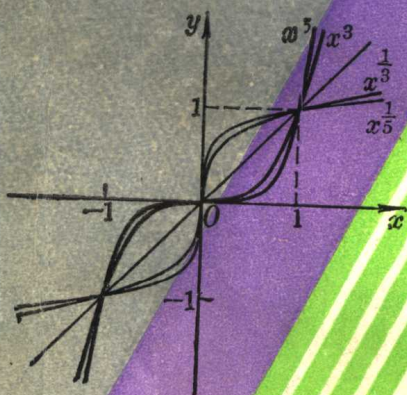


# 怎样学好数学

## 高中代数

·上册·



上海教育出版社

怎样学好数学

# 高中代数

(上册)

华东师大二附中 傅伯华 马惠生 章小英 编  
陈贵瑶 唐清成

上海教育出版社

怎样学好数学  
高中代数  
(上册)

华东师大二附中 傅伯华 马惠生 章小英 编  
陈贵瑶 唐清成

上海教育出版社出版发行

(上海永刚路123号)

各地新华书店经销 上海崇明浜镇印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张6 字数129,000

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数1—26,300本

统一书号: 7150·3864 定价: 0.97元

## 写在前面

数学是现代科学的基础学科之一，数学水平的高低将会直接或间接地影响我国科学技术的发展。为了帮助青年学生在中学阶段系统而又牢固地掌握基础的基础，加深对中学数学基本概念、公式的理解，熟练基本运算技能，锻炼积极思维，培养分析问题和解决问题的能力，我们编写了这套《怎样学好数学》的小丛书，供中学生、自学青年参考、学习之用。

这套小丛书是以中学现行数学课本为依据而编写的，合共十册：初中代数、几何各两册；高中代数两册；三角、立体几何、解析几何各一册；数学学习和思考一册。在内容编排上力求配合教材，在知识方面适当地作了拓广。它的特点是，每册书的每章内容大致从五个栏目去展开的：(1)知识拓广(基础知识)，(2)疑难辨析，(3)解题方法，(4)错在哪里，(5)练习和思考。具体体现如下：

**在知识拓广部分：**介绍一些数学知识产生的背景；围绕教材的重点、难点，有针对性地讲清基本概念，从不同的角度定义某一概念，以及扩展和这一内容有关的知识，使学生比较深入地理解和掌握基础知识。

**在疑难辨析部分：**对教材中的难点或学生容易混淆的概念，讲清知识的内在联系和本质的区别，同时作一定的对比、分析，使学生养成严密地剖析思维的良好习惯。

**在解题方法部分：**介绍几种典型例题的解题思路，指导学生的解题途径，有的采取一题多解，开扩学生的解题思路和判

断解法优劣的能力,有的采取小综合题,提高学生运用知识的能力和培养分析的习惯。至于在证题方法中,除了指导学生掌握定理本身的内容外,还引导学生掌握证明过程中所用到的方法。

**在错在哪里部分:**中学生目前在学习数学中,常常由于审题不周密,或者概念不清楚,或者推理无依据,或者讨论不全面,或者计算不准确,或者作图不认真而导致这样和那样的错误,故在分析和订正里引导学生认真剖析错误所在,找出造成错误的原因,然后订正错误,总结教训,有利于学生从反面加深对基础知识的理解和基本技能的掌握,从而提高分析问题和解决问题的能力。

**在练习和思考部分:**安排一定数量的练习题和思考题,引导学生独立思考,复习和巩固已学的知识,进一步提高运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力。

这套小丛书由本市上海中学、复旦附中、华东师大一附中、华东师大二附中、五十一中学、七一中学、杨浦区教育学院部分数学教师协同编写。由于我们水平有限,又缺乏编写经验,缺点、错误一定存在,希望多加批评指正。

顾秀颖  
一九五八年八月

# 目 录

## 第一章 集合与映射 .....1

### • 知识拓广 •

1. 集合(1)
2. 集合与集合之间关系的有关性质(2)
3. Venn图(3)
4. 有限集合元素个数的计算方法(4)
5. 映射(5)
6. 映射的分类(6)
7. 映射的复合(8)
8. 映射的逆(9)

### • 疑难辨析 •

1. 单元素集合与元素本身有何区别(9)
2. 全集  $I$  的作用(10)
3. 集合与集合之间能否用“ $\in$ ”关系(10)

### • 解题方法 •

1. 利用集合求最大公约数(11)
2. 解方程和解不等式(11)
3. 有限集合元素个数的计算(13)
4. 恒等式的证明(13)
5. 根据 Venn 图表示集合关系(14)
6. 建立集合之间的映射关系以及映射类型的判别(14)

