同侪考研数学辅导丛书
TONGCHAI KAOYAN SHUXUE FUDAO CONGSHU

历年考研数学试题分类解析与应试指导

（数学四）

主　编　夏海峰
副主编　陈光曙　陈学华

- 多年的考研数学辅导实践表明，让考生通过演练历年试题来把握复习重点，打开复习思路和掌握复习策略，是一种十分有效的复习方法.
- 本书由长期从事考研数学辅导的一线教师编写，在系统整理历年考研真题的基础上，根据试题类型和涉及的知识内容进行了分类解答，给出了一般的解题方法和常用技巧.
- 通过解答和研习历年考试真题，不仅可以分析出命题特点，把握主要知识点以及各知识点间的关联特性，感悟到常用的解题思路与方法，而且可以总结出复习的范围、重点和应试解题的思路及技巧，切实提高自己的数学素养和解题能力.

同济大学出版社

同 侪 考 研 数 学 辅 导 丛 书
TONGCHAI KAOYAN SHUXUE FUDAO CONGSHU

历年考研数学试题分类解析与应试指导

（数学四）

主　编　夏海峰
副主编　陈光曙　陈学华

同济大学出版社

内容提要

本书汇编和整理了1987—2005年共19年的全国硕士研究生入学统一考试数学试题(数学四),根据试题类型及涉及的知识内容进行了分类解答,给出了各题的一般解题方法和常用技巧.为了拓宽读者的解题思路,对部分题目还给出了多种解法或证法.本书还以教育部制订的最新《数学考试大纲》为依据,对每一道试题的主要知识点和解题思路等进行了评注,以帮助读者在较短的时间内理解和掌握高等数学、概率论和线性代数各章节的内容、重点和方法.

本书试题解析详细,讲解透彻,除供参加全国硕士研究生入学统一考试(数学四)的考生复习使用外,也可供大专院校在读学生用作学习大学数学的习题训练以及有关教师用作教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

历年考研数学试题分类解析与应试指导.数学.4/夏海峰主编.—上海:同济大学出版社,2005.11
(同侪考研数学辅导丛书)
ISBN 7-5608-3105-2

Ⅰ.历… Ⅱ.夏… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第081093号

同侪考研数学辅导丛书
历年考研数学试题分类解析与应试指导(数学四)
主　编　夏海峰
副主编　陈光曙　陈学华
责任编辑　曹　建　责任校对　杨江淮　封面设计　李志云

出版发行　同济大学出版社
(上海四平路1239号　邮编200092　电话021-65983475)
经　销　全国各地新华书店
印　刷　同济大学印刷厂印刷
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　13.5
字　数　346000
印　数　1—1100
版　次　2005年11月第1版　2005年11月第1次印刷
书　号　ISBN 7-5608-3105-2/O·276
定　价　20.00元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

前　　言

总结我们多年的考研数学辅导经验，我们认为，让考生通过演练历年考研数学试题来把握复习重点，打开复习思路和掌握复习策略，是一种十分有效的应考复习方法. 因为考研复习是一种目的性很强的应试复习活动，考生必须紧紧围绕“应试”这个核心来复习，而最能反映这个核心特征的载体就是往年的考试试题. 通过往年的考试试题解答、研习，可以分析出命题规律动向，把握主要知识点以及各知识点间的关联特点，感悟到常用的解题思路与方法，从而总结出复习的范围、重点和应试解题的思路及技巧，切实提高自己的知识水平和应试能力.

有鉴于此，我们汇集和分类整理了 1987—2005 年共 19 年的全国硕士研究生入学统一考试数学试题（数学四）编成了本书. 我们根据试题类型及涉及的知识内容进行了分类解答，给出了各题的一般解题方法和常用技巧. 为了拓宽读者的解题思路，对部分题目还给出了多种解法或证法. 同时，我们还以教育部制订的最新《数学考试大纲》为依据，对每一道试题的主要知识点和解题思路等进行了评注，帮助读者在较短的时间内理解和掌握高等数学、概率论和线性代数各章节的内容、重点及方法，训练和开拓数学思维，提高分析能力、解题能力和复习效果.

全书共分六章，每章包括“考试内容和要求”、是非题、填空题、选择题、解答题等部分. 所有试题均按照年份排列，试题后面括号里给出的就是该试题的考试年份. 各编者分工如下：陈光曙编写第 1，2，5 章，夏海峰编写第 3，4 章，陈学华编写第 6 章，全书最后由夏海峰统稿.

