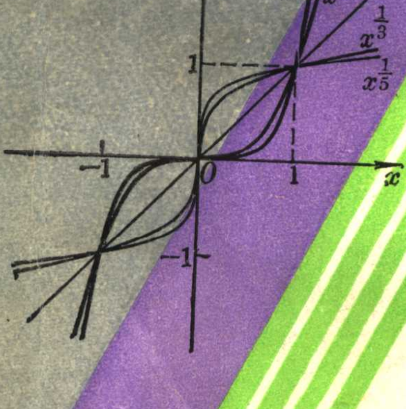
怎样学好数学

高中代数

·上册·



上海教育出版社

怎样学好数学

高中代数

（上　册）

华东师大二附中　傅伯华　马惠生　章小英　陈贵瑶　唐清成　编

上海教育出版社

怎样学好数学

高中代数

(上 册)

华东师大二附中 傅伯华 马惠生 章小英 陈贵瑶 唐清成 编

上海教育出版社出版发行

(上海永福路123号)

各地新华书店经销 上海崇明浜镇印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6 字数 129,000

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数 1—26,300 本

统一书号: 7150·3864 定价: 0.97 元

写在前面

数学是现代科学的基础学科之一，数学水平的高低将会直接或间接地影响我国科学技术的发展．为了帮助青年学生在中学阶段系统而又牢固地掌握基础的基础，加深对中学数学基本概念、公式的理解，熟练基本运算技能，锻炼积极思维，培养分析问题和解决问题的能力，我们编写了这套《怎样学好数学》的小丛书，供中学生、自学青年参考、学习之用．

这套小丛书是以中学现行数学课本为依据而编写的，合共十册：初中代数、几何各两册；高中代数两册；三角、立体几何、解析几何各一册；数学学习和思考一册．在内容编排上力求配合教材，在知识方面适当地作了拓广．它的特点是，每册书的每章内容大致从五个栏目去展开的：(1)知识拓广(基础知识)，(2)疑难辨析，(3)解题方法，(4)错在哪里，(5)练习和思考．具体体现如下：

在知识拓广部分：介绍一些数学知识产生的背景；围绕教材的重点、难点，有针对性地讲清基本概念，从不同的角度定义某一概念，以及扩展和这一内容有关的知识，使学生比较深入地理解和掌握基础知识．

在疑难辨析部分：对教材中的难点或学生容易混淆的概念，讲清知识的内在联系和本质的区别，同时作一定的对比、分析，使学生养成严密地剖析思维的良好习惯．

在解题方法部分：介绍几种典型例题的解题思路，指导学生的解题途径，有的采取一题多解，开扩学生的解题思路和判

断解法优劣的能力，有的采取小综合题，提高学生运用知识的能力和培养分析的习惯．至于在证题方法中，除了指导学生掌握定理本身的内容外，还引导学生掌握证明过程中所用到的方法．

在错在哪里部分：中学生目前在学习数学中，常常由于审题不周密，或者概念不清楚，或者推理无依据，或者讨论不全面，或者计算不准确，或者作图不认真而导致这样和那样的错误，故在分析和订正里引导学生认真剖析错误所在，找出造成错误的原因，然后订正错误，总结教训，有利于学生从反面加深对基础知识的理解和基本技能的掌握，从而提高分析问题和解决问题的能力．

在练习和思考部分：安排一定数量的练习题和思考题，引导学生独立思考，复习和巩固已学的知识，进一步提高运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力．

这套小丛书由本市上海中学、复旦附中、华东师大一附中、华东师大二附中、五十一中学、七一中学、杨浦区教育学院部分数学教师协同编写．由于我们水平有限，又缺乏编写经验，缺点、错误一定存在，希望多加批评指正．

唐秀颖

一九八五年八月

目　　录

第一章　集合与映射

知识拓广

1. 集合

集合是数学中非常基础的一个概念，所以很难用其它更为基础的语言来定义. 为便于读者理解它的涵义，现给出一个描述性的定义.

具有某些确定属性的对象的全体称为集合，简称为集. 可见集合是对于单个对象的整体而言的，而那些单个的对象称之为集合中的元素.

为加深对这一概念的理解，还需要作些补充说明：

一、集合中的元素并不局限于数，可以是各种各样的东西. 例如：{我校的高中生}、{等腰三角形}、{运动器材}、{素数}、{交通工具}、…. 甚至性质截然不同的对象放在一起也可构成集合，象{火车、橡皮、π、哈雷彗星}等这些互不相干的物体(对象)放在一起也构成了一个集合. 集合不仅对元素的性质无任何限制，而且对元素的个数也不加任何限制.

