



普通高等教育“十五”国家级规划教材

微积分

第二版 下册

同济大学应用数学系 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

微 积 分

第二版 下册

同济大学应用数学系 编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材,在同济大学应用数学系编《微积分》的基础上修订而成。这次修订的宗旨是在保持改革特色的前提下,使本书内容更加贴近当前的教学实际,便于教学。对部分章节的内容作了重新组合、增删和改写,参照当前通行的教学基本要求,适当调整了部分内容的要求;对习题,特别是每章的总习题充实了概念题和基本题,删去了少数技巧要求过高的题,突出了总习题的复习功能;数学实验是本书的特色之一,将部分实验内容与教学内容更加有机地结合起来,同时降低实验要求并删去了几个难度较大的实验,希望使用起来更加方便和有效。

全书分上、下两册出版。上册内容为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学和微分方程。下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数。书末附有习题答案与提示。

本书保持了第一版结构严谨、逻辑清晰、叙述详尽、例题较多的特点,便于在教学改革中使用。本书可作为工科和其他非数学类专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下)/同济大学应用数学系编. —2版. —北京:
高等教育出版社, 2003.7

ISBN 7-04-011948-X

I. 微... II. 同... III. 微积分-高等学校-教材
IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 045296 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京铭成印刷有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	1999 年 9 月第 1 版 2003 年 7 月第 2 版
印 张	22	印 次	2003 年 7 月第 1 次印刷
字 数	410 000	定 价	23.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

策划编辑	张忠月
责任编辑	高尚华
封面设计	王凌波
责任绘图	尹莉
版式设计	马静如
责任校对	杨雪莲
责任印制	孔源

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 82028899 转 6897 (010)82086060

传真：(010) 82086060

E-mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

邮编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

目 录

第五章 向量代数与空间解析几何	1
第一节 向量及其线性运算	2
一、向量概念 (2) 二、向量的加法与数乘运算 (3) 习题 5-1 (7)	
第二节 点的坐标与向量的坐标	7
一、空间直角坐标系 (7) 二、向量的坐标及向量线性运算的坐标表示 (9)	
三、向量的模、方向角和投影 (12) 习题 5-2 (14)	
第三节 向量的乘法运算	15
一、向量的数量积 (点积、内积) (15) 二、向量的向量积 (叉积、外积) (18)	
三、向量的混合积 (21) 习题 5-3 (23)	
第四节 平面	24
一、平面的方程 (24) 二、两平面的夹角以及点到平面的距离 (27)	
习题 5-4 (29)	
第五节 直线	30
一、直线的方程 (30) 二、两直线的夹角、直线与平面的夹角 (32)	
三、过直线的平面束 (34) 习题 5-5 (35)	
第六节 曲面与曲线	36
一、柱面与旋转曲面 (36) 二、空间曲线的方程 (39)	
三、空间曲线在坐标面上的投影 (41) 习题 5-6 (43)	
第七节 二次曲面	44
一、二次曲面的方程与图形 (44) 二、曲面的参数方程及其计算机作图法 (49)	
习题 5-7 (52)	
总习题五	52
第六章 多元函数微分学	55
第一节 多元函数的基本概念	56
一、多元函数 (56) 二、 $\mathbf{R}^n$ 中的线性运算、距离及重要子集类 (57)	
三、多元函数的极限 (61) 四、多元函数的连续性 (62) 习题 6-1 (63)	
第二节 偏导数	64
一、偏导数 (64) 二、高阶偏导数 (67) 习题 6-2 (69)	
第三节 全微分	70