本书的编写还得到阎超栋、史红波等同志的支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中疏漏、错误和不足之处难免，恳请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2005 年 10 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章　一元函数微分学

1.1　考试内容和要求

1.1.1　函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质

考试要求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系式；

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；

(3) 理解复合函数、反函数、隐函数及分段函数的概念；

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念；

(5) 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限) 的概念；

(6) 理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系；

(7) 了解极限的性质及极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限；

(8) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型；

(9) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理) 及其简单应用.

1.1.2　一元函数微分学

考试内容

导数的概念　导数的几何意义和经济意义　函数的可导性与连续性之间的关系　导

数的四则运算　基本初等函数的导数　复合函数、反函数、隐函数的导数　高阶导数　微分的概念和运算法则　一阶微分形式的不变性　罗尔(Rolle)定理和拉格朗日(Lagrange)中值定理及其应用　洛必达(L'Hospital)法则　函数单调性　函数的极值　函数图形的凹凸性、拐点、渐近线　函数图形的描绘　函数的最大值与最小值

考试要求

(1) 理解导数的概念及可导性与连续性之间的关系,了解导数的几何意义与经济意义(含边际与弹性的概念);

(2) 掌握基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则,掌握反函数与隐函数求导法,了解对数求导法;

(3) 了解高阶导数的概念,会求简单函数的高阶导数;

(4) 了解微分的概念,导数与微分之间的关系,以及一阶微分形式的不变性,会求函数的微分;

(5) 理解罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理,掌握这两个定理的简单应用;

(6) 会用洛必达法则求极限;

(7) 掌握函数单调性的判别方法及其简单应用,掌握函数的极值、最大值和最小值的求法(含解较简单的应用题);

(8) 会用导数判断函数图形的凹凸性,会求函数图形的拐点和渐近线;

(9) 掌握函数作图的基本步骤和方法,会作某些简单函数的图形.

1.2　判断是非题

1. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.　(　　)　(1987)

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$,$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$,所以$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

应填:非.

评注　本题的主要知识点是极限存在充分必要条件为左、右极限存在且相等.

2. 若 $f(x)$ 在(a,b) 内严格单调增加,则 $x \in (a,b)$,总有 $f'(x) > 0$.(　　)　(1987)

解　$f(x)$ 在(a,b) 可导,且 $f'(x) > 0$ 是 $f(x)$ 在(a,b) 内严格单调增加的充分条件,不是必要条件.

应填:非.

评注　本题的主要知识点为函数的单调性.

3. 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 均存在,则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在.　(　　)　(1988)

解　易举反例. $f(x) = x$,$g(x) = \frac{1}{x}$,则$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\frac{1}{x}$

$= 1$，而$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$不存在.

应填：非.

评注　本题的主要知识点是函数极限的运算性质.

4. 若函数 $f(x)$ 的极值点是 x_0，则必有 $f'(x_0)=0$.　　（　　）（1988）

解　易举反例. $f(x)=|x|$，显然 $x_0=0$ 为极小值点，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

应填：非.

评注　本题的主要知识点是可导函数的极值点必为驻点，反之不对.

1.3　填空题

1. 设 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$，$-\infty<x<\infty$，则 ① $f'(x)=$______，② $f(x)$ 的单调性是______，③ 奇偶性是______，④ 其图形的拐点是______，⑤ 凹凸区间是______，⑥ 水平渐进线是______.　（1988）

解　① $f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

② $f'(x)>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，故 $f(x)$ 严格单调增加.

③ $f(-x)=\int_0^{-x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt=-\int_0^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

④ $f''(x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$，$f''(0)=0$ 且在 $x=0$ 两侧异号，故$(0,f(0))=(0,0)$是拐点 .

⑤ 当$x<0$时，$f''(0)>0$；当$x>0$时，$f''(0)<0$，所以凹区间是$(-\infty,0)$，凸区间是$(0,+\infty)$.

⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\int_0^{-\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt=-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$，所以水平渐近线为 $y=\pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

应填：① $e^{-\frac{1}{2}x^2}$；② 严格单调增加；③ 奇函数；④ $(0,0)$；⑤ $x<0$ 时，曲线是凹的；$x>0$ 时，曲线是凸的；⑥ $y=\pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

评注　本题的主要知识点是变上限积分的导数以及利用导数研究函数的基本性质.

2. 曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点$\left(\dfrac{\pi}{2},1+\dfrac{\pi}{2}\right)$处的切线方程是______.　（1989）

解　$y'=1+\sin 2x$，$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$，所以该点的切线方程为 $y-\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)=x-\dfrac{\pi}{2}$，即 $y=x+1$.

