{ab+cd}-\frac{ab+cd}{b^2+d^2}=\frac{(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2}{(ab+cd)\,(b^2+d^2)}$$

$$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2d^2+c^2d^2-a^2b^2-2abcd-c^2d^2}{(ab+cd)(b^2+d^2)}$$

$$=\frac{(bc-ad)^2}{(ab+cd)(b^2+d^2)}=0,$$

$$\therefore\quad \frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}.$$

证法四：假设$\dfrac{a^2+c^2}{ab+cd}=\dfrac{ab+cd}{b^2+d^2}$成立，

即 $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$,

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2d^2+c^2d^2=a^2b^2+2abcd+c^2d^2.$$

$$b^2c^2-2abcd+a^2d^2=0,$$

$$(bc-ad)^2=0,$$

$$bc-ad=0,$$

$$ad=bc,$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

因为$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$已知，且以上各步均可逆，

所以原等式成立.

说明：证法一和证法二都是利用等量代替来证明等式的，但具体证法不同，可以看出证法二较为简便．证法三是比较法，证法四是分析法，这些方法在以后学习不等式的证明时用得更多.

例3 已知：
$$x=\frac{a+b}{2} \qquad ①$$

$$y=\frac{b+c}{2} \qquad ②$$

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2 \qquad ③$$

求证：b是a，c的比例中项．

分析：要证b是a，c的比例中项，即证$b^2=ac$，已知条件中有x、y，而结论中无x、y，故知要消去x、y．只需将已知条件中的①、②式代入③式即可消去x，y．

证明：将①、②式代入③式，得

$$\frac{2a}{a+b}=\frac{2c}{b+c}=2,$$

$$2a(b+c)+2c(a+b)=2(a+b)(b+c),$$

$$2ab+2ac+2ac+2bc=2ab+2b^2+2ac+2bc,$$

$$2ac=2b^2,$$

$$b^2=ac,$$

即 b是a、c的比例中项．

2．比例线段

这节主要内容有：线段的比，比例线段的概念．两条线段的比指的是在同一单位下，这两条线段长度的比．两条线段的比值与所采用的长度单位无关．由于线段的长度是正数，两条线段的比值一定是正数，这样，就可能把比例的概念和比例性质直接用于比例线段．

例4 如图6-1，在正方形$ABCD$的对角线AC上取$AE=AB$，过E点作AC的垂线交BC于F．

求：$EF:AB=$？

分析：两条线段之比指的是它们长度之比．要求两条线段之比，只要求出它们的长度即可．若设正方形$ABCD$的边长为a，那么只要求出EF的长度即可．

解： $\because$ AC是正方形$ABCD$的对角线，

$\therefore$ $\angle ACB=45°$.

又 $EF\perp AC$，

$\therefore$ $\angle EFC=45°$.

$\therefore$ $EF=CE=AC-AE$

$=AC-AB$.

设 $AB=a$，则$AC=\sqrt{2}a$.

$\therefore$ $\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{AC-AB}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}a-a}{a}=\sqrt{2}-1$.

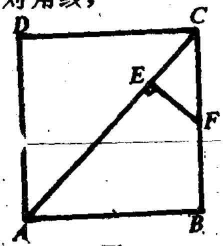


图6-1

例5 如图6-2，已如：$\triangle ABC$中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，且$\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

求：$AD:DE:EB=$？

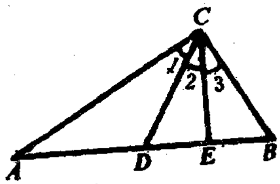


图6-2

解： $\because$ $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，

且 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore$ $\angle A=30°,\angle B=60°,\angle C=90°$，

又 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$，且$\angle 1+\angle 2+\angle 3=90°$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2=\angle 3=30°$，

又 $\angle A=30°,\angle B=60°$，

$\therefore$ $AD=CD=BC$，$CE\perp BD$.

$\therefore$ $DE=EB,DC=2DE$.

$\therefore$ $AD:DE:EB=2:1:1$.

说明： 从本题解法可以看出，求线段的比不一定要求出它们的长度，只要求出它们之间的倍分关系即可.

例6 如图6-3，已知：$\frac{AB}{BD}=\frac{AI}{ID}=\frac{AC}{CD}$，

求证：$\frac{AB+BC+AC}{BC}=\frac{AD}{ID}$.

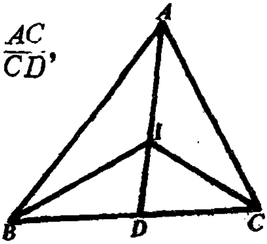


图6-3

证法一： $\frac{AB}{BD}=\frac{AI}{ID}=\frac{AC}{CD}$

$$\Rightarrow\frac{AB+AC}{BD+CD}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=\frac{AI}{ID}$$

$$\Rightarrow\frac{AB+AC}{BC}=\frac{AI}{ID}\Rightarrow\frac{AB+AC+BC}{BC}$$

$$=\frac{AI+ID}{ID}\Rightarrow\frac{AB+AC+BC}{BC}=\frac{AD}{ID}.$$

证法二： 设 $\frac{AB}{BD}=\frac{AI}{ID}=\frac{AC}{CD}=k$，则

$$AB=BD\cdot k, AI=ID\cdot k, AC=CD\cdot k.$$

$$\because\ \frac{AB+BC+AC}{BC}=\frac{BD\cdot k+BC+CD\cdot k}{BC}=\frac{BC(1+k)}{BC}$$

$$=1+k.$$

$$\frac{AD}{ID}=\frac{AI+ID}{ID}=\frac{ID\cdot k+ID}{ID}=\frac{ID(1+k)}{ID}$$

$$=1+k.$$

$$\therefore\ \frac{AB+BC+AC}{BC}=\frac{AD}{ID}.$$

说明： 比例性质完全适用于比例线段，要由比例式得到含有和的比例式，想到利用等比性质、合比性质，如证法一。另外已知若干个比相等，要证两个比相等，可利用等比性质的推导方法，如证法二。

