

1978

日本全国大学入学考试

数学题解

(中)



一九七八年

日本全国大学入学考试

数 学 题 解

〔中 册〕

李 开 成 刘 正 一 译

吉 林 人 民 出 版 社

目 录

〔上 册〕

北海道大学.....	1
岩手大学.....	17
东北大学.....	28
筑波大学.....	39
千叶大学.....	55
御茶水女子大学.....	70
东京大学.....	79
东京工业大学.....	104
东京水产大学.....	116
一桥大学.....	124
长冈技术科学大学.....	137
新潟大学.....	145
富山医科大学.....	157
金泽大学.....	165
滨松医科大学.....	177
名古屋大学.....	185
丰桥技术科学大学.....	195
三重大学.....	203
滋贺医科大学.....	214
京都大学.....	227

大阪大学	243
神戸大学	255
奈良女子大学	268
鸟取大学	276
岛根医科大学	288

〔中 册〕

冈山大学	297
广岛大学	310
德岛大学	326
高知大学	338
九州大学	346
九州艺术工科大学	357
长崎大学	368
熊本大学	386
大分医科大学	399
宫崎大学	408
琉球大学	421
旭川医科大学	434
小樽商科大学	448
带广畜产大学	462
北见工业大学	471
北海道教育大学	479
室兰工业大学	487
弘前大学	496

秋田大学	506
山形大学	520
茨城大学	533
宇都宫大学	544
群馬大学	551
埼玉大学	563
电气通信大学	579

〔下 册〕

东京医科齿科大学	587
东京学艺大学	594
东京商船大学	602
东京农工大学	611
横滨国立大学	623
富山大学	639
福井大学	653
山梨大学	662
信州大学	671
静岡大学	684
爱知教育大学	701
名古屋工业大学	711
岐阜大学	719
滋贺大学	727
京都教育大学	735
京都工艺纤维大学	744

大阪教育大学.....	752
神戸商船大学.....	760
奈良教育大学.....	767
和歌山大学.....	774
岛根大学.....	781
山口大学.....	791
香川大学.....	800
爱媛大学.....	808
高知医科大学.....	820
九州工业大学.....	828
福岡教育大学.....	839
佐贺大学.....	846
大分大学.....	859
官崎医科大学.....	873
鹿儿岛大学.....	881

〔附〕

一九七九年日本国立、

公立大学入学考试数学试题.....894

冈 山 大 学

◇理·医·工·药·教育（数学）学部◇

〔考期〕 3月4日 〔时间〕 150分钟 〔评分〕 100分

1 为使下面命题成立，用不等号填①、②空白〔 〕，并决定 k 值的范围：

命题 存在一个常数 k ，如果 $3x + 2y$ ①〔 〕 k ，则 y ②〔 〕 $1 - x^2$ 。

2 a 、 b 、 c 是大于 1 的整数，二次方程

$$ax^2 - bx + c = 0, \quad cx^2 - bx + a = 0$$

各有正整数解 m 、 n ，求 m 、 n 。这里 a 与 c 互为质数、 $a - b + c \neq 0$ 。

3 已知函数

$$f(x) = (1 - 3a^2) \sin x - \int_0^x (\cos^2 t - \sin^2 t) \cos x dt,$$

试用常数 a 表示函数的最大值 M 。其中 $a > 0$ 。

4 在 xy 平面内, 绕着原点旋转, 当直线 $y=x$ 变到直线 $y=(2+\sqrt{3})x$ 时, 试求表示这个旋转变换的矩阵。

5 (1) 证明 在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 内, θ 的函数 $y = \theta - \sin \theta$ 是增函数,

(2) $f(x)$ 是实系数的整式, 曲线 $y = f\left(\sin \frac{\pi x}{2}\right) - \sin f(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处和 x 轴相切, 试求次数最低的 $f(x)$ 。这里设 $f(x)$ 的最高次项的系数是 1。

6 在 xy 平面有二个动点 P, Q 。在时刻 $t (\geq 0)$ 点 P 的坐标是 $(3-e^t, \sqrt{e^t-1})$, 点 Q 以速率 e^t 在射线 $y=ax (a > 0, x \geq 0)$ 上移动。这里 $t=0$ 时点 Q 位于原点。

(1) 若点 P, Q 相迁, 计算常数 a 的值。

(2) 对于(1)中求出的 a 的值。试求点 P, Q 画出的曲线和 x 轴围成的面积。

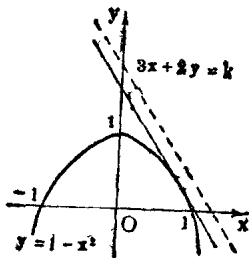
1 (论证)

