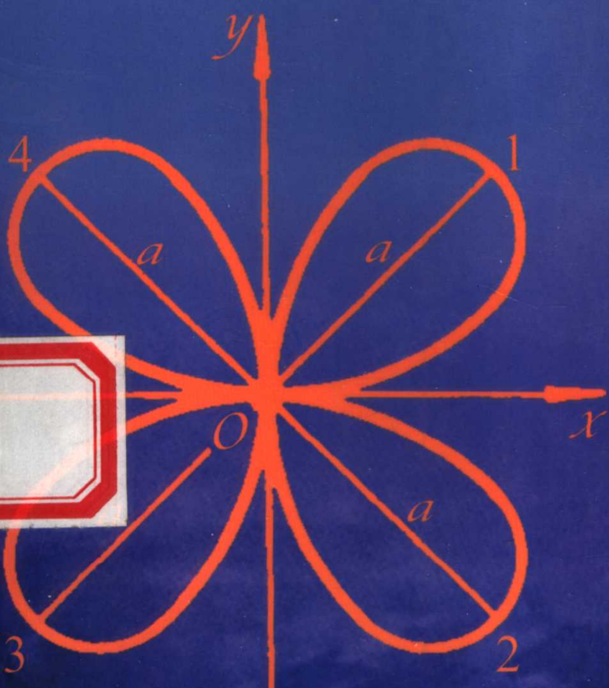
高等学校教材

GAODENGSHUXUE

高等数学

下册

$r = a\sin 2\theta$



张文国 牟卫华 陈庆辉 主编

中国铁道出版社

高等学校教材

高等数学

下册

张文国　牟卫华　陈庆辉　主编

中国铁道出版社

2003年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本系列教材为大学工科各专业公共课教材，共5册：高等数学（上、下册）、线性代数与几何、概率论与数理统计、计算方法。编者根据工科数学教改精神、多年教改课题研究和试验编写，书中融入了许多新的教学思想和方法。本书为高等数学·下册，内容包括多元函数微积分及其应用、无穷级数、常微分方程。

本书也适合作为大专、函授、夜大、自考教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/张文国，牟卫华，陈庆辉主编．北京：中国铁道出版社，2002.8

ISBN 7-113-04784-X

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②牟…③陈… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 060960 号

书　　名：高等学校教材
高等数学·下册
作　　者：张文国　牟卫华　陈庆辉 主编
出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市宣武区右安门西街8号）
责任编辑：李小军
编辑部电话：市电(010)63583214　路电(021)73133
封面设计：冯龙彬
印　　刷：中国铁道出版社印刷厂
开　　本：787mm×960mm　1/16　印张：17　字数：321千
版　　本：2002年8月第1版　2003年5月第2次印刷
印　　数：5001-10500 册
书　　号：ISBN 7-113-04784-X/O·98
定　　价：20.00 元

前　　言

本书是铁道部部级课题、河北省“九五”教育学科规划重点课题“面向21世纪高等工科教育数学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”的研究成果，通过几年的教学实践，广泛征求意见，反复修改而成的一套《高等数学》教材.

本书内容的深度和广度与现行的“高等数学课程教学基本要求”大体一致. 编写中力求做到：渗透现代数学思想，淡化计算技巧，加强应用能力培养. 内容编排上：从实际问题出发——建立数学模型——抽象出数学概念——寻求数学处理方法——解决实际问题. 目的：提高学生对数学的学习兴趣，培养数学建模意识，使学生较好地掌握高等数学方法，提高数学应用能力.

本书在编写过程中，力求突出以下几个特点：

1. 突出微积分学的基本思想和基本方法，使学生在学习过程中能够整体把握和了解各部分内容之间的内在联系. 例如，把微分学视为对函数的微观(局部)性质的研究，而把积分学概括为对函数的宏观(整体)性质的研究；把定积分作为一元函数积分学的主体，不定积分仅仅作为定积分的辅助工具，这样既突出了定积分与不定积分的联系，又节省了教学时数；多元函数微分学中强调“一阶微分形式不变性”，使得多元函数(尤其是各变量之间具有嵌套关系的隐函数)的偏导与微分的计算问题程式化，大大提高学生的学习效率；在定积分、重积分、曲线积分、曲面积分等积分学的应用中，采用“微元法”思想，使学生更容易理解与掌握.

2. 尽可能使分析与代数相结合，相互渗透，建立新的课程体系. 我们独立编写了《线性代数与几何》. 在多元函数微积分学、常微分方程等内容中，充分运用向量、矩阵等代数知识，使表述更简洁.