### • 错在哪里 •

- 问题 1(17) 问题 2(17) 问题 3(18)

### • 练习和思考 •

- 1~15(18)~(21)

## 第二章 幂函数、指数函数和对数函数 .....22

### • 知识拓广 •

1. 幂的指数是怎样扩展的(22)
2. 幂函数的定义、分类和图象(24)
3. 幂函数的性质(26)
4. 指数函数的图象和性质(30)
5. 对数函数的图象和性质(31)

### • 疑难辨析 •

1. 为什么规定指数幂和对数的底大于零且不等于1(32)
2. 互为

反函数的两个函数的图象为什么关于直线  $y=x$  对称(34) 3. 哪些函数是初等函数, 怎样判别初等函数(36) 4. 讨论初等函数的性质应从哪几方面着手(37) 5. 绘制函数图象的基本要求是什么(40)

• 解题方法 •

1. 函数的性质和图象在解题中的应用(42) 2. 探求某些函数解析式的几种方法(47) 3. 关于幂指方程的解法(55)

• 错在哪里 •

问题 1(58) 问题 2(59)

• 练习和思考 •

1~19(60)~(63)

**第三章 数学归纳法**.....66

• 知识拓广 •

1. 什么是数学归纳法(66) 2. 满足数学归纳法两条件的命题是否一定正确(70)

• 疑难辨析 •

证“与自然数有关”的命题是否一定要用数学归纳法(72)

• 解题方法 •

1. 用数学归纳法证题时应注意什么(78) 2. 数学归纳法证题举例(83)

• 错在哪里 •

问题 1(85) 问题 2(86)

• 练习和思考 •

1~7(87)~(88)

**第四章 数列**.....90

• 知识拓广 •

1. 数列和它的分类(90) 2. 等差数列和等比数列(91) 3. 介绍两类数列(93)

• 疑难辨析 •

1. 自然数、自然数列、自然数集合有什么区别(98) 2. “数列前  $n$  项的和”与“数列各项的和”的区别(98)

• 解题方法 •

1. 求数列通项公式的若干方法(99) 2. 几类数列前  $n$  项和的几种求法(108)

• 错在哪里 •

问题(115)

• 练习和思考 •

1~12(116)~(118)

**第五章 不等式的证明 .....121**

• 知识拓广 •

1. 不等式的概念(121) 2. 不等式的基本性质(121)

• 疑难辨析 •

不等式的证明与解不等式的区别(122)

• 证题方法 •

1. 绝对不等式常用的证明方法(124) 2. 一些基本不等式的证明(131) 3. 不等式证明的一些其它方法(133) 4. 条件不等式的证明(137) 5. 一些与自然数有关的不等式的其它证法(139) 6. 含有绝对值不等式的证明(141)

• 错在哪里 •

问题(143)

• 练习和思考 •

1~18(145)~(146)

**第六章 行列式和线性方程组 .....147**

• 知识拓广 •

1. 行列式的定义(147) 2. 行列式的性质(151) 3. 行列式与线性方程组的解的关系(152) 4. 线性方程组解的讨论(155)



• 解题方法 •

1. 化简及计算行列式值的几种方法(160) 2. 线性方程组的解及其讨论(172)

• 错在哪里 •

问题 1(176) 问题 2(177) 问题 3(178)

• 练习和思考 •

1~7(179)~(182)

# 第一章 集合与映射

## 知识拓广

### 1. 集合

集合是数学中非常基础的一个概念，所以很难用其它更为基础的语言来定义。为便于读者理解它的涵义，现给出一个描述性的定义。

具有某些确定属性的对象的全体称为集合，简称为集。可见集合是对于单个对象的整体而言的，而那些单个的对象称之为集合中的元素。

为加深对这一概念的理解，还需要作些补充说明：

一、集合中的元素并不局限于数，可以是各种各样的东西。例如：{我校的高中生}、{等腰三角形}、{运动器材}、{素数}、{交通工具}、…。甚至性质截然不同的对象放在一起也可构成集合，象{火车、橡皮、 $\pi$ 、哈雷彗星}等这些互不相干的物体(对象)放在一起也构成了一个集合。集合不仅对元素的性质无任何限制，而且对元素的个数也不加任何限制。