研究 $y=1-x^2$ 和 $3x+2y=k$ 相切条件是方程

$$1-x^2 = \frac{k-3x}{2}$$

即 $2x^2 - 3x + k - 2 = 0$ 具有重根, 即

$$\begin{aligned} D &= 9 - 4 \times 2(k-2) \\ &= 9 - 8k + 16 \\ &= 25 - 8k \end{aligned}$$



应当为 0。

解答 ①>；②>； k 的范围是 $k \geq \frac{25}{8}$ 。

2 (二次方程)

解答 由题意 $am^2 - bm + c = 0$, ...①

$$cn^2 - bn + a = 0, \quad \dots ②$$

由① $\times n$ - ② $\times m$, $mn(am - cn) - (am - cn) = 0$,

$$\therefore (am - cn)(mn - 1) = 0.$$

由于 $a - b + c \neq 0$, 所以 $m \neq 1$, $n \neq 1$, $\therefore mn - 1 \neq 0$,
所以 $am = cn$. 又因为 a 与 c 互质, 所以

$$m = c, \quad n = a. \quad \dots (\text{答})$$

注意 一般地 $m = kc$, $n = ka$ (k 是自然数)

3 (微积分的综合)

解答 将函数 $f(x)$ 变形,

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - 3a^2) \sin x - \cos x \int_0^x \cos 2t \, dt, \\ &= (1 - 3a^2) \sin x - \cos x \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^x, \\ &= (1 - 3a^2) \sin x - \sin x \cos^2 x, \\ &= \sin^3 x - 3a^2 \sin x, \end{aligned}$$

令 $\sin x = X$, 有

$$F(X) = f(x) = \sin^3 x - 3a^2 \sin x = X^3 - 3a^2 X,$$

$$\begin{aligned} F'(X) &= 3X^2 - 3a^2, \\ &= 3(X + a)(X - a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(-1) &= -1 + 3a^2, \quad F(-a) = 2a^3, \quad F(a) = -2a^3, \\ F(1) &= 1 - 3a^2. \end{aligned}$$

在这里 $|X| \leq 1$, $a > 0$, 又因为

$$F(-a) - F(1) = 2a^3 - (1 - 3a^2) = (a+1)^2(2a-1),$$

$$\therefore M = \begin{cases} F(1) = 1 - 3a^2, & (0 < a \leq \frac{1}{2}), \\ F(-a) = 2a^3, & (\frac{1}{2} < a \leq 1), \\ F(-1) = -1 + 3a^2, & (1 < a). \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$

4 (线性变换)

研究 直线 $y = x$ 上的点, 如果经过旋转后变为

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta - \sin\theta)x \\ (\sin\theta + \cos\theta)x \end{pmatrix},$$

那么因为在直线 $y = (2 + \sqrt{3})x$ 上, 所以

$$\sin\theta + \cos\theta = (2 + \sqrt{3})(\cos\theta - \sin\theta),$$

$$(3 + \sqrt{3})\sin\theta = (1 + \sqrt{3})\cos\theta,$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi, \text{ 由此得到下面矩阵}$$

$$\text{解答 } \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ 为二个.}$$

5 (微分法在数式上的应用)

解答 (1) 设 $g(\theta) = \theta - \sin\theta$, $g'(\theta) = 1 - \cos\theta \geq 0$, 为使 $g'(\theta) = 0$, 在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 内只有 $\theta = 0, 2\pi$, 所以 $\theta - \sin\theta$ 在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 内是增函数。

(2) 由(1)与 $g(0) = 0$, 使 $g(\theta) = 0$ 只有 $\theta = 0$ 。题

$$\text{设 } y = f\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right) - \sin f(x),$$

$$\therefore y' = \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi x}{2} f'\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right) - f'(x) \cos f(x)$$

这里, 曲线切 x 轴于 $x=0$, $x=1$, 则

$$0 = f(0) - \sin f(0) = g\{f(0)\},$$

$$0 = f(1) - \sin f(1) = g\{f(1)\},$$

$$0 = \frac{\pi}{2} f'(0) - f'(0) \cos f(0) = f'(0) \left(\frac{\pi}{2} - \cos f(0) \right),$$

$$0 = -f'(1) \cos f(1).$$

最初二式, 如上述, 意味着 $f(0) = f(1) = 0$,

$$\text{第三式: } \frac{\pi}{2} - \cos f(0) = \frac{\pi}{2} - 1 \neq 0, \therefore f'(0) = 0,$$

$$\text{第四式: } \cos f(1) = 1 \neq 0, \therefore f'(1) = 0,$$

即 $f(x)$ 应满足 $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$, 因此求最高次项系数为 1 的次数最低多项式即可, 这样的多项式明显地是

$$f(x) = x^2(x-1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2. \dots (\text{答})$$

