1978

日本全国大学入学考试

数学题解

（中）

一九七八年

日本全国大学入学考试

数学题解

〔中　　册〕

李开成　刘正一　译

吉林人民出版社

目　　录

〔上　册〕

〔中　　册〕

〔下　　册〕

冈　山　大　学

✧理·医·工·药·教育（数学）学部✧

〔考期〕　3 月 4 日　　〔时间〕　150分钟　　〔评分〕　100分

1　为使下面命题成立，用不等号填①、②空白〔　　〕，并决定k值的范围：

命题　存在一个常数k，如果$3x+2y$①〔　　〕k，则y②〔　　〕$1-x^2$。

2　a、b、c是大于 1 的整数，二次方程

$$ax^2-bx+c=0,\quad cx^2-bx+a=0$$

各有正整数解m、n，求m、n。这里a与c互为质数、$a-b+c\neq0$。

3　已知函数

$$f(x)=(1-3a^2)\sin x-\int_0^x(\cos^2 t-\sin^2 t)\cos x\,dt,$$

试用常数a表示函数的最大值M。其中$a>0$。

4 在xy平面内，绕着原点旋转，当直线$y=x$变到直线$y=(2+\sqrt{3})x$时，试求表示这个旋转变换的矩阵。

5 （1）证明 在$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$内，$\theta$的函数 $y=\theta-\sin\theta$是增函数，

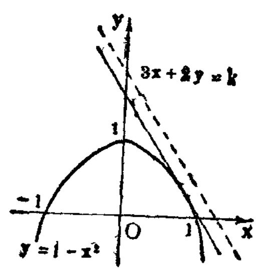
（2）$f(x)$ 是实系数的整式，曲线 $y=f\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)-\sin f(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处和x轴相切，试求次数最低的$f(x)$。这里设 $f(x)$的最高次项的系数是1。

6 在xy平面有二个动点P、Q。在时刻t（$\geqslant0$）点P的坐标是（$3-e^t$，$\sqrt{e^t-1}$），点Q以速率e^t在射线$y=ax$（$a>0$，$x\geqslant0$）上移动。这里$t=0$时点Q位于原点。

（1）若点P、Q相迂，计算常数a的值。

（2）对于（1）中求出的a的值。试求点P、Q画出的曲线和x轴围成的面积。

1 （论证）



研究 $y=1-x^2$和$3x+2y=k$相切条件是方程

$$1-x^2=\frac{k-3x}{2}$$

即$2x^2-3x+k-2=0$具有重根，即

$$\begin{aligned}D&=9-4\times2(k-2)\\&=9-8k+16\\&=25-8k\end{aligned}$$

应当为0。

解答　①>；②>；k的范围是$k\geqslant\frac{25}{8}$。

2 （二次方程）

解答　由题意 $am^2-bm+c=0$，　　…①

$cn^2-bn+a=0$。　　…②

由①$\times n-$②$\times m$，$mn(am-cn)-(am-cn)=0$，

$\therefore\quad (am-cn)(mn-1)=0$。

由于$a-b+c\neq 0$，所以$m\neq 1$，$n\neq 1$，$\therefore\quad mn-1\neq 0$，所以 $am=cn$。又因为 a 与 c 互质，所以

$m=c$，$n=a$。　　…（答）

注意　一般地$m=kc$，$n=ka$（k是自然数）

3 （微积分的综合）

解答　将函数 $f(x)$ 变形：

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(1-3a^2)\sin x-\cos x\int_0^x\cos 2t\,dt,\\
&=(1-3a^2)\sin x-\cos x\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^x,\\
&=(1-3a^2)\sin x-\sin x\cos^2 x,\\
&=\sin^3 x-3a^2\sin x,
\end{aligned}
$$

令 $\sin x=X$，有

$$
\begin{aligned}
F(X)&=f(x)=\sin^3 x-3a^2\sin x=X^3-3a^2X,\\
F'(X)&=3X^2-3a^2,\\
&=3(X+a)(X-a),
\end{aligned}
$$

$F(-1)=-1+3a^2$，$F(-a)=2a^3$，$F(a)=-2a^3$，$F(1)=1-3a^2$。

在这里$|X|\leqslant 1$，$a>0$，又因为

$F(-a)-F(1)=2a^3-(1-3a^2)=(a+1)^2(2a-1)$，

$$\therefore\quad M=\begin{cases}F(1)=1-3a^2, & \left(0<a\leqslant\dfrac{1}{2}\right),\\ F(-a)=2a^3, & \left(\dfrac{1}{2}<a\leqslant 1\right),\\ F(-1)=-1+3a^2, & (1<a)。\end{cases}\quad\cdots（答）$$

4　（线性变换）

研究　直线$y=x$上的点，如果经过旋转后变为

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\cos\theta-\sin\theta)x\\ (\sin\theta+\cos\theta)x\end{pmatrix},$$

那么因为在直线$y=(2+\sqrt{3})x$上，所以

$$\sin\theta+\cos\theta=(2+\sqrt{3})(\cos\theta-\sin\theta),$$

$$(3+\sqrt{3})\sin\theta=(1+\sqrt{3})\cos\theta,$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$\therefore\quad \theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{7}{6}\pi$，由此得到下面矩阵

