中国科普名家名作

院士数学讲座专辑

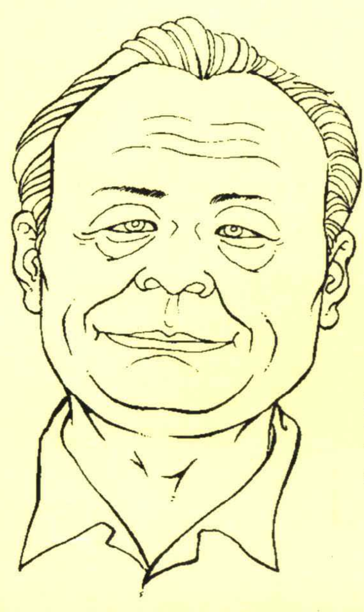
SHUXUE YU ZHEXUE

数学与哲学

——张景中院士献给数学爱好者的礼物

最新版

ZHANGJINGZHONG ZHU



张景中◎著

中国少年儿童出版社

中国科普名家名作

院士数学讲座专辑

数学与哲学

——张景中院士献给数学爱好者的礼物

最新版

张景中◎著

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学与哲学/张景中著．—北京：中国少年儿童出版社，2003.8
（院士数学讲座专辑）
ISBN 7-5007-6684-X

Ⅰ．数… Ⅱ．张… Ⅲ．数学哲学问题-少年读物 Ⅳ．01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第039643号

SHUXUE YU ZHEXUE

出版发行：中国少年儿童出版社
出 版 人：

作　　者：张景中　**装帧设计**：田家雨
责任编辑：陈效师　许碧娟　**美术编辑**：颜　雷
责任校对：沈溰成　**责任印务**：宋世祁

社址：北京东四十二条21号　**邮政编码**：100708
电话：086-010-64032266　**传　　真**：086-010-64012262
24小时销售咨询服务热线：086-010-84037667

印刷：河北新华印刷一厂　**经销**：新华书店

开本：850×1168　1/32　**印张**：5.75　**插页**：1
2003年8月河北第1版　2003年8月河北第1次印刷
字数：115千字　**印数**：1—8000册

ISBN 7-5007-6684-X/O·75　**定价**：9.00元

目　录

一、"万物皆数"观点的破灭与再生 …… 1
二、哪种几何才是真的 ………………… 14
三、变量·无穷小·量的鬼魂 …………… 25
四、自然数有多少 ……………………… 38
五、罗素悖论引起的轩然大波 ………… 54
六、数是什么 …………………………… 67
七、是真的,但又不能证明 …………… 88
八、数学与结构 ………………………… 99
九、命运决定还是意志自由 ………… 118
十、举例子能证明几何定理吗 ……… 140
十一、数学与哲学随想 ……………… 152

一、“万物皆数”观点的破灭与再生

——第一次数学危机与实数理论

古代的哲学家大都是博学多才的人，他们不但能滔滔不绝地讲哲学，还能讲包括数学在内的其他科学。你不要以为这是因为古人特别聪明，或是因为后来的哲学家不行。其实，主要是因为那时各门科学还没有分家，哲学是包罗万象的知识体系。另外，那时人类的知识比现在贫乏得多。所谓博学，是相对于当时多数人知识贫乏而言。实际上，古代所谓精通数学的哲学家，他的数学知识未必赶得上今天的中学生。

在古希腊，哲学家大都格外重视数学。最早的唯物主义哲学家泰勒斯，提出了原子唯物论的德谟克利特，最早的唯心主义哲学家毕达哥拉斯，都曾到埃及学习几何知识。创立理念论唯心主义体系的柏拉图，也特别推崇数学知识。在这些人当中，最推崇数学、在数学上成就最大的，当推毕达哥拉斯。

毕达哥拉斯学派的信条——万物皆数

毕达哥拉斯（约公元前 580 年～约公元前 500 年）是古希腊著名的数学家和哲学家，早年曾游历埃及、波

斯学习几何、语言和宗教知识，回意大利后在一个名叫克罗顿的沿海城市定居。在那里，他招收了300门徒，建立了一个带有神秘色彩的团体。这个团体被人们称为毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯被他的门徒们奉为圣贤。凡是该学派的发明、创见，一律归功于毕达哥拉斯。这个学派传授知识，研究数学，还很重视音乐。“数”与“和谐”，是他们的主要哲学思想。