6 (距离, 曲线长)

解答 (1) t 秒钟内 Q 移动的距离是

$$\int_0^t e^t dt = [e^t]_0^t = e^t - 1,$$

设 $y = ax$ 与 x 轴的交角为 θ , 则

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

在时刻 t , 点 Q 的位置是: $\left(\frac{e^t-1}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{e^t-1}{\sqrt{a^2+1}}a\right)$, 若 P 、 Q 相迁, 即在某时刻 t , P 、 Q 重合, 于是下式成立:

$$\frac{e^t-1}{\sqrt{a^2+1}} = 3-e^t, \quad \frac{e^t-1}{\sqrt{a^2+1}} \cdot a = \sqrt{e^t-1}.$$

由第二式得 $e^t = 2 + \frac{1}{a^2}$, 代入第一式, 并整理,

$$a^2 - 1 = \sqrt{a^2 + 1}, \text{ 即 } a^2(a^2 - 3) = 0,$$

$$\text{由 } a > 0, \therefore a = \sqrt{3}. \quad \dots (\text{答})$$

(2) 由 $x = 3 - e^t, y = \sqrt{e^t - 1}$, 消去 e^t , 得 $y = \sqrt{2 - x}$, 这就是点 P 的轨迹, 即 P 画出的曲线方程。它与 $y = \sqrt{3}x$ 的交点是 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, 故所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + \int_{\frac{2}{3}}^2 \sqrt{2-x} \, dx \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} + \left[-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{2}{3}}^2 = \frac{22\sqrt{3}}{27}. \end{aligned}$$

... (答)

◇ 法文·教育(数学除外)·农学部 ◇

〔考期〕 3月4日 〔时间〕 180分钟 〔评分〕 50、100分

(一)

1 x, y, a, b 满足条件

$$x \geq 0, y \geq 0, a \geq 0, b \geq 0,$$

$$2x + y + a = 6, \quad x + 2y + b = 6 \text{ 时,}$$

回答下列问题:

- (1) 画图表示点 (x, y) 的存在范围,
- (2) 求 $2x + 3y$ 的最大值。

2 四次式 $x^4 - x^3 - 9x^2 + 17x - 5$ 除以三次式 $P(x)$ 时, 它的余式 $R(x)$ 满足下列条件 (i)、(ii):

- (i) 不等式 $R(x) \geq 2x - 3$ 的解是 $-1 \leq x \leq 2$;
- (ii) 曲线 $y = R(x)$ 与直线 $y = -4x + 9$ 相切。试求:

- (1) 求 $R(x)$,
- (2) 求适合条件的一切 $P(x)$ 。这里 $P(x)$ 的最高次项的系数为 1。

3 在平面上有四点 A, B, P, Q 。 A, B 为定点, $AB = \sqrt{3}$; 设 P, Q 为动点, 满足

$$AP = PQ = QB = 1。$$

又 $\triangle APB$ 与 $\triangle PQB$ 的面积分别为 S, T 。试求:

- (1) 试求 $S^2 + T^2$ 的取值范围
- (2) 当 $S^2 + T^2$ 为最大时, $\triangle APB$ 是怎样的三角形?

(二)

1 经过矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ 表示的线性变换, 直线 $y = x$ 变为直线 $y = (2 + \sqrt{3})x$ 时, 回答下列问题:

(1) 试求 a 的值,

(2) 经过这个变换, 试求由圆 $x^2 + y^2 = 1$ 变换成的曲线方程。

2 已知二直线

$$x - 1 = \frac{y + 10}{7} = \frac{z - 2}{3}, \quad 2(x - 2) = \frac{y + 3}{2} = -\frac{z - 5}{5}$$

(1) 求二直线交点的坐标,

(2) 求过点 $(5, 4, 1)$, 且垂直于二直线所决定的平面的垂线方程。

3 (1) 试用常数 a 表示 x 的函数

$$f(x) = -2a + \int_0^x (t^2 - a^2) dt$$

的极大值 M ,

(2) 把 (1) 中的 M 看做是 a 的函数, 求 M 为极小时 a 的值。

(一)

1 (不等式和区域)

解答 (1) 由 $a = 6 - 2x - y \geq 0$,

$$b = 6 - x - 2y \geq 0,$$

有 $2x + y \leq 6, \dots \textcircled{1}, \quad x + 2y \leq 6, \dots \textcircled{2}$

再由 $x \geq 0, y \geq 0$, 点 (x, y) 的存在范围是下图中带斜线部分, 包括边界。

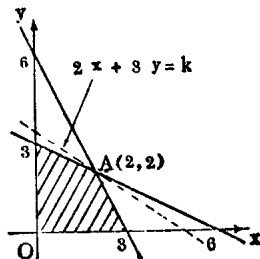
(2) 设 $2x + 3y = k \cdots \textcircled{3}$