解答　$\pm\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$，为二个。

5　（微分法在数式上的应用）

解答　（1）设$g(\theta)=\theta-\sin\theta$，$g'(\theta)=1-\cos\theta\geqslant 0$，为使$g'(\theta)=0$，在$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$内只有$\theta=0$，$2\pi$，所以$\theta-\sin\theta$在$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$内是增函数。

（2）由（1）与$g(0)=0$，使$g(\theta)=0$只有$\theta=0$。题

设 $$y=f\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)-\sin f(x),$$

$$\therefore\quad y'=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}f'\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)-f'(x)\cos f(x)$$

这里，曲线切x轴于$x=0$，$x=1$，则

$$0=f(0)-\sin f(0)=g\{f(0)\},$$

$$0=f(1)-\sin f(1)=g\{f(1)\},$$

$$0=\frac{\pi}{2}f'(0)-f'(0)\cos f(0)=f'(0)\left(\frac{\pi}{2}-\cos f(0)\right),$$

$$0=-f'(1)\cos f(1)。$$

最初二式，如上述，意味着$f(0)=f(1)=0$，

第三式：$\frac{\pi}{2}-\cos f(0)=\frac{\pi}{2}-1\neq 0$，$\therefore\ f'(0)=0$，

第四式：$\cos f(1)=1\neq 0$，$\therefore\ f'(1)=0$，

即$f(x)$应满足$f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$，因此求最高次项系数为1的次数最低多项式即可，这样的多项式明显地是

$$f(x)=x^2(x-1)^2=x^4-2x^3+x^2。\cdots(答)$$

6　（距离，曲线长）

解答　（1）t秒钟内Q移动的距离是

$$\int_0^t e^t dt=[e^t]_0^t=e^t-1,$$

设 $y=ax$ 与x轴的交角为θ，则

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}},$$

$$\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}。$$

在时刻 t，点Q的位置是：$\left(\frac{e^t-1}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{e^t-1}{\sqrt{a^2+1}}a\right)$，若$P$、$Q$相迂，即在某时刻 t，P、Q重合，于是下式成立：

$$\frac{e^t-1}{\sqrt{a^2+1}}=3-e^t,\ \frac{e^t-1}{\sqrt{a^2+1}}\cdot a=\sqrt{e^t-1}。$$

由第二式得$e^t=2+\frac{1}{a^2}$，代入第一式，并整理，

$a^2-1=\sqrt{a^2+1}$，即 $a^2(a^2-3)=0$，

由 $a>0$，$\therefore\ a=\sqrt{3}$。 …（答）

（2）由$x=3-e^t, y=\sqrt{e^t-1}$，消去e^t，得$y=\sqrt{2-x}$，这就是点P的轨迹，即P画出的曲线方程。它与 $y=\sqrt{3}x$ 的交点是$\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，故所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+\int_{\frac{2}{3}}^{2}\sqrt{2-x}\,dx$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}+\left[-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{2}{3}}^{2}=\frac{22\sqrt{3}}{27}。$$

…（答）

✧法文·教育(数学除外)·农学部✧

〔考期〕 3月4日 〔时间〕 180分钟 〔评分〕 50、100分

(一)

1 x、y、a，b满足条件

$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，

$2x+y+a=6$，$x+2y+b=6$ 时，

回答下列问题：

（1）画图表示点 (x,y) 的存在范围，

（2）求 $2x+3y$ 的最大值。

2 四次式 $x^4-x^3-9x^2+17x-5$ 除以三次式 $P(x)$ 时，它的余式 $R(x)$ 满足下列条件（i）、(ii)：

（i）不等式 $R(x)\geqslant 2x-3$ 的解是 $-1\leqslant x\leqslant 2$；

（ii）曲线 $y=R(x)$ 与直线 $y=-4x+9$ 相切。试求：

（1）求 $R(x)$，

（2）求适合条件的一切 $P(x)$。这里 $P(x)$ 的最高次项的系数为 1。

3 在平面上有四点 A、B、P、Q。A、B 为定点，$AB=\sqrt{3}$；设 P、Q 为动点，满足

$$AP=PQ=QB=1。$$

又 $\triangle APB$ 与 $\triangle PQB$ 的面积分别为 S、T。试求：

（1）试求 S^2+T^2 的取值范围

（2）当 S^2+T^2 为最大时，$\triangle APB$ 是怎样的三角形？

（二）

1 经过矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ 表示的线性变换，直线 $y=x$ 变为直线 $y=(2+\sqrt{3})x$ 时，回答下列问题：

（1）试求a的值，

（2）经过这个变换，试求由圆 $x^2+y^2=1$ 变换成的曲线方程。

2 已知二直线

$$x-1=\frac{y+10}{7}=\frac{z-2}{3},\quad 2(x-2)=\frac{y+3}{2}=-\frac{z-5}{5}$$

（1）求二直线交点的坐标，

（2）求过点（5,4,1），且垂直于二直线所决定的平面的垂线方程。

3 （1）试用常数a表示x的函数

$$f(x)=-2a+\int_0^x(t^2-a^2)dt$$

的极大值M，

（2）把（1）中的M看做是a的函数，求M为极小时a的值。

（一）

1 （不等式和区域）

解答 （1）由$a=6-2x-y\geqslant0$,

$b=6-x-2y\geqslant0$,

有 $2x+y\leqslant6$, …①, $x+2y\leqslant6$, …②

再由$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，点(x,y)的存在范围是下图中带斜线部分，包括边界。