3. 重视数学应用能力培养，淡化某些计算技巧，删除过时(或不宜在《高等数学》中介绍)的教学内容. 本书注重学生对数学概念的理解和应用，选编了较多的应用例题与练习，其内容涉及到工科各专业. 例如，常微分方程一章中，专门设立“微分方程应用举例”一节，以几何、流量、建筑、振动、运动等典型例题，阐述这些数学模型的建立、求解等. 根据工科学生的实际需要，在保证掌握基本方法的前提下，对工科学生难于掌握的某些特殊计算技巧适当淡化. 另外，随着计算技术的高速发展，某些“近似计算”已经失去意义，不再编入本书. 如，“微分在近似计算中的应用”. 通常作为多元微分学的应用之一的“最小二乘法”，对给定的

一组数据,仅能建立一个经验公式,受本课程内容及学生已有数学知识的局限,而不能说明该公式在何时是有意义的,可能产生误导.因此,还是放在《概率论与数理统计》中讲述较为合适.

4. 尽可能采用现代数学的思维方法,广泛使用现代数学语言、术语和符号,为学生进一步学习现代数学知识奠定必要的基础.内容阐述上尽量遵循深入浅出,从具体到抽象,从特殊到一般等原则,语言上做到描述准确、通俗流畅,并具有启发性.

5. 备有内容丰富、层次多样的习题.为适应不同层次的教学需要,上册习题分为两个部分:“A”部分,主要涉及基本概念、计算与应用;“B”部分,是“A”部分的深化与补充.在各章最后附有“综合习题”,可作为学生自测题.此外,这部分习题还根据“硕士研究生入学数学考试大纲”,结合学生的实际数学能力,适当编写或引入了部分考研题型,特别是综合题型,供基础较好的学生选用.

本书面向工科院校,可作为土木工程、机械工程、电气自动化工程、计算机工程、交通工程、工程管理、经济管理等本科专业的教材或教学参考书,教学中与《线性代数与几何》配套使用.

本书是在石家庄铁道学院、石家庄铁道学院应用数学系的领导和全体教师的支持下完成的.本书分上、下两册.上册内容为一元微积分学,下册为多元微积分学、无穷级数、常微分方程.上册主编为牟卫华、陈庆辉、张文国,参加上册编写的有:牟卫华、陈庆辉、张文国;下册主编为张文国、牟卫华、陈庆辉,参加下册编写的有:张文国、牟卫华、胡荣、李忠定、陈庆辉、孙渤海、司德祯.在编写过程中,顾祝全教授、李高军副教授对书稿进行了认真地审阅,并提出了许多建设性的意见;范瑞琴、李向红、薛志群、王雅茹等老师对习题做了认真的解答.在此,我们表示诚挚的感谢.

本书的书稿虽经过多次试用和修改,但由于编者水平有限,难免有错误和不当之处,敬请读者批评、指正.

编　者

2002年5月

目　录

第四章　多元函数微分学及其应用

前三章我们讨论的是只有一个自变量的函数，称为一元函数. 实际问题中要研究的函数经常涉及到多个自变量，这种函数叫做**多元函数**. 第四至六章将在一元函数微积分的基础上，用推广和发展的思想来讨论多元函数的微积分. 从一元函数到二元函数会有一些新的问题，而从二元函数到二元以上的多元函数则完全可以类推. 在学习中，我们应注意一元函数与多元函数之间的区别与联系.

第一节　多元函数的基本概念

1.1　多元函数的概念

1. 几个重要概念

邻域　在 xOy 平面中，与已知点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 $\delta(\delta > 0)$ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ **邻域**，记为 $U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}.$$

在几何上 $U(P_0, \delta)$ 是以 P_0 为中心，δ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体. 也就是

$$U(P_0, \delta) = \left\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\right\}.$$

类似地可定义点 P_0 的 δ **去心邻域** $\mathring{U}(P_0, \delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0, \delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}.$$

在某些问题中若不必强调邻域半径 δ，则将 $U(P_0, \delta)$ 简记为 $U(P_0)$，$\mathring{U}(P_0, \delta)$ 简记为 $\mathring{U}(P_0)$.