二、集合中的元素应具有确定性。也就是说，对集合  $A$  而言，任取一个元素  $a$ (物体对象)，那末  $a \in A$  或  $a \notin A$  是确定的。从这个意义上讲， $A = \{\text{我校中的身高不低于 } 1.70 \text{ 米的同学}\}$  是一个集合，而  $B = \{\text{我校中的高个子同学}\}$  就不是一个集合，因为挑一个身高略高于平均身高的同学，你很难判断他(她)是否是  $B$  中的元素。

三、集合中的元素具有互异性。换句话，相同的元素归入一个集合时，只能看作为一个元素。例如集合

$$A = \{x \mid (x-1)^2 \cdot (x+2)^3 (x-4) = 0\}$$

与集合  $B = \{x \mid (x-1)(x+2)(x-4)^4 = 0\}$

表示为同一个集合，即表示为集合  $\{1, -2, 4\}$ 。

四、对一个集合，只考虑它由哪些元素组成，而不考虑这些元素在集合中的顺序。所以集合  $A = \{2, 4, 6\}$  与集合  $B = \{2, 6, 4\}$  是同一个集合。

### 2. 集合与集合之间关系的有关性质

集合与集合之间关系的有关性质课本中也出现了一些，现再补充几条，一并归纳如下：

(i) 交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

(ii) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

(iii) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

(iv) 吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A;$$

(v) 基元律

$$\emptyset \cup A = A, \quad I \cup A = I, \quad \emptyset \cap A = \emptyset, \quad I \cap A = A;$$

(vi) 补元律

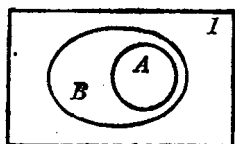
$$A \cup \bar{A} = I, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

$$\overline{\bar{A}} = A, \quad \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{(A \cap B)} = A \cup \bar{B}.$$

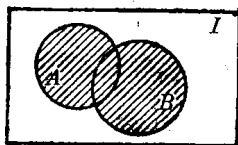
以上这些性质对集合问题的处理有一定的帮助。

### 3. Venn 图

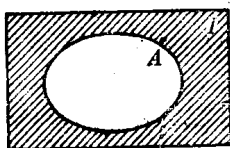
Venn 图可以直观地表示集合以及集合之间的关系. 例如: i)  $A \subset B$  [图 1(1)], ii)  $A \cup B$  [图 1(2)], iii)  $\bar{A}$  [图 1(3)].



(1)



(2)



(3)

图 1

用 Venn 图也可以表示上述几条性质. 例如第(iii)条性

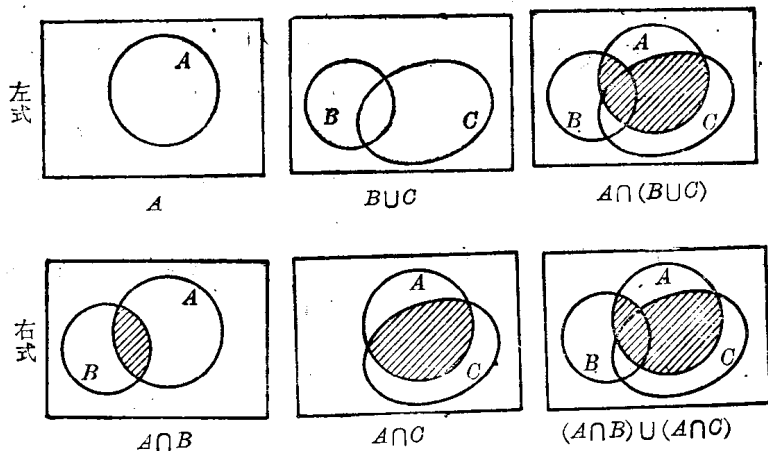


图 2

质:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  可用图 2 的表示方法来验证. 可见用 Venn 图表示, 分配律中的第一个等式是成立的. 读者可以利用 Venn 图来验证 2 中的其它等式.

#### 4. 有限集合元素个数的计算方法

如果集合  $A$  中所含元素个数是有限个, 则称  $A$  为有限集合, 其所含元素个数记为  $n(A)$ . 如集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 则  $n(A) = 5$ . 而对有限集合及其并集、交集的元素个数的计算是一个十分有趣而有意义的课题. 下面就这个问题作些介绍.

$$i) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B);$$

$$ii) n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C);$$

$$iii) n(A \cap B) = n(A) - n(A \cap \bar{B}) = n(B) - n(B \cap \bar{A});$$

$$iv) n(A) = n(I) - n(\bar{A}).$$

这是最主要的和常用的几个公式. 在这些公式中, i) 又是最主要的一个. 对于  $A \cap B = \emptyset$  的情形 i) 显然是成立的.