习题 6-3 (75)	
第四节 复合函数的求导法则	76
习题 6-4 (82)	
第五节 隐函数的求导公式	83
一、一个方程的情形 (83) 二、方程组的情形 (87) 习题 6-5 (89)	
第六节 方向导数与梯度	90
一、方向导数 (90) 二、梯度 (93) 习题 6-6 (97)	
第七节 多元函数微分学的几何应用	98
一、曲面的切平面与法线 (98) 二、空间曲线的切线与法平面 (101)	
三、等量面与等高线 (105) 习题 6-7 (106)	
第八节 多元函数的极值	108
一、极大值与极小值 (108) 二、条件极值 (111) 习题 6-8 (117)	
总习题六	117
第七章 重积分	120
第一节 重积分的概念与性质	121
一、重积分的概念 (121) 二、重积分的性质 (125) 习题 7-1 (126)	
第二节 二重积分的计算	127
一、利用直角坐标计算二重积分 (127)	
习题 7-2 (1) (133) 二、利用极坐标计算二重积分 (134)	
习题 7-2 (2) (138) * 三、二重积分的换元法 (139)	
* 习题 7-2 (3) (143)	
第三节 三重积分的计算	144
一、利用直角坐标计算三重积分 (144) 二、利用柱面坐标计算三重积分 (148)	
三、利用球面坐标计算三重积分 (149) 习题 7-3 (151)	
第四节 重积分应用举例	153
一、曲面的面积 (153) 二、质心和转动惯量 (156) 三、引力 (158)	
习题 7-4 (160)	
总习题七	161
第八章 曲线积分与曲面积分	164
第一节 数量值函数的曲线积分(第一类曲线积分)	165
一、第一类曲线积分的概念 (165) 二、第一类曲线积分的计算法 (167)	
习题 8-1 (171)	
第二节 数量值函数的曲面积分(第一类曲面积分)	171
一、第一类曲面积分的概念 (171) 二、第一类曲面积分的计算法 (173)	
三、数量值函数在几何形体上的积分及其物理应用综述 (176)	

习题 8-2 (179)	
第三节 向量值函数在定向曲线上的积分 (第二类曲线积分)	180
一、第二类曲线积分的概念 (180) 二、第二类曲线积分的计算法 (184)	
习题 8-3 (188)	
第四节 格林公式	189
一、格林公式 (189) 二、平面定向曲线积分与路径无关的条件 (194)	
*三、曲线积分基本定理 (199) 习题 8-4 (200)	
第五节 向量值函数在定向曲面上的积分 (第二类曲面积分)	201
一、第二类曲面积分的概念 (201) 二、第二类曲面积分的计算法 (206)	
习题 8-5 (210)	
第六节 高斯公式与散度	211
一、高斯公式 (211) 二、散度 (214) 习题 8-6 (215)	
第七节 斯托克斯公式与旋度	216
一、斯托克斯公式 (216) 二、旋度 (220) * 三、向量微分算子 (223)	
习题 8-7 (224)	
总习题八	225
第九章 无穷级数	228
第一节 常数项级数的概念与基本性质	229
一、基本概念 (229) 二、无穷级数的基本性质 (231) 习题 9-1 (233)	
第二节 正项级数及其审敛法	234
习题 9-2 (241)	
第三节 绝对收敛与条件收敛	242
一、交错级数及其审敛法 (242) 二、级数的绝对收敛与条件收敛 (244)	
习题 9-3 (250)	
第四节 幂级数	251
一、幂级数及其收敛性 (251) 二、幂级数的运算与性质 (256)	
习题 9-4 (260)	
第五节 函数的泰勒级数	260
一、泰勒级数的概念 (260) 二、函数展开成幂级数的方法 (263)	
习题 9-5 (270)	
第六节 函数的幂级数展开式的应用	270
一、近似计算 (270) 二、欧拉公式 (274) 三、微分方程的幂级数解法 (275)	
习题 9-6 (277)	
第七节 傅里叶级数	278
一、周期运动和三角级数 (278) 二、函数展开成傅里叶级数 (280)	

习题 9-7 (286)	
第八节 一般周期函数的傅里叶级数	286
一、周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 (287)	
二、正弦级数与余弦级数 (288)	
习题 9-8 (292)	
*第九节 傅里叶多项式与最佳均方逼近	292
*习题 9-9 (298)	
总习题九	298
实验	302
实验 1 鲨鱼袭击目标的前进途径	302
实验 2 最小二乘法	308
实验 3 无穷级数与函数逼近	312
附录 矩阵与行列式简介	317
习题答案与提示	322

第五章 向量代数与空间解析几何

VECTORS AND ANALYTIC GEOMETRY IN SPACE

自然界中的很多量既有大小、又有方向，数学中的向量就是对这一类量的概括与抽象。向量在工程技术中有着广泛的应用，是一种重要的数学工具。向量可以用有向线段来表示（称为向量的几何表示）；在建立了空间直角坐标系后，又可用3个实数组成的有序数组表示（称为向量的坐标表示）。向量的坐标表示为我们把向量概念推广到更高维的空间中开拓了道路。本章先讨论向量的这两种表示形式，接着通过几何形式定义向量的基本运算，并导出这些运算的坐标表示。有关向量的每一个结论，都有等价的几何表示形式和坐标表示形式，学习时要注意对比，切实掌握，并善于根据不同的问题采用最为方便的表示形式。本章第一部分向量代数所讨论的就是向量概念、向量之间的各种运算及其应用。