我们来讨论③与(1)的区域有公共点时的 k 的最大值。它是当③过①、②的边界线

$$2x + y = 6, \quad x + 2y = 6$$

的交点 $A(2, 2)$ 时 k 才最大, 所以最大值是

$$2 \times 2 + 3 \times 2 = 10 \quad \cdots (\text{答})$$



2 (整式)

解答 (1) 因为除式是三次式, 余式最高为二次式, 故设

$$R(x) = ax^2 + bx + c$$

因 $R(x) \geq 2x - 3$, 故有

$$ax^2 + (b-2)x + (c+3) \geq 0,$$

因为这个不等式的解是 $-1 \leq x \leq 2$, 令 $a < 0$, 它应当和

$$a(x+1)(x-2) \geq 0 \text{ 即 } ax^2 - ax - 2a \geq 0$$

同解。两式比较 $b-2 = -a$, $c+3 = -2a$,

$$\therefore R(x) = ax^2 + (2-a)x - (3+2a), \quad \cdots \textcircled{1}$$

因为 $y = R(x)$ 与直线 $y = -4x + 9$ 相切, 所以方程

$$ax^2 + (2-a)x - (3+2a) = -4x + 9$$

有重根。因此

$$\text{判别式} = (6-a)^2 + 4a(12+2a) = 9(a+2)^2 = 0,$$

$$\therefore a = -2.$$

代入①式 $R(x) = -2x^2 + 4x + 1$. $\cdots (\text{答})$

(2) 根据(1)的结果

$$x^4 - x^3 - 9x^2 + 17x - 5 = P(x)Q(x) - 2x^2 + 4x + 1,$$

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = P(x)Q(x),$$

可是, $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = (x-1)^2(x+3)(x-2)$ 。

因为 $P(x)$ 是最高次项系数为 1 的三次式, 分别考虑 $Q(x)$ 为 $x-1$, $x-2$, $x+3$ 的情形, 则 $P(x)$ 为:

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x+3)(x-2) \\ &= x^3 + 7x + 6. \\ \text{或者} \quad &= (x-1)^2(x+3) \\ &= x^3 + x^2 - 5x + 3. \\ \text{或者} \quad &= (x-1)^2(x-2) \\ &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2. \end{aligned} \right\} \dots (\text{答})$$

3 (三角函数的应用)

解答 (1) 根据余弦定理

$$PB^2 = 1 + 3 - 2\sqrt{3}\cos A$$

$$= 1 + 1 - 2\cos Q,$$

$$\therefore \cos Q = \sqrt{3}\cos A - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

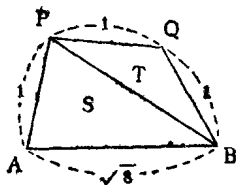
$$S^2 + T^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)^2$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\sin Q\right)^2,$$

$$= \frac{3}{4}(1 - \cos^2 A) + \frac{1}{4}(1 - \cos^2 Q),$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\cos^2 A - \frac{1}{4}(\sqrt{3}\cos A - 1)^2,$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\cos A - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{7}{8}.$$



由①, $0 \leq \cos A \leq 1$, 所以, 当 $\cos A = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 时, $S^2 + T^2$

为最大, 最大值是 $\frac{7}{8}$; $\cos A = 1$ 时有最小值是: $\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$ 。

所以

$$\frac{2\sqrt{3}-3}{4} \leq S^2 + T^2 \leq \frac{7}{8} \quad \dots (\text{答})$$

(2) 当 $S^2 + T^2$ 为最大时, $2\sqrt{3}\cos A = 1$, 由④知

$$\therefore PB^2 = 1 + 3 - 1 = 3, PB = \sqrt{3} = AB$$

所以, $\triangle APB$ 是等腰三角形。 $\dots (\text{答})$

(二)

1 (线性变换)

解答 (1) 首先取变换式

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-1)x \\ (a+1)x \end{pmatrix},$$

经过变换后, 若 $y = x$ 上的点的对应点在 $y = (2 + \sqrt{3})x$ 上,

则

$$(a+1)x = (2 + \sqrt{3})(a-1)x,$$

两边除以 $x (\neq 0)$,

$$(1 + \sqrt{3})a = 3 + \sqrt{3}, \therefore a = \sqrt{3}. \dots (\text{答})$$

(2) $\because a = \sqrt{3}$, 所以

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

线性变换是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}x' + y'}{4}, \quad y = \frac{-x' + \sqrt{3}y'}{4},$$