而对于  $A \cap B \neq \emptyset$  的情形, 可借助于 Venn 图给出一个证明.

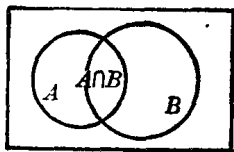


图 3

如图 3 所示, 设  $A$  中含有  $s$  个元素,  $B$  中含有  $r$  个元素, 而  $A \cap B$  中含有  $t$  个元素.

显然,  $s$  中含有  $A \cap B$  中的  $t$  个元素,  $r$  中也含有  $A \cap B$  中的  $t$  个元素. 由集合中元素的互异性可知:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= (s - t) + (r - t) + t \\ &= s + r - t = n(A) + n(B) - n(A \cap B), \end{aligned}$$

这就是 i) 的证明.

很容易看出 ii) 是 i) 的推论, 并且可推广到有限个集合

的并. 由  $A = A \cap I = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$  可推得 iii); 而 iv) 只要在 iii) 中令  $I = A$  即可. 以下举一个简单的例子说明其应用.

**例 1** 100 以内能被 3 或 7 整除的数一共有多少个?

**解** 设:  $A = \{100 \text{ 以内被 } 3 \text{ 整除的数}\}$ , 则

$$n(A) = \left[ \frac{100}{3} \right]^* = 33;$$

$B = \{100 \text{ 以内被 } 7 \text{ 整除的数}\}$ , 则

$$n(B) = \left[ \frac{100}{7} \right] = 14.$$

由集合的意义可知  $A \cap B = \{100 \text{ 以内能被 } 3 \times 7 = 21 \text{ 整除的数}\}$ , 而  $A \cup B = \{100 \text{ 以内能被 } 3 \text{ 或 } 7 \text{ 整除的数}\}$ .

同理  $n(A \cap B) = \left[ \frac{100}{21} \right] = 4$ .

$$\begin{aligned} \therefore n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 33 + 14 - 4 = 43 \text{ (个)}. \end{aligned}$$

### 5. 映射

集合  $A$ 、 $B$  之间有一个对应关系  $f$ , 使得任一  $a \in A$ , 通过  $f$  在  $B$  中有唯一确定的元素  $b$  与它对应, 则称  $f$  为从  $A$  到  $B$  的一个映射. 记作  $f: A \rightarrow B$ . 其中  $b$  称为  $a$  的象, 记作  $b = f(a)$ . 而  $a$  称为  $b$  的原象.

以上的定义与同学们所熟悉的函数概念是十分相象的. 但应注意到这里的  $A$ 、 $B$  是两个抽象的集合, 并没有限定为数集, 因而元素  $a$ 、 $b$  也不一定是数.

借助于 Venn 图(图 4), 我们可以很直观地表示出  $f: A \rightarrow B$ .

\*  $\left[ \frac{100}{3} \right] = 33$ , 表示  $\frac{100}{3}$  的最大整数部分为 33.

为加深对抽象的集合间映射的理解，我们举一些例子加以说明。

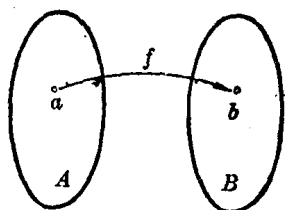


图 4

例 2 (1)  $A = \{\text{本班全体同学}\}$ ,  $B = \{\text{男、女}\}$ .

$f$ :  $A$  中每个元素(同学)的性别。

$\therefore$  本班任一个同学的性别是唯一确定的，

$\therefore f: A \rightarrow B$ .

(2)  $L = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ,  $P = \{P(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

$f$ :  $L$  中任一个一次式与其系数为坐标的平面上点  $P$  相对应。

显然,  $L$  中任一元素  $ax + b \rightarrow P(a, b)$  是唯一确定的。

$\therefore f: L \rightarrow P$ .

(3)  $S = \{\text{兔、茶杯、火炉、铅笔、小猫}\}$ ,

$B = \{\text{动物、用具}\}$ .

$f$ :  $S$  中任一元素与  $B$  中唯一元素相对应。

显然  $f: S \rightarrow B$ .

如:  $f(\text{茶杯}) = \text{用具}$ ,  $f(\text{铅笔}) = \text{用具}$ ,  $f(\text{小猫}) = \text{动物}$ ,  $\dots$

由上可知, 茶杯的象是用具, 而动物的原象有两个, 一个是小猫一个是兔。

(4)  $L = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ,  $P = \{P(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ .

$f$ :  $L$  中任一元素  $ax + b$  与其系数为坐标的点  $P(a, b)$  相对应。显然  $P$  是唯一确定的。

$\therefore f: L \rightarrow P$ .

## 6. 映射的分类

设:  $f: A \rightarrow B$ , 并记:

$$R_f = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

若  $B$  中任一元素  $b$  都是  $A$  中元素的象, 就是说, 任一  $b \in B$ , 存在  $a \in A$  使  $f(a) = b$ , 则称  $f$  为  $A$  到  $B$  上的映射, 记作  $f: A \xrightarrow{\text{上}} B$ . 如例 2(1)、(2)、(8) 的情形是  $R_f = B$ .

若  $B$  中至少有一个元素  $b_0$  不是  $A$  中元素的象, 即  $b_0 \notin R_f$ , 有  $R_f \subset B$ , 则称  $f$  为  $A$  到  $B$  内的一个映射, 记作  $f: A \xrightarrow{\text{内}} B$ . 如前面的例 2(4).

对于映射  $f: A \xrightarrow{\text{上}} B$ , 一般地说, 只要求  $B$  中每个元素都有原象, 并没有要求原象唯一确定, 如例 2(1) 与 (8) 那样. 如果再加强些, 要求  $B$  中任一元素的原象也唯一确定, 则称这类映射是从  $A$  到  $B$  上的一一映射, 记作  $f: A \xrightarrow{1-1} B$ . 如例 2(2) 那样.

**例 3** 试判断下列映射的类型:

(1)  $A = [-1, 1]$ ,  $B = \{P(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ ,

$f$ : 任一  $a \in A \rightarrow f(a) = P = l_{x=a} \cap B$  ( $P$  表示直线  $x=a$  与上半个单位圆的交点).

(2)  $A = [0, 1]$ ,  $B = \{P(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ ,

$f$ : 同(1).

(3)  $A = \mathbb{R}$ ,  $B = \{P(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ,

$f$ : 同(1).

(4)  $A = [-1, 1]$ ,  $B = \{P(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ,

$f$ : 同(1).

(5)  $A = [-1, 1]$ ,  $B = \{y \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$ ,

$f$ : 任一  $a \in A \rightarrow f(a)$  表示直线  $x=a$  与单位圆交点的纵坐标为正的值得.



(6)  $A = [0, 1]$ ,  $B = \{y | x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ ,

$f$ : 同上题.

(7)  $A = \mathbb{Z}$ ,  $B = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$ ,

$f$ : 任一  $n \in \mathbb{Z} \rightarrow f(n) = n^2$ .

(8)  $A = \mathbb{Z}$ ,  $B = \{\text{偶数}\}$ ,

$f$ : 任一  $n \in \mathbb{Z} \rightarrow f(n) = 2n$ .

(9)  $A = \mathbb{N}$ ,  $B = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$ ,

$f$ : 任一  $n \in \mathbb{N} \rightarrow f(n) = n^2$ .

解 显然, 从  $A$  到  $B$  上的一一映射有: (1)、(6)、(8)、(9);

非一一映射但是  $A$  到  $B$  上的映射有(5)、(7);

是  $A$  到  $B$  内的映射有(2);

而(3)、(4)根本不是  $A$  到  $B$  的映射.

### 7. 映射的复合

两个映射  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  如图 5 所示.

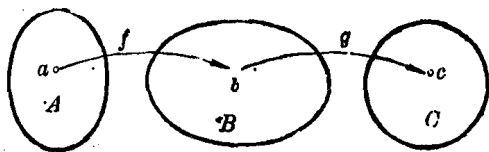


图 5

任一  $a \in A$  通过  $f$  在  $B$  中得到一个象  $f(a) = b$ , 再通过  $g$  在  $C$  中得到一个  $b$  的象  $g(b) = c$ . 这样任一  $a \in A$  就可以通过上面的过程在集合  $C$  中找到它的象  $c$ . 这里,  $A$  到  $C$  的一个映射称为映射  $f$  和  $g$  的复合映射. 记作  $f \cdot g: A \rightarrow C$ .

例 4 已知:  $A = \{\text{三角形的面积}\}$ ,  $B = \mathbb{R}^+$ ,  $C = \{\text{正方形的面积}\}$ , 且  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ . 求  $f \cdot g$ .

解  $f: A \rightarrow B$ , 任一  $\triangle ABC \in A \rightarrow f\{\triangle ABC\} = S_{\triangle ABC}$ .