本章第二部分的内容是空间解析几何的基础知识。正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必不可少的。这部分内容包括空间的平面和直线方程，平面与直线的关系，以及空间曲面、曲线的方程。在曲面方程中，我们着重讨论了柱面、旋转曲面及二次曲面的方程。在讨论平面和直线方程时，向量扮演了重要角色，抓住了平面的法向量和直线的方向向量，就抓住了这部分内容的纲。这是在学习时要充分注意的。

第一节 向量及其线性运算

一、向量概念

客观世界中有很多量, 比如物体的体积, 质量, 两点间的距离, 某一过程所需的时间等等, 这种量只有大小、多少之分, 因此只需用数字就可加以刻画, 并且处理这些量的规则也与实数的运算规则相当, 这些量被称为纯量 (scalar). 然而, 客观世界还存在这样一类量, 例如位移, 速度, 加速度, 力, 力矩等等, 这类量不仅有大小之分, 还有方向之异, 单纯用一个数字不足以描述它们. 处理这类量的规则也不再符合实数的运算规则, 而遵循另外一些共同的规律. 人们把这类既有大小、又有方向的量称为向量 (vector).

向量通常用黑体字母或上方加箭头的字母来记, 如 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{s}$ 、 $\mathbf{F}$ 或 $\vec{a}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{s}$ 、 $\vec{F}$ 等等. 由于向量的两个要素是大小和方向, 而具有这两个要素的最简单的几何图形是有向线段, 故在数学中常用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、

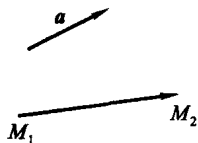


图 5-1

M_2 为终点的有向线段所表示的向量也记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (图 5-1). 在以后的讨论中, 我们对向量和表示它的有向线段不加区分, 例如把有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 说成向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, 或把向量 $\mathbf{a}$ 看成有向线段.

需要指出, 数学上讨论的向量仅有大小和方向这两方面的属性, 并不涉及向量的起点, 因此如果两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的大小相同, 方向一致, 就称 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 相等, 并记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. 这就是说, 如果两个有向线段的大小和方向是相同的, 则不论它们的起点是否相同, 我们就认为它们表示同一个向量. 这样理解的向量叫做自由向量.

由于自由向量可在空间自由平移, 因此可如下规定两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角: 将 $\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{b}$ 平移, 使它们的起点重合后, 它们所在的射线之间的夹角 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 称为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角 (图 5-2), 并记作 $(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{b})$ 或 $(\hat{\mathbf{b}}, \mathbf{a})$.

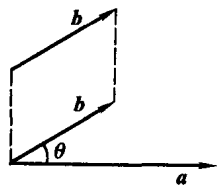


图 5-2

向量的大小叫做向量的模 (norm). 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 、 $\mathbf{a}$ 、 $\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 、 $|\mathbf{a}|$ 、 $|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 模等于零的向量叫做零向量, 记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的方向可以看作是任意的.

两个非零向量如果它们的方向相同或者相反, 就称这两个向量平行. 向量 a 与 b 平行, 记作 $a \parallel b$. 由于零向量的方向可以看作是任意的, 因此可以认为零向量与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时, 它们的终点和公共起点应在一条直线上, 因此, 两向量平行, 又称两向量共线.

类似还有向量共面的概念. 设有 $k (k \geq 3)$ 个向量, 当把它们的起点放在同一点时, 如果 k 个终点和公共起点在一个平面上, 就称这 k 个向量共面.

二、向量的加法与数乘运算

在实际问题中, 向量与向量之间常发生一定的联系, 并产生出另一个向量, 把这种联系抽象成数学形式, 就是向量的运算. 本节先定义向量的加法运算以及向量与数的乘法运算, 这两种运算统称为向量的线性运算.