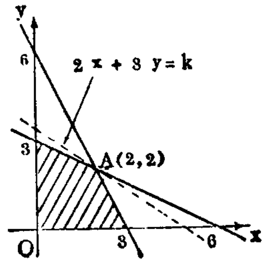
（2）设 $2x+3y=k$ …③

我们来讨论③与（1）的区域有公共点时的 k 的最大值。它是当③过①、②的边界线

$$2x+y=6,\ x+2y=6$$

的交点 $A(2,2)$ 时 k 才最大，所以最大值是

$$2\times2+3\times2=10 \quad \cdots（答）$$



2 （整式）

解答 （1）因为除式是三次式，余式最高为二次式，故设

$$R(x)=ax^2+bx+c$$

因 $R(x)\geqslant 2x-3$，故有

$$ax^2+(b-2)x+(c+3)\geqslant 0,$$

因为这个不等式的解是 $-1\leqslant x\leqslant 2$，令 $a<0$，它应当和

$$a(x+1)(x-2)\geqslant 0 \text{ 即} ax^2-ax-2a\geqslant 0$$

同解。两式比较 $b-2=-a$，$c+3=-2a$，

$$\therefore\quad R(x)=ax^2+(2-a)x-(3+2a), \qquad \cdots①$$

因为 $y=R(x)$ 与直线 $y=-4x+9$ 相切，所以方程

$$ax^2+(2-a)x-(3+2a)=-4x+9$$

有重根。因此

$$\text{判别式}=(6-a)^2+4a(12+2a)=9(a+2)^2=0,$$

$$\therefore\quad a=-2。$$

代入①式 $R(x)=-2x^2+4x+1$。 …（答）

（2）根据（1）的结果

$$x^4 - x^3 - 9x^2 + 17x - 5 = P(x)Q(x) - 2x^2 + 4x + 1,$$

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = P(x)Q(x),$$

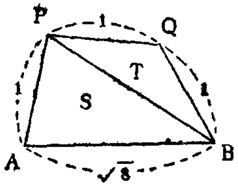
可是，$x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = (x-1)^2(x+3)(x-2)$。

因为 $P(x)$是最高次项系数为 1 的三次式，分别考虑 $Q(x)$ 为 $x-1$，$x-2$，$x+3$的情形，则 $P(x)$为：

$$\left.\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)(x+3)(x-2)\\
&= x^3 - 7x + 6。\\
\text{或者}\quad &= (x-1)^2(x+3)\\
&= x^3 + x^2 - 5x + 3。\\
\text{或者}\quad &= (x-1)^2(x-2)\\
&= x^3 - 4x^2 + 5x - 2。
\end{aligned}\right\}\quad \cdots\text{（答）}$$

3 （三角函数的应用）

解答 （1）根据余弦定理



$$PB^2 = 1 + 3 - 2\sqrt{3}\cos A$$

$$= 1 + 1 - 2\cos Q,$$

$$\therefore\quad \cos Q = \sqrt{3}\cos A - 1 \qquad \cdots①$$

$$S^2 + T^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin Q\right)^2,$$

$$= \frac{3}{4}(1\quad \cos^2 A) + \frac{1}{4}(1 - \cos^2 Q),$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\cos^2 A - \frac{1}{4}(\sqrt{3}\cos A - 1)^2,$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\cos A - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{7}{8}。$$

由①，$0 \leqslant \cos A \leqslant 1$，所以，当 $\cos A = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$时，$S^2 + T^2$

为最大，最大值是$\frac{7}{8}$；$\cos A=1$时有最小值是：$\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$。

所以

$$\frac{2\sqrt{3}-3}{4}\leqslant S^2+T^2\leqslant\frac{7}{8}\qquad\cdots（答）$$

（2）当S^2+T^2为最大时，$2\sqrt{3}\cos A=1$，由④知

$\therefore\quad PB^2=1+3-1=3$，$PB=\sqrt{3}=AB$

所以，$\triangle APB$是等腰三角形。　　　　　　…（答）

（二）

1　（线性变换）

解答　（1）首先取变换式

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a-1)x \\ (a+1)x \end{pmatrix},$$

经过变换后，若$y=x$上的点的对应点在 $y=(2+\sqrt{3})x$上，则

$$(a+1)x=(2+\sqrt{3})(a-1)x,$$

两边除以$x\,(\neq 0)$，

$$(1+\sqrt{3})a=3+\sqrt{3},\ \therefore\ a=\sqrt{3}。\cdots（答）$$

（2）$\because\ a=\sqrt{3}$，所以

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

线性变换是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{3}x'+y'}{4},\quad y=\frac{-x'+\sqrt{3}y'}{4},$$