他们沉醉于数学知识带给他们的快慰，产生了一种幻觉：数是万物的本原；数产生万物，数的规律统治万物。他们认为：1是最神圣的数字，1生2，2生诸数，数生点，点生线，线生面，面生体，体生万物。

现在看来，“万物皆数”的说法当然是荒唐可笑的。但是，毕达哥拉斯最早指出事物间数量关系所起的重要作用，这在人类认识史上是一个进步。

与此类似，我国古代也有“一生二、二生三、三生万物”的说法，这也是万物皆数的哲学思想，只是没那么明确和系统罢了。

有趣的是，正是毕达哥拉斯学派自己的发现，导致了“万物皆数”理论的破灭。

第一个无理数

毕达哥拉斯在欧洲是第一个发现了勾股定理并给出了证明的人。据说，他在观察地板上的方形图案时，发现以直角三角形的斜边为边长的正方形的面积，恰好是以这个直角三角形的两条直角边为边长的正方形的面积

之和，于是受到启发，进一步找出了一般证明（图 1)。

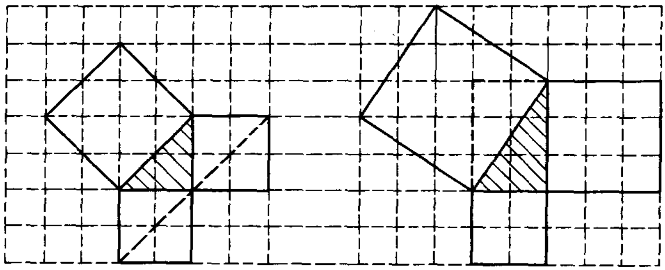


图 1

根据勾股定理，边长为 1 的正方形，其对角线的长度应当是$\sqrt{2}$。毕达哥拉斯的门徒希帕苏斯发现，$\sqrt{2}$既不是自然数，也不是分数。因为，如果有两个自然数 m 和 n 使

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}\text{ 既约}\right), \tag{1.1}$$

则两端平方后可得

$$2m^2=n^2。 \tag{1.2}$$

由于 $2m^2$ 是偶数，所以 n 必为偶数。又因为$\frac{n}{m}$既约，所以 m 是奇数。于是（1.2）左端不能被 4 整除，右端可以被 4 整除，矛盾。

这个事实的发现，是毕达哥拉斯学派的一大成就。因为它不能从经验与观察得出，只能靠抽象的思考证明，它标志着人类的思维有了更高的抽象能力。

关于勾股定理，在中国、巴比伦，有的数学家比毕达哥拉斯知道得早得多。但是东方数学家始终没有发现$\sqrt{2}$不能表示为分数这一矛盾。这也许与东方数学仅着重

于解决实际问题，忽视抽象思维有关。这一现象颇有趣。也许数学史与哲学史的研究者能从社会、政治、文化的角度作更好的说明。

然而，这一发现使毕达哥拉斯学派大伤脑筋，因为他们心目中的数只有自然数与自然数之比——分数。万物皆数，就是万物皆可用自然数或分数来表示，如今发现边长为 1 的正方形的对角线竟不能用“数”来表示，岂不证明自己学派的信条不是真理吗？

毕达哥拉斯学派千方百计封锁，不让这一发现传出去，甚至把泄露了这一秘密的希帕苏斯抛入大海。但真理是锁不住的，这个发现最终还是被传播开来。

当时研究数学的希腊学者们，虽然不一定赞同“万物皆数”的观点，却仍认为在数学当中，算术比几何更基本、更重要。现在知道了有些几何线段不能用数来表示，他们便对数的重要性产生了怀疑，转而把几何看成更基本的数学了。于是，几何学的研究便繁荣昌盛起来。直到非欧几何被发现，几何在数学中的基础地位才又让位于算术。

无理数之谜

本来，哲学家们认为世界上的量都可以用数来表示。你看，在一根长为 1 的线段上，中点可以用$\frac{1}{2}$表示；把线分成 3 段，分点可以用$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{3}$表示；分成 5 段，分点可用$\frac{1}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{4}{5}$表示……也就是说，分数可以