1. 向量的加法

从物理与力学中我们知道, 两个力、两个速度均能合成, 得到合力与合速度, 并且合力与合速度都符合平行四边形法则. 由此实际背景出发, 我们定义向量的加法如下:

设向量 a 与 b , 任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$, 以 AB 、 AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线是 AC , 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 a 与 b 的和, 记为 $a + b$ (图 5-3).

以上规则叫做向量相加的平行四边形法则, 但此法则对两个平行向量的加法没有做说明, 而以下的法则不仅蕴含了平行四边形法则, 还适用于平行向量的相加:

设有两个向量 a 与 b , 任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = a$, 再以 B 为起点, 作 $\overrightarrow{BC} = b$, 连结 AC , 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 即为向量 a 与 b 的和 $a + b$ (图 5-4).

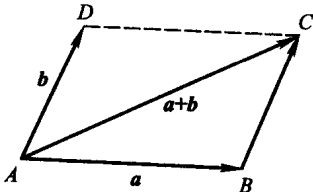


图 5-3

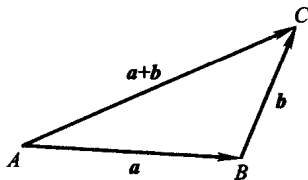


图 5-4

这一规则叫做向量相加的三角形法则.

向量的加法符合下列运算律:

- (1) 交换律 $a + b = b + a$;

(2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$.

由向量加法的定义知, 交换律是显然成立的. 下面验证结合律. 如图 5-5 所示, 先作 $a + b$, 再加上 c , 即得和 $(a + b) + c$, 如以 a 与 $b + c$ 相加, 则得同样结果, 所以结合律成立.

由于向量的加法符合交换律与结合律, 故 n 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) 相加可写成

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

并按向量相加的三角形法则, 可得 n 个向量相加的法则如下: 使前一向量的终点作为次一向量的起点, 相继作向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 再以第一向量的起点为起点, 最后一向量的终点为终点作一向量, 这个向量即为所求的和. 如图 5-6, 有

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

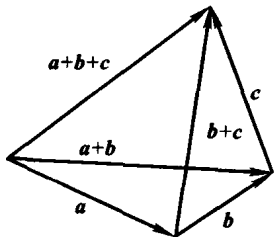


图 5-5

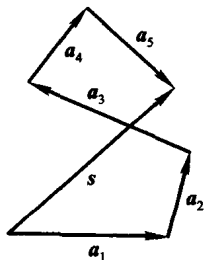


图 5-6

例 1 证明: 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证 设四边形 $ABCD$ 的对角线相交于 E , 如图 5-7 所示, 由于

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}, \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED},$$

故

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC},$$

即

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

这说明线段 AD 与 BC 平行且长度相同, 因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

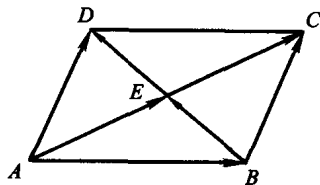


图 5-7

2. 向量与数的乘法(数乘)

对任意的实数 λ 和向量 a , 我们定义 a 与 λ 的乘积 (简称数乘) 是一个向量, 记为 λa , 它的模与方向规定如下:

$$(1) |\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|;$$

(2) 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同方向; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反方向; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$.

向量与数的乘积符合下列运算律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$.

因为由向量与数的乘积的规定可知, 向量 $\lambda(\mu a)$ 、 $\mu(\lambda a)$ 、 $(\lambda\mu)a$ 都是互相平行的, 它们的指向也是相同的, 而且

$$|\lambda(\mu a)| = |\mu(\lambda a)| = |(\lambda\mu)a| = |\lambda\mu| |a|,$$

所以

$$\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a.$$

(2) 分配律

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

分配律同样可按向量与数的乘积的规定来证明, 这里从略.

对于向量 a , 称向量 $(-1)a$ 为 a 的负向量, 记作 $-a$, 即

$$-a = (-1)a,$$

显然, $-a$ 与 a 的模相同, 而方向相反. 进而可规定两个向量 b 与 a 的差

$$b - a = b + (-a).$$

即 b 与 a 的差是向量 b 与向量 $(-a)$ 的和 (图 5-8 (a)).

特别地, 当 $b = a$ 时, 有

$$a - a = a + (-a) = 0.$$

显然, 在图 5-8 (a) 中将向量 $b - a$ (向右) 平移, 则 $b - a$ 是由 a 的终点向 b 的终点所引的向量 (图 5-8 (b)).