内点　边界点　聚点　设有一个平面点集 E 和一个点 P，若存在点 P 的某个邻域 $U(P)$ 使 $U(P) \subset E$，则称 P 为 E 的**内点**. 显然，若 P 是 E 的内点，则 $P \in E$. 若点 P 的任意邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E

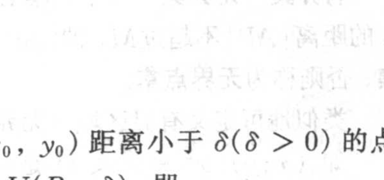


图 4.1　内点与边界点

的点，则称 P 为 E 的**边界点**. E 边界点的全体称为 E 的**边界**. 若对于任给的 $\delta>0$，在 P(P 可属于 E，也可不属于 E) 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 中总有 E 的点，则称 P 是 E 的**聚点**.

如：$E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$，则满足 $1<x^2+y^2<2$ 的点 $P(x,y)$ 都是内点，$x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2=2$ 上的点都是边界点，且 E 中的所有点都是 E 的聚点.

开集　闭集　若点集 E 的点都是内点，则称 E 为**开集**. 若 E 的补集（或余集）是开集，则称 E 为闭集. 亦即若 E 是开集，则 E 与它的边界之并集为闭集.

如 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是开集，而 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭集.

区域　闭区域　设 D 为开集，如果对于 D 内任何两点，都可用属于 D 的折线(其上的点都属于 D) 连接起来，则称开集 D 是**连通的**. 连通的开集称为**区域**或**开区域**. 开区域连同它的边界一起，称为**闭区域**.

如 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是区域，而 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭区域.

有界集　无界集　对于点集 E，若存在 $M>0$，使一切点 $P\in E$ 与某定点 A 的距离 $|AP|$ 不超过 M，即 $|AP|\leqslant M$ 对一切 $P\in E$ 成立，则称 E 为**有界点集**，否则称为**无界点集**.

类似地可定义有界区域与无界区域.

如 $\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 是有界区域，而 $\{(x,y)\mid x>y\}$ 是无界区域.

n 维空间　我们知道，在一元函数中，引入平面直角坐标系后，平面上的点与二元数组 (x,y) 一一对应，从而二元数组 (x,y) 的全体表示 xOy 平面上所有点的集合，称为**二维空间**，记作 $\mathbf{R}^2$. 在空间直角坐标系中，空间上的点与三元数组 (x,y,z) 一一对应，从而三元数组 (x,y,z) 的全体表示空间上所有点的集合，称为**三维空间**. 一般地，设 $n\in\mathbf{N}$，n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为 **n 维空间**①，而每个 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点(或一个 n 元向量)，简记为 x(或 $\boldsymbol{x}$)，数 x_i 称为该点的第 i 个坐标(或第 i 个分量). n 维空间记为 $\mathbf{R}^n$.

n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离规定为：

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

① 若视 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 元向量，则 $\mathbf{R}^n$ 对通常的向量加法与数乘向量运算(即线性运算)封闭，因此也称 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维向量空间.

即向量$\overrightarrow{PQ}$的模长$|\overrightarrow{PQ}|$. 易知它是数轴、平面、空间上两点间的距离公式的直接推广.

关于平面点集的“邻域”、“区域”等概念，可直接推广到 n 维空间.

2. 多元函数的定义

依赖于多个自变量的函数称为**多元函数**. 它在生产和生活中随处可见，如：

例 1.1　在给定区域上的温度 T 依赖于位置坐标 x,y,z 和时间 t，即 $T=T(x,y,z,t)$，温度是四个变量 x,y,z,t 的函数，即四元函数.

例 1.2　在供求平衡的条件下，某种产品的生产利润 L 与产品的产量 x，成本 c，销售价格 p 有关. 因此，L 是 x,c,p 的函数，即 $L=px-c$.

例 1.3　设 R 是电阻 R_1 和 R_2 并联后的总电阻，由电学知识得：$R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$，即电阻 R 是两个自变量 R_1,R_2 的函数.

定义 1.1　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个非空点集，如果对于每一个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定的法则总有确定的实数值与之对应，则称 z 是变量 x,y 的**二元函数**(或称点 P 的函数)，记为

$$z=f(x,y)\quad (\text{或 } z=f(P),\ z=z(x,y)\text{ 等}).$$

点集 D 称为该函数的**定义域**，x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 数集

$$G=\{z\,|\,z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}\subset\mathbf{R}$$

称为该函数的**值域**. 亦即：$f\colon D\to G$.