表示极小极小的量。任何两个分数，无论它们在数轴上挨得多么近，它们之间总还有无穷多个分数。但现在这么多的数，居然不能表示某些线段的长度。这一事实令当时的哲学家极度震惊，数的万能的力量被否定了！这就是数学史上的第一次数学危机。

对“边长为 1 的正方形的对角线的长度$\sqrt{2}$究竟是什么”这个问题，欧洲哲学家与数学家在过去的两千多年间一直陷在迷雾中。数学家们一方面为了解题不得不使用根式，另一方面又说不清带根号而得不出准确值的东西是不是数。直到 17 世纪，还有一些数学家坚决不承认无理数是数。

无理数之谜与连续性的概念密切相关。

连续性的奥秘

世界上有些平平常常的事，仔细想想又有点怪。比如说，两个朋友几天不见了，偶然在街上碰见，彼此马上就能认出来，打招呼。能认出来，似乎是当然的事。可是细追究起来，这又很怪。几天之内，两人的模样变了没有呢？当然变了。要是几天之内不变，那几年、几十年也不会变，人怎么能由小到大，到老呢？既然变了，又为什么能认出来呢？只能说，变化很小。变化小到什么程度呢？时间越短，变化越小。如果你盯着一个婴儿不停地看，你简直不可能说他在变。其实几年之后，他确实明显变大了。这变化是逐渐的，不间断的。

世界上的事物在不停地变化。尽管如此，我们仍能知道甲是甲，乙是乙，这是因为事物的变化大多是一点

一点改变的，通常不会一下子突然变个样。这就给我们一个感觉：许多变化是连续的。

事物变化的连续性是我们的感觉，但感觉不一定都是正确的。电影实际上是由许多不同的画面构成的，它不是连续变化的。可是因为相继的两个画面相差甚微，我们便以为它是连续的了。我们的直觉告诉我们，世界上许多事物的变化是真正连续的，不是像电影那样由微小的跃变所组成的。测量技术永远不可能证实这种直觉。事实上，如果物质由分子、原子组成，事物的成长是不可能连续进行的。不过，这并不妨碍我们形成“连续”的概念。我们可以想：时间的变化是连续的，运动是连续的。一个点从一条线段的这一端到达另一端，它应当经过线段上的一切点！

经过一切点又是什么意思呢？设线段长度是 1，我们来考察运动的点与出发点的距离。在运动中，这个距离从 0 渐渐变为 1。它经过线段上的一切点，就是这个距离的数值取遍 0 到 1 之间的一切数。

那么，0 到 1 之间的一切数又是哪些数呢？当初，人们还不知道$\sqrt{2}$这种无理数，这一切数就指比 0 大比 1 小的分数。有了无理数，就麻烦了。在 0 与 1 之间有无穷多个无理数，像$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{4}$，等等。是不是把这些带根号的怪物添上就够了呢？很难说。说不定什么时候又发现了新的无理数。

连续性的问题是自古以来哲学家们都谈论过的问题，它与无穷问题密切相关。因为连续变化必然经过无穷个不同的阶段。毕达哥拉斯、芝诺、亚里士多德、莱

布尼茨等学者都讨论过连续性问题。然而如何建立"连续性"概念，始终是哲学家面前的难题。

这困难不可能在哲学中解决。因为它已转化为数学上的困难：在 0 与 1 之间，除了有理数之外究竟还有哪些数？更进一步，"全体实数"是哪些东西？

哲学对连续性的看法是说不清楚的。对于数学家与物理学家来说，在弄清实数是什么之前，对连续性的看法也是说不清的。例如：

亚里士多德认为：当两个互相接触的物体各自的端点成为两者的共同端点时，就会出现连续的联接。他不承认连续直线由无穷多点组成的说法。

伽利略反对亚里士多德的看法，认为连续的东西可以由无限个元素组成，好比一种可以研成极细粉末的固体。

莱布尼茨提出"连续性定律"，认为世界上的一切东西都是连续变化的。他和牛顿大体上有相同的看法：数学上的连续性是用无穷小量来定义的一个理想概念。这个无穷小量，似乎类似于伽利略的"极细粉末"。