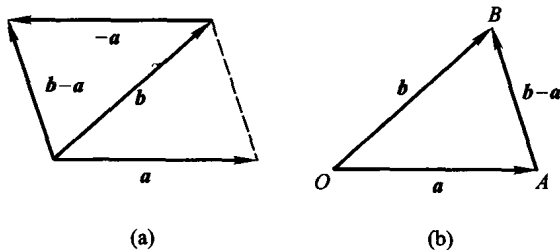


图 5-8

在图 5-9 所示的以 a 与 b 为邻边的平行四边形中, 两条对角线向量分别表示 $a + b$ 和 $a - b$, 因三角形两边长之和大于第三边之长, 两边长之差小于第三边之长, 再考虑 a 与 b 平行的情况, 于是对任意的向量 a 与 b 有不等式

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

对于非零向量 a , 取 $\lambda = \frac{1}{|a|}$, 则向量 $\lambda a = \frac{a}{|a|}$ 的方向与 a 相同, 且它的模

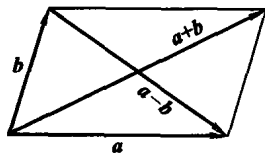


图 5-9

$$\left| \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot |\mathbf{a}| = 1,$$

故 $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ 是与 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量, 记作 $\mathbf{e}_a$, 即有 $\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

于是

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{e}_a.$$

这说明任何非零向量可以表示为它的模与同向单位向量的数乘.

由于向量 $\lambda \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 平行, 因此常用向量与数的乘积来判定两个向量的平行关系, 即有如下的

定理 1 设向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 则向量 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$ 的充要条件是存在惟一的实数 λ , 使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

证 条件的充分性由数乘的定义即得. 下面证必要性.

设 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$. 若 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则取 $\lambda = 0$ 即有 $\mathbf{b} = \mathbf{0} = 0\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$.

若 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 则由 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$ 知 $\mathbf{e}_b \parallel \mathbf{e}_a$, 故 $\mathbf{e}_b = \pm \mathbf{e}_a$ ($\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向时取正号, 反向时取负号). 于是

$$\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \mathbf{e}_b = |\mathbf{b}| (\pm \mathbf{e}_a) = |\mathbf{b}| \left(\pm \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right) = \pm \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}, \quad (1)$$

取 $\lambda = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$ (当 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向时), 或 $\lambda = -\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$ (当 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 反向时), 就有 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

如果另有实数 μ 满足 $\mathbf{b} = \mu \mathbf{a}$, 则两式相减得

$$\mathbf{0} = (\lambda - \mu) \mathbf{a},$$

从而

$$|\lambda - \mu| |\mathbf{a}| = 0,$$

由于 $|\mathbf{a}| \neq 0$, 故 $\lambda = \mu$. 这说明满足条件的 λ 是惟一的. 定理证毕.

从 (1) 式可知, 若向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 且向量 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$, 则必有

$$\mathbf{b} = \pm |\mathbf{b}| \mathbf{e}_a. \quad (2)$$

现设 Ou 为数轴, 其原点为 O , 把与 Ou 轴的正向同方向的单位向量记作 $\mathbf{e}_u$. P 为轴上任意一点, 其坐标为 u (图 5-10). 根据轴上一点的坐标的定

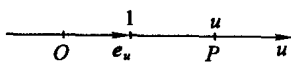


图 5-10

义知, $u = \pm |\overrightarrow{OP}|$ (当 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\mathbf{e}_u$ 同向时取正, 反向时取负). 现将 (2) 式中的 $\mathbf{b}$ 换成 $\overrightarrow{OP}$, $\mathbf{e}_a$ 换成 $\mathbf{e}_u$, 即得 $\overrightarrow{OP} = u \mathbf{e}_u$, 从而得以下推论:

推论 对数轴 Ou 上的任意一点 P , 轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 都可惟一地表示为 P 点的坐标 u 与轴上单位向量 $\mathbf{e}_u$ 的乘积

$$\overrightarrow{OP} = u \mathbf{e}_u.$$

这一推论将在下一节用来建立向量的坐标表达式.