应填：$y=x+1$.

评注　本题的主要知识点为导数的几何意义.

3. 某商品的需求量 Q 与价格 p 的函数关系为 $Q=ap^b$，其中，a 和 b 为常数，且 $a\neq 0$，则需求量对价格 p 的弹性是______.　(1989)

解　由弹性公式得 $\varepsilon = p\dfrac{Q'(p)}{Q(p)}$，得 $\varepsilon = p\cdot\dfrac{abp^{b-1}}{ap^b}=b.$

应填：b.

评注　本题的主要知识点为弹性的概念.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$______.　(1990)

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\&=2.\end{aligned}$$

故应填：2.

评注　本题的主要知识点为分子、分母分别乘以 $\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$ 的共轭因子 $\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}$，这是求极限的一般技巧.

5. 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$______.　(1990)

解　因为 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)=A$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}=A,$$

利用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}(f'(x)+a\cos x)=f'(0)+a=b+a=A.$$

故应填：$a+b$.

评注　本题的主要知识点为函数连续性以及洛必达法则.

6. 设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点 $(-1,0)$，且在点 $(-1,0)$ 有公共切线，则 $a=$______，$b=$______，$c=$______.　(1991)

解　$f'(x)=3x^2+a$，$g'(x)=2bx$，由题意得 $\begin{cases}f(-1)=0,\\ g(-1)=0,\\ f'(-1)=g'(-1),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(-1)^3-a=0,\\ b+c=0,\\ 3+a=-2b.\end{cases}$ 解得 $a=-1$，$b=-1$，$c=1$.

故应填：-1，-1，1.

评注　本题的主要知识点为导数的几何意义.

7. 设 $f(x)=xe^x$,则 $f^{(n)}$ 在点 $x=$ ______处取得极小值______.　(1991)

解　$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$,$f''(x)=e^x+e^x+xe^x=(2+x)e^x$,由归纳法易知 $f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$,令 $f^{(n+1)}(x)=(n+1+x)e^x=0$ 得 $x=-(n+1)$,这时

$$f^{(n+2)}(-(n+1))=[n+2-(n+1)]e^{-(n+1)}>0,$$

故 $x=-(n+1)$ 为 $f^{(n)}(x)$ 的极小值点,其极小值为 $-\frac{1}{e^{n+1}}$.

故应填:$-(n+1)$;$-\frac{1}{e^{n+1}}$.

评注　本题的主要知识点为高阶导数、函数驻点以及极值的判别法.

8. 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\frac{x+t}{x-t}\right)^x$,则 $f'(t)=$ ______.　(1992)

解　$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\frac{x+t}{x-t}\right)^x=t\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2t}{x-t}\right)\right]^{\frac{x-t}{2t}\cdot\frac{2tx}{x-t}}=te^{2t}$,所以 $f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}$ $=(2t+1)e^{2t}$.

应填:$(2t+1)e^{2t}$.

评注　本题的主要知识点为重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

9. 设某商品的需求函数为 $Q=100-5p$,其中,Q,p 分别表示需求量和价格,如果商品需求弹性的绝对值大于 1,则商品价格的取值范围是______.　(1992)

解　由 $Q=100-5p$,得 $Q'(p)=-5$,又由需求弹性公式

$$\varepsilon=p\frac{Q'(p)}{Q(p)}=-\frac{5p}{100-5p},$$

但 $|\varepsilon|>1$,即 $\left|\frac{5p}{100-5p}\right|>1$,得 $p>0$ 或 $10<p<20$,又由 $Q(p)=100-5p=0$ 得最高价格为 $p=20$,所以商品价格的取值范围是(10,20].

应填:(10,20].

评注　本题的主要知识点为弹性的概念.

10. 已知 $f(x)=\sin x$,$f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)=$ ______的定义域为______.　(1992)

解　由 $f(x)=\sin x$,得 $f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$,故 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$,其定义域为 $|1-x^2|\leqslant 1$,即 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

应填:$\arcsin(1-x^2)$;$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

评注　本题的主要知识点为复合函数以及函数的定义域.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=$ ______.　(1993)

解

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2+\cdots+n}+\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

应填:$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

评注 本题的主要知识点为数列极限的求法.

12. 已知 $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$,$f'(x)=\arcsin x^2$,则$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ______. (1993)

解 $y'=\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)'\cdot f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)=\arcsin\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$,

所以$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=3\arcsin 1=\frac{3}{2}\pi$.