这里有一个困难：一粒粉末有没有体积？如果体积是 0，加起来岂不还是 0？如果体积不是 0，无穷粒粉末加起来体积又怎能有限呢？可能亚里士多德已经看到了这个困难，所以坚决反对直线（或物体）由无穷多个点组成的看法。但是，正如伽利略指出的那样，有穷个不可分的东西组成的东西，又怎能连续变化呢？

戴德金分割

直到 19 世纪末，即两千多年的探索之后，连续统

的公认概念才出现，数学上严格的实数理论建立了。

戴德金与康托尔几乎同时提出了实数理论。这里是按戴德金的方法陈述的。

设想一条连续的直线，它由无穷多点组成。取定原点和单位尺度，直线上的许多点都可以用分数表示。这是我们已经知道了的。我们又知道一些不能用分数表示的点，比如$\sqrt{2}$代表的点。我们不知道的是，为了使直线是连续的、天衣无缝的东西，还需要添上些什么。

设想用一把锋利无比的刀，猛地砍向直线，会发生什么情况呢?

这一刀，应当砍在直线的某一点 P 上。如果不然，砍在空隙里，直线还能叫天衣无缝吗？于是，如此细的直线被斩为两截。问题是：点 P 在哪一段上呢？左边还是右边?

我们只能说：不在左边，就在右边（图 2)。

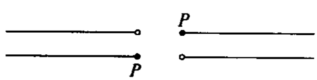


图 2

这样一想，直线的连续性就归结为一个直观而简单的事实：不论从什么地方折断，折断的地方总有一个点。

然而这会不会成为同义反复呢？“地方”，不就是点吗?

我们可以设法消除这个同语反复的潜在危险，不用点来规定“地方”。

直线上已经有了很多用有理数表示的点。直线一断，就把这些有理点分成了较大和较小的两个集合，而直线的折断之处也给两个集合之间确定了一个位置。

用数学语言说，就是把有理数分成两个集合 A、B，

如果 A 中每个数都比 B 中每个数小，那么这一对集合 $\{A, B\}$ 就叫做有理数的一个分割。A 叫做分割的下集，B 叫分割的上集。有理数的分割确定了上下两集之间的位置。

有时这个位置已经被有理数占据了。比如，A 是所有的负分数之集，B 是其余的有理数，则 B 中有最小数 0，0 就是直线折断之处。因此，要是 A 有最大数或 B 有最小数，就说分割 $\{A, B\}$ 确定了一个有理数——即 A 的最大数或 B 的最小数。

如果 A 中没有最大数、B 中也没有最小数呢？这是可能发生的。比如，所有那些平方大于 2 的正有理数（如 $\frac{8}{5}$，$\frac{5}{3}$，2，…）组成 B 集，其余的有理数组成 A 集。这个分割的下集无最大数，上集也无最小数。它留出了一个空隙，这个空隙就应当请一个无理数填补。这个无理数正是 $\sqrt{2}$。