习题 5-1

1. 设 A 、 B 、 C 为三角形的三个顶点, 求 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.
2. 已给正六边形 $ABCDEF$ (字母顺序按逆时针向), 记 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{b}$, 试用向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ 和 $\overrightarrow{CB}$.
3. 设 $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$, 试用 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 来表示 $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.
4. 用向量法证明: 三角形两边中点的连线平行于第三边, 且长度等于第三边长度的一半.
5. 设 C 为线段 AB 上一点且 $|CB| = 2|AC|$, O 为 AB 外一点, 记 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, 试用 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 来表示 $\mathbf{c}$.

第二节 点的坐标与向量的坐标

一、空间直角坐标系

为了沟通空间的点与数、图形与方程的联系, 我们先引进空间直角坐标系.

过空间一个定点 O , 作三条互相垂直的数轴, 分别叫做 x 轴 (横轴), y 轴 (纵轴) 和 z 轴 (竖轴). 这三条数轴都以 O 为原点且有相同的长度单位, 它们的正方向符合右手法则, 即以右手握住 z 轴, 当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时, 竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向 (图 5-11). 这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ 直角坐标系, 点 O 称为该坐标系的原点.

设 M 是空间的一点, 过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴并交 x 轴、 y 轴和 z 轴于 P 、 Q 、 R 三点. 点 P 、 Q 、 R 分别称为点 M 在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影点. 设这三个投影点在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x 、 y 和 z , 于是空间一点 M 唯一地确定了一个有序数组 x, y, z . 反过来, 对给定的有序数组 x, y, z , 可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P , 在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q , 在 z 轴上取坐标为 z 的点 R , 过点 P 、 Q 、 R 分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的三个平面, 这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x, y, z 确定的惟一的点 (如图 5-12). 这样, 空间的点与有序数组 x, y, z 之间就建立了一一对应的关系. 这组数 x, y, z 称为点 M 的坐标, 依次称 x 、 y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标, 并可把点 M 记为 $M(x, y, z)$.

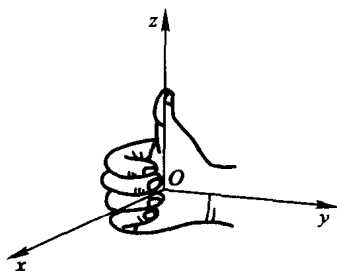


图 5-11

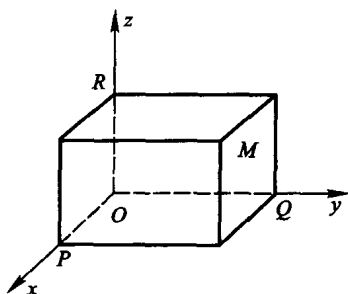


图 5-12

三条坐标轴中每两条可以确定一个平面,称为坐标面,由 x 轴和 y 轴确定的坐标面简称为 xOy 面,类似地还有 yOz 面与 zOx 面.这三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个卦限.如图 5-13 所示,八个卦限分别用罗马字 I、II、…、VIII 表示,第一、二、三、四卦限均在 xOy 面的上方,按逆时针方向排定,其中在 xOy 面上方并在 yOz 面前方、 zOx 面右方的是第一卦限;第五、六、七、八卦限均在 xOy 面的下方,也按逆时针方向排定,它们依次分别在第一至四卦限的下方.

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点,为了表达 P_1 与 P_2 之间的距离,我们过 P_1 和 P_2 各作三个分别垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的平面.这六个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体(图 5-14).从图中易见该长方体各棱的长度分别是

$$|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|.$$

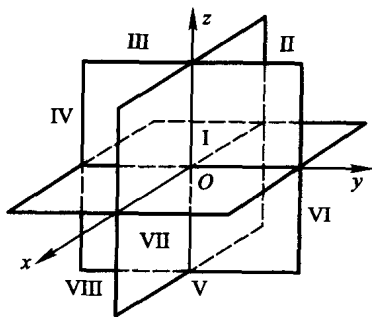


图 5-13

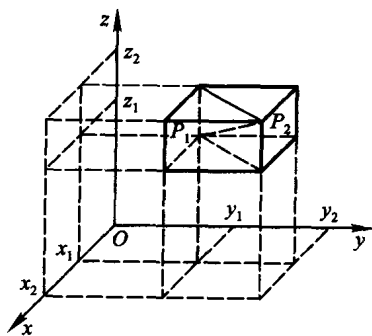


图 5-14

于是得对角线 P_1P_2 的长度,亦即空间两点 P_1 、 P_2 的距离公式为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$