一般地，可类似地定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，n 元函数也可简记为 $u=f(P)$. 这在形式上与二元函数的表示完全相同，只是这里的 P 是 n 维空间中的点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，而定义域是 n 维空间的子集 D_n，即 $P\in D_n\subset\mathbf{R}^n$，值域仍为 $\mathbf{R}$ 的子集.

对于多元函数的定义域，类似于一元函数，我们约定：以使算式 $u=f(P)$ 有确定实值 u 的自变量所构成的点集为这个函数的定义域（应用问题中带有实际意义的多元函数的定义域，还应受实际意义的限制）.

例如 $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为

$$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\},$$

它是一个有界闭区域.

又如 $u=\ln\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为

$$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\},$$

它是一个有界开区域(如图 4.2).

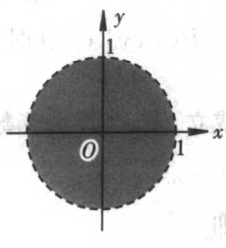


图　4.2

有时函数的定义域包含其部分边界点，例如函数

$$u = \ln(y - x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

的定义域为

$$D_{xy} = \{(x,y) \mid y - x > 0,\ x \geqslant 0 \text{ 及 } x^2 + y^2 < 1\}$$

如图 4.3 所示.

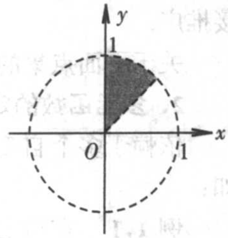


图 4.3

设 $z = f(x,y)$，$(x,y) \in D_{xy}$，称点集

$$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}\}$$

为函数 $z = f(x,y)$ 的**图形(或图象)**. 一般说来，二元函数的图形是一张空间曲面，如图 4.4.

如 $z = x^2 + y^2$ 表示开口向上的旋转抛物面，定义域为 $\mathbf{R}^2$；$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 为上半个单位球面，定义域为 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

空间解析几何中的平面和二次曲面(或二次曲面的某一部分)，一般情况下都是二元函数的图形.

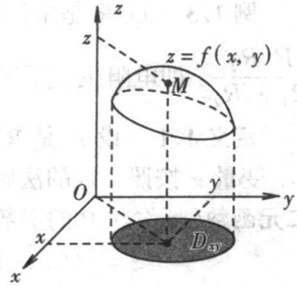


图 4.4

1.2 多元函数的极限与连续

与一元函数的极限的概念相仿，我们建立二元函数极限的概念：当点 $P(x,y) \in D$ 以任何方式(即通过任何路径)无限趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，对应的函数值 $z = f(x,y)$ 如果随之无限趋近于一个定数 A，则数 A 称为当点 P 趋于点 P_0 时函数 $z = f(x,y)$ 的极限.

定义 1.2 设函数 $z = f(x,y)$，$(x,y) \in D$，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点. 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$，总存在数 $\delta > 0$，当

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

且 $P(x,y) \in D$ 时，都有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

成立，则称 **A 为函数** $z = f(x,y)$ **当 $P \to P_0$ 时的极限**，记作

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A.$$

即

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A,$$

或

$$f(x,y) \to A \ (|PP_0| = \rho \to 0).$$

通常称此极限为**二重极限**.

例 1.4　证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

证明　对任给的 $\varepsilon > 0$，令 $\delta = \varepsilon$，则当 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 时，

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\delta}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

例 1.5　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解　$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

例 1.6　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解　由于 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于 $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0^+$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2 \sin\frac{1}{\rho^2} = 0.$$

当然也很容易用二重极限的定义证明上述结果.

多元函数极限的运算性质与一元函数类似，这里从略.

必须指出，通常情况下计算或证明一个二重极限并不容易，对于工科类学生只要求掌握一些基本方法即可. 除此之外，我们还要掌握常用的判定二重极限不存在的方法.

按照定义，点 $P(x,y)$ 以某一特殊方式(如一条定直线或定曲线)趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时其极限可能存在，但不能由此断定函数在该点的极限存在. 反之，**如果当 $P(x,y)$ 以两种不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数趋于不同的值，则函数在该点的极限不存在.**

例如，对于函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{当 } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{当 } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$，

$\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$，而 $\lim\limits_{\substack{y=x\\ x\to 0}} f(x,y) = \dfrac{1}{2}$，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

又如，$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+2y^2} & 当\ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & 当\ x^2+y^2=0\end{cases}$，显然$\lim\limits_{\substack{y=x\\x\to 0}}f(x,y)=0$，而

$\lim\limits_{\substack{y=x^2\\x\to 0}}f(x,y)=\dfrac{1}{3}$，即$(x,y)\to(0,0)$时，$f(x,y)$的极限不存在.