结论有了：有理数的一个分割确定一个实数。这个实数也许是有理数（如果分割不产生空隙），也许是无理数（如果有空隙）。

这种分割叫做"戴德金分割"。说得干脆一点，实数就是有理数的分割。

利用有理数的 +、−、×、÷ 可以规定分割的四则运算，用有理数的大小可以定义分割的大小——这其实就定义了实数的 +、−、×、÷ 与大小。

回头再想，问题很简单。把有理数之间的缝隙都填上，直线不就连续了吗？问题本身就提供了解答！这么"简单"的答案，人类居然要经过两千多年才认识到！

科学的发展，重大概念的产生，其过程都是非常艰辛的。任何一个创造，在实现之前，都是困难的。因为人们是在无知中摸索，摸到之后，就成为简单的了。

实数说清了，一切事物的量变又可以用数来刻画了。

连续归纳原理

第一次数学危机被克服了，各种各样彼此实质等价的实数理论建立起来了。从那以后，数学家们建立了一系列的定理来刻画实数的性质。

有趣的是，有一条十分简单、十分便于应用和掌握的定理，直到20世纪80年代才被发现。

这就是连续归纳原理，或者叫连续归纳法。它与熟知的数学归纳法十分相似，请看：

关于实数的连续归纳法*

设 P_x 是关于实数 x 的一个命题。

如果

(1) 有某个实数 x_0，使得对一切实数 $x < x_0$，有 P_x 成立；

(2) 若对一切实数 $x < y$ 有 P_x 成立，则有 $z > y$，使 P_x 对一切实数 $x < z$ 成立。

那么，对一切实数 x 有 P_x 成立。

关于自然数的数学归纳法

设 P_x 是关于自然数 n 的一个命题。

如果

(1^*) 有某个自然数 n_0，使对一切自然数 $n < n_0$，有 P_n 成立；

(2^*) 若对一切自然数 $n < m$ 有 P_n 成立，则有自然数 $k > m$，使 P_n 对一切自然数 $n < k$ 也成立。

那么，对一切自然数 n 有 P_n 成立。

---

* 张景中：《连续归纳法与一般归纳原理》，四川教育学院学报，1986，1。

这两种归纳法极为相似。这在某种程度上说明了连续的实数系与离散的自然数系在一定条件下的统一性。

那么，连续归纳法在实数理论中有什么地位呢?

已经弄清:

(1) 它可以作为刻画连续性的公理，以替代目前实数理论中的有关公理。

(2) 从它可以用统一的模式推出已知的一系列关于实数的定理。

(3) 从它可以用统一的模式证明微积分中涉及连续性的各个命题。

连续归纳法的发现，有可能使实数理论变得更加简明而易于掌握，因而它也许会进入微积分的基础教程。

对于连续性的认识，数学上是越来越清楚了。可是哲学上的问题依然存在:数学上的连续性与人的感性上认识的连续性是不是一回事呢? 它与人的经验相不相符呢?

有各种看法。

柏拉图主义认为，数学上的连续性是精神的实在，而经验是对精神实在的认识。

20 世纪的大数学家希尔伯特认为，数学上的连续性是不能用于经验的，它是为了增强初等数学力量的辅助概念，我们只知道它不与初等数学矛盾。

庞加莱认为，数学上的连续性是从经验连续性逐步修改而来的，在一定条件下它与经验是一致的。

但是，要研究这个问题，就得先弄清什么是我们感觉上的连续性。这就涉及更困难的概念和更深刻的哲学争论和物理理论了。

“万物皆数”的再生

提出“万物皆数”的观点，是一个错误。因为数是概念，不是物，是物的数量特征在人的头脑中反映为数，不是客观存在的数转化为物。毕达哥拉斯把事情弄颠倒了。

但是，这个错误的背后是一个人类认识上的大进步——认识到数量关系在宇宙中的重要性。

而“万物皆数”观点的破灭，同样是一个错误。错误在于，认为数不足以表达万事万物了。错误又是由于一个大的进步引起的：发现了无理数。人们发现了无理数，又不敢承认它是数，这就是第一次数学危机。

这一危机的克服，使数真正具有了表达一切量的能力。

然而数学对数的认识并没有停留于此。数的概念在不断扩大：复数、四元数、超限数、理想数、非标准实数，各种各样的数都被创造出来了。数学创造出各种的数，用以表达世界上一切可以精确化、形式化的关系。数学工具、数学方法、数学思想空前地向各个学科渗透。一百多年以前，恩格斯还说过：数学在化学中的应用只不过是一次方程，在生物学中的应用等于0*。今天，情形已大不同了，我们已很难找出一个与数学无关的人类知识领域了。如果我们扬弃“万物皆数”观点中的唯心主义成分，把它理解为万物都与数有关的一种观

---

* 参看《自然辩证法》，于光远等译，人民出版社（1984年），p.172。

点，也许未尝不可。

不是吗？一切实在物皆有形，形可以用数描述。运动与变化伴随着能量的交换与转化，能量可以用数表示。人的知识本质上是信息，信息可以用数记取。万物有质的不同，质又可以用数刻画。人们对世界的认识愈深入，对数的重要性也愈有深刻体会。

辩证法认为一切事物都包含着矛盾，即"一分为二"。为什么一切事物都包含着矛盾呢？为什么是一分为二而不是一分为三呢？哲学家对此没有进一步的研究与解答。也许，这正是因为事物的变化归根结底可以用数量的变化来描述。而数量变化，分解到每一维上，无非是增加与减少。表现出来，当然是矛盾的双方，而不是三方或多方了。

哲学一开始，便与数学结了不解之缘。在数学日益向一切学科渗透的今天，哲学如果想承担起"人类一切知识的概括与总结"的重任，是不是应当从数学中汲取更多的东西呢？