3．平行线分线段成比例定理

平行线分线段成比例定理是研究比例线段问题和研究相似形的最重要、最基本的理论.在中学数学课中，由于线段度量的理论是不可能彻底解决的，只能停留在直观的基础上，为此，对平行线分线段成比例定理的推证，也就不可能严格.因此，学习这定理时，只要求理解，记牢定理本身，并熟习其运用.

把平行线分线段成比例定理运用到三角形中，就得到了这个定理的推论，即"平行于三角形一边的直线截其他两边所得对应线段成比例".进而得到"平行于三角形的一边，并且和其他两边相交的直线，所截得的三角形的三边与原三角形三边对应成比例"这些推论是建立相似三角形判定的基本理论，应该熟练地掌握.

例7 如图6-4，过C点的直线与▱$ABCD$的AB、AD的延长线分别交于E、F.若

$AD:DF=n:m$,

求：$AB:BE=?$

解：

$$\left.\begin{aligned} BC//AD &\Rightarrow \frac{AB}{BE}=\frac{CF}{CE} \\ CD//BA &\Rightarrow \frac{CF}{CE}=\frac{DF}{DA}=\frac{m}{n} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BE}=\frac{m}{n}.$$

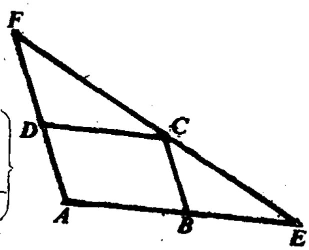


图 6－4

说明： 前面求两条线段之比是通过求它们的长度或它们之间的倍分关系来解决的，学了平行线分线段成比例定理及其推论后，求两条线段之比或证明比例线段，就可利用它们来解决，并且很简便.

例8 如图6-5，已如：在$\triangle ABC$中，P、D、E分别是BC，AB、AC上的点，过D、E作AP的平行线交BC于Q、R，且$AP=DQ+ER$.

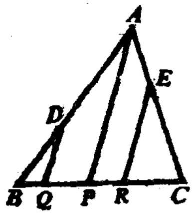


图6-5

求证：$\dfrac{BD}{DA}=\dfrac{AE}{EC}$.

分析：已知条件中有平行线，可利用平行线间的比例线段关系，再设法通过$AP=QD+ER$来证.

证明：$DQ//AP\Rightarrow\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{DQ}{AP}$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\dfrac{BD}{BA-BD}=\dfrac{DQ}{AP-DQ}\\ AP=QD+ER\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{BD}{DA}=\frac{DQ}{ER}.$$

$$ER//AP\Rightarrow\frac{AC}{EC}=\frac{AP}{ER}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\dfrac{AC-EC}{EC}=\dfrac{AP-ER}{ER}\\ AP=QD+ER\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{DQ}{ER}.$$

$$\therefore\ \frac{BD}{DA}=\frac{AE}{EC}.$$

例9 如图6-6，已知M、N分别为四边形$ABCD$的边AB、CD的中点，AD、BC的延长线分别交MN的延长线于E、F.

求证：$\dfrac{ED}{FC}=\dfrac{EA}{FB}$.

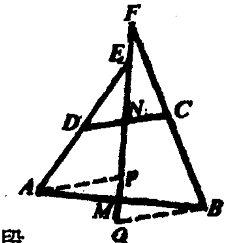


图 6-6

分析：因为ED、EA在一直线上，FC，FB在一直线上，要$\dfrac{ED}{FC}=\dfrac{EA}{FB}$，可证$\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{FC}{FB}$.而四条线段$ED$、$EA$、$FC$、$FB$不在两个三角形上，故要看$\dfrac{ED}{EA}=?$，$\dfrac{FC}{FB}=?$. 但题中没有能得出比例的条件，故知要添加辅助线.而证线段成比例时，常添加平行线为辅助线.

证明：过A点作$AP\parallel DC$交FM于P，

过B点作$BQ\parallel DC$交FM延长线于Q.

则 $\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{DN}{AP}$，$\dfrac{FC}{FB}=\dfrac{CN}{BQ}$.

$\because$ $AP\parallel DC$，$BQ\parallel CD$.

$\therefore$ $AP\parallel QB$，

$\therefore$ $\angle PAM=\angle QBM$，$\angle APM=\angle BQM$，

又 $AM=BM$，$\therefore$ $\triangle APM\cong\triangle BQM$，

$\therefore$ $AP=BQ$，又 $CN=DN$

$\therefore$ $\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{FC}{FB}$，于是，$\dfrac{ED}{FC}=\dfrac{EA}{FB}$.

4．三角形一边的平行线的判定

本节定理是平行线分线段成比例定理的推论的逆定理，是用反证法证明的.在利用直接证法较难或不可能的情况下，可考虑利用间接证法.反证法是间接证法中的一种.