类似地可定义三元及三元以上函数的极限，这里从略.

定义 1.3 设 n 元函数$f(P)$，$P\in G\subset\mathbf{R}^n$，$P_0$ 是 G 的聚点且$P_0\in G$，如果 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$ 则称 **n 元函数$f(P)$在 P_0 点连续**. 如果 $f(P)$ 在 G 上各点处都连续，就称 **$f(P)$ 在 G 上连续**，或称 **$f(P)$ 是 G 上的连续函数**.

与一元函数类似我们可给出多元初等函数的概念，且有结论：**一切多元初等函数在其定义区域内是连续的**. 所谓定义区域是指包在定义域内的区域.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上多元连续函数有下列性质：

性质 1 **有界闭区域 G 上的多元连续函数在G 上有界；**

性质 2 **有界闭区域 G 上的多元连续函数在G 上必有最大值和最小值；**

性质 3 **有界闭区域 G 上的多元连续函数必取得介于其最大与最小值之间的一切值.**

习　题　4.1

1. 已知函数 $f(x,y)=x^3-2xy+3y^2$，试求：

(1) $f(-2,3)$；　(2) $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{2}{y}\right)$；　(3) $\dfrac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$，$f(x,x)$，$f(x,f(x,x))$.

3. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；　(2) $z=\ln(y+x)+\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　(4) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. 求下列函数的定义域，并画出定义域的图形：

(1) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；　(2) $z=\ln[(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)]$；

(3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2xy}}$；　(4) $z=\sqrt{\ln\dfrac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

5. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} (1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$;　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

6. 证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

7. 证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

第二节　偏　导　数

2.1　偏导数的概念及其计算

在一元函数微分学中，我们由函数的变化率引入了导数概念. 对于多元函数同样要研究其变化率问题，但这要比一元函数复杂些. 例如，在热力学中，理想气体的体积是压力 p 和温度 T 的函数：$V = \dfrac{RT}{p}$（R 是常数）. 常常需要在等温条件下压缩气体，考察气体体积对压力的变化率；在等压条件下利用气体膨胀作功，考察气体体积对温度的变化率.

从数学上看，就是要研究多元函数对某一个自变量(其余自变量看作常数)的变化率问题.

定义 2.1　设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定为 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量(称为**关于 x 的偏增量**)

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的**偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)},\ z_x(x_0, y_0),\ z_x'(x_0, y_0) \text{ 或 } f_x(x_0, y_0),\ f_x'(x_0, y_0).$$

类似可定义函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数，有

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0).$$

如果函数 $z = f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 或 y 的偏导数都存

在，那末这个偏导数也是 x,y 的函数，称为函数 $z=f(x,y)$ 对 x 或 y 的**偏导函数**(在不引起混淆的情况下，简称**偏导数**)，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ f_x(x,y),\ f_x'(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ f_y(x,y),\ f_y'(x,y).$$

由偏导数的定义可知，若 $f(x,y)$ 的偏导函数存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值.

偏导数的概念可以直接推广到二元以上的函数. 例如，三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

由此可知，**实际求多元函数的偏导数，不需要用新方法，用一元函数的微分法即可，只是对某一个自变量求导时，把其余自变量暂时看作常量罢了**.

例 2.1 求函数 $f(x,y)=2x^2+y+3xy^2-x^3y^4$ 在点(1, 1)处的偏导数.

解 $f_x(x,y)=4x+3y^2-3x^2y^4$，即 $f_x(1,1)=4$；

$f_y(x,y)=1+6xy-4x^3y^3$，即 $f_y(1,1)=3$.

例 2.2 $f(x,y)=x\cos(1-y)+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解 要求 $f_x(x,1)$，不必求出 $f_x(x,y)$，可先求得 $f(x,1)=x$，从而 $f_x(x,1)=1$.

由此看来，“先求偏导函数再代值求某点的偏导数”不一定是最简便的。

例 2.3 求函数 $z=x^2\sin 3y+ye^{xy}$ 的偏导数.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sin 3y+y^2e^{xy}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^2\cos 3y+(1+xy)e^{xy}$.

例 2.4 求三元函数 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 的偏导数.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

由于 u 关于 x,y 和 z 是轮换对称的(即任意互换两个变量的记号,其函数不变)，所以,有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

例 2.5 已知理想气体的状态方程 $pV=RT$(R 为常量)，求证：

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$