应填:$\frac{3}{2}\pi$.

评注 本题的主要知识点为复合函数的导数.

13. 已知 $f'(x_0)=-1$,则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$ ______. (1994)

解

因为 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2(f(x_0-2x)-f(x_0))}{2x}+\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}\right]$$

$$=1,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}}$$

$$=1.$$

故应填:1.

评注 本题的主要知识点为导数的定义.

14. 设方程 $\mathrm{e}^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ______. (1994)

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

解　方程两边对 x 求导得 $(y+\mathrm{e}y')\mathrm{e}^{xy}+2yy'=-\sin x$，

解之得
$$y'=-\frac{y\mathrm{e}^{xy}+\sin x}{x\mathrm{e}^{xy}+2y}.$$

应填：$-\dfrac{y\mathrm{e}^{xy}+\sin x}{x\mathrm{e}^{xy}+2y}$.

评注　本题的主要知识点为隐函数的求导法则.

15. 设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 $\mathrm{d}y=$ ______.　(1996)

解　两边取对数得 $\ln x=y\ln y$，再对 x 求导数得
$$\frac{1}{x}=y'\cdot\ln y+y\cdot\frac{1}{y}\cdot y'=y'(1+\ln y),$$
所以 $y'=\dfrac{1}{x(1+\ln y)}$，从而 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln y)}$.

故应填：$\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln y)}$.

评注　本题的主要知识点为对数的求导法则以及微分的概念.

16. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $y'''\Big|_{x=\sqrt{3}}=$ ______.　(1996)

解
$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$y''=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}},$$
$$y'''=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$
$$=(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}(2x^2-1).$$

故 $y'''\Big|_{x=\sqrt{3}}=\dfrac{5}{32}$.

应填：$\dfrac{5}{32}$.

评注　本题的主要知识点为函数的高阶导数以及求导法则.

17. 设 $y=f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $\mathrm{d}y=$ ______.　(1997)

解
$$y'=f'(\ln x)\,\frac{1}{x}\mathrm{e}^{f(x)}+f(\ln x)f'(x)\mathrm{e}^{f(x)},$$
所以

$$dy=\left[f'(\ln x)\frac{1}{x}e^{f(x)}+f(\ln x)f'(x)e^{f(x)}\right]dx.$$

故应填：$\left[f'(\ln x)\frac{1}{x}e^{f(x)}+f(\ln x)f'(x)e^{f(x)}\right]dx$.

评注　本题的主要知识点为复合函数的导数以及微分的概念.

18. 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点为$(\xi_n,0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ ______.　(1998)

解　$y'=nx^{n-1}$，$y'\Big|_{x=1}=n$，所以在(1,1)处点切线方程为 $y-1=n(x-1)$. 令 $y=0$，得 $\xi_n=1-\frac{1}{n}$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$.

故应填：e^{-1}.

评注　本题的主要知识点为曲线的切线方程以及重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

19. 设函数 $f(x)=a^x\quad(a>0,a\neq 1)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$ ______.

(1999)

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln a^{1+2+\cdots+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a$.

应填：$\frac{1}{2}\ln a$.

评注　本题的主要知识点为数列的极限.

20. 若 $a>0,b>0$ 均为常数，则$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ______.　(2000)

解　令 $y=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$，则

$$\ln y=\frac{3}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\times\frac{1}{2}\left(a^x\ln a+b^x\ln b\right)}{\frac{a^x+b^x}{2}}=\frac{3}{2}\ln ab,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=e^{\frac{3}{2}\ln ab}=(ab)^{\frac{3}{2}}.$$

应填：$(ab)^{\frac{3}{2}}$.

评注　本题的主要知识点为洛必达法则以及连续函数的极限.

21. 设生产函数 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中，Q 是产出量，L 是劳动投入量，K 是资本投入量，而 A,α,β 均为大于零的参数，则当 $Q=1$ 时，K 关于 L 的弹性为______.　(2001)

解　当 $Q=1$ 时，有 $1=AL^{\alpha}K^{\beta}$，即 $K=A^{-\frac{1}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}}$，于是 $K'(L)=-\frac{\alpha}{\beta}A^{-\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}-1}$，所以 K 关于 L 的弹性 $\varepsilon=L\cdot\frac{K'(L)}{K(L)}=-\frac{\alpha}{\beta}$.

应填：$-\frac{\alpha}{\beta}$.

评注　本题的主要知识点为弹性的概念.

22. 设常数 $a\neq\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$______.　(2002)

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\frac{1}{1-2a}}$$
$$=e^{\frac{1}{1-2a}},$$

所以，原式 $=\frac{1}{1-2a}$.

故应填：$\frac{1}{1-2a}$.

评注　本题的主要知识点为重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 以及连续函数的极限性质.

23. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$______.　(2003)

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}\cdot\frac{2\ln(1+x)}{x}}$$
$$=e^2.$$

应填：e^2.

评注　本题的主要知识点为第二类重要极限以及等价无穷小的代换

$$\ln(1+x)\sim x(x\to 0).$$

24. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$______，$b=$______.　(2004)

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}\lim_{x\to 0}(\cos x-b)$$
$$=(1-b)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}.$$

当 $x\to 0,\sin x\to 0$,所以 $e^x-a\to 0$,得 $a=1$,而 $x\to 0,\sin x\sim x,e^x-1\sim x$.

故,$1-b=5$,得 $b=-4$.

应填:1;−4.

评注 本题的主要知识点为极限的运算以及等价无穷小的代换.

25. 设 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ ______. (2004)

解

$$y=\arctan e^x-\frac{1}{2}\ln e^{2x}+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$$

$$=\arctan e^x-x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1),$$

$$y'=\frac{e^x}{e^{2x}+1}-1+\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1},$$

所以 $\left.y'\right|_{x=1}=\dfrac{e-1}{e^2+1}$.

应填:$\dfrac{e-1}{e^2+1}$.

评注 本题的主要知识点为复合函数的导数.

26. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ______. (2005)

解 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=0$,而 $\dfrac{2x}{x^2+1}\sim\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\quad(x\to+\infty)$.

故 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}=2$.

故应填:2.

评注 本题的主要知识点为无穷小量的等价代换,即

$$\frac{2x}{x^2+1}\sim\sin\frac{2x}{x^2+1}\quad(x\to+\infty).$$

1.4 选择题

1. 下列函数在定义域内连续的是 ( ) (1987)

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$　　(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>1\end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

解　(B),(C),(D) 中的三个函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,但在 $x=0$ 处都不连续,只有(A) 成立.

故应选(A).

评注　本题的主要知识点为函数的连续性.

2. 若 $f(x)$ 在(a,b) 内可导且 $a<x_1<x_2<b$,则至少存在一点 ξ 使得　(　　)　(1987)

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),a<\xi<b$

(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1),x_1<\xi<b$

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),x_1<\xi<x_2$

(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a),a<\xi<x_2$

解　根据拉格朗日中值定理,若 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 连续,在开区间(a,b) 上可导,且 $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$,故只有(C) 成立.

故应选(C).

评注　本题的主要知识点为拉格朗日中值定理的条件和结论.

3. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$,当 $x\to 0$ 时　(　　)　(1989)

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量　(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量　(D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2^x\ln 2+3^x\ln 3)=\ln 6$,

所以 $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量.

故应选(B).

评注　本题的主要知识点为无穷小量阶的比较以及洛必达法则.

4. 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是　(　　)　(1990)

(A) 偶函数　(B) 无界函数　(C) 周期函数　(D) 单调函数

解　取 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{4}$,则

$$f(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$=\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot e^{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$.

应选(B).(也可利用排除法求解.)

评注　本题的主要知识点为函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性的判断.

5. 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$,且有 $f'(0)=b$,其中,a,b 为非零常数,则　(　　)　(1990)

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导　(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=a$

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=b$　(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=ab$

解　由条件知 $f(1+\Delta x)=af(\Delta x)$，$f(1)=af(0)$，故

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{af(x)-af(0)}{\Delta x}\\&=a\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\\&=af'(0)\\&=ab.\end{aligned}$$

故应选(D).

评注　本题的主要知识点为导数的定义.

6. 下列各式中正确的是　　　　(　　)　(1991)

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$　　　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x&=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\frac{1}{x}}}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)}=\mathrm{e}^0\\&=1.\end{aligned}$$

故应选(A).

评注　本题的主要知识点为重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 以及洛必达法则.

7. 设数列的通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时},\\ \dfrac{1}{n}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是

(　　)　(1991)

(A) 无穷大量　　(B) 无穷小量　　(C) 有界变量　　(D) 无界变量

解　易知

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}x_{2n}=0,$$

所以此数列既不是无穷大量或无穷小量，也不是有界变量，而是无界变量.

故应选(D).

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com