二、集合中的元素应具有确定性. 也就是说，对集合 A 而言，任取一个元素 a(物体对象)，那末 $a\in A$ 或 $a\overline{\in} A$ 是确定的. 从这个意义上讲，$A=$\{我校中的身高不低于 1.70 米的同学\}是一个集合，而 $B=$\{我校中的高个子同学\}就不是一个集合，因为挑一个身高略高于平均身高的同学，你很难判断他(她)是否是 B 中的元素.

三、集合中的元素具有互异性. 换句话，相同的元素归入一个集合时，只能看作为一个元素. 例如集合

$$A=\{x\mid (x-1)^2\cdot(x+2)^3(x-4)=0\}$$

与集合 $$B=\{x\mid (x-1)(x+2)(x-4)^4=0\}$$

表示为同一个集合，即表示为集合$\{1,\ -2,\ 4\}$.

四、对一个集合，只考虑它由哪些元素组成，而不考虑这些元素在集合中的顺序. 所以集合 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$与集合 $B=\{2,\ 6,\ 4\}$是同一个集合.

2. 集合与集合之间关系的有关性质

集合与集合之间关系的有关性质课本中也出现了一些，现再补充几条，一并归纳如下：

（i） 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$$

（ii） 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

（iii） 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

（iv） 吸收律

$$A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A;$$

（v） 基元律

$$\varnothing\cup A=A,\ I\cup A=I,\ \varnothing\cap A=\varnothing,\ I\cap A=A;$$

（vi） 补元律

$$A\cup\overline{A}=I,\ A\cap\overline{A}=\varnothing.$$
$$\overline{\overline{A}}=A,\ \overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

以上这些性质对集合问题的处理有一定的帮助.

3. Venn 图

Venn 图可以直观地表示集合以及集合之间的关系. 例如: i) $A\subset B$[图 1(1)], ii) $A\cup B$[图 1(2)], iii) $\overline{A}$[图 1(3)].

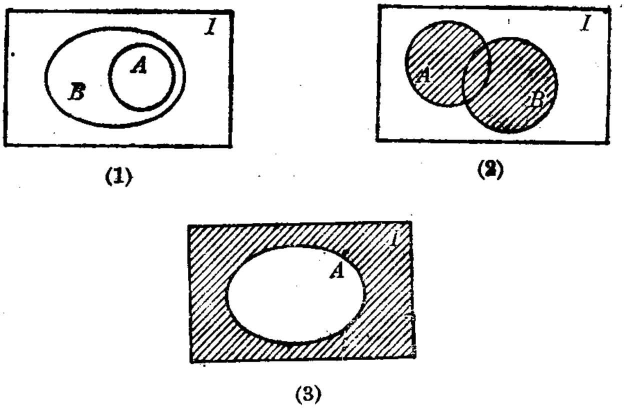


图 1

用 Venn 图也可以表示上述几条性质. 例如第(iii)条性

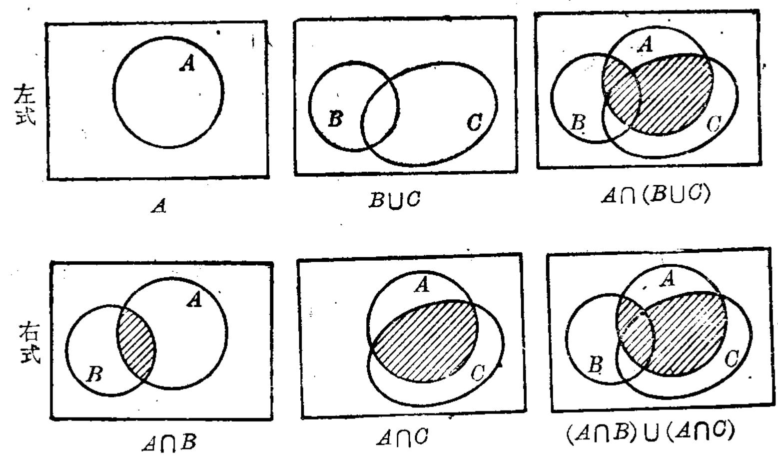


图 2

质：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$可用图2的表示方法来验证．可见用 Venn 图表示，分配律中的第一个等式是成立的．读者可以利用 Venn 图来验证2中的其它等式．

4．有限集合元素个数的计算方法

如果集合 A 中所含元素个数是有限个，则称 A 为有限集合，其所含元素个数记为 $n(A)$．如集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，则 $n(A)=5$．而对有限集合及其并集、交集的元素个数的计算是一个十分有趣而有意义的课题．下面就这个问题作些介绍．

i) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$;

ii) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$;

iii) $n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\overline{B})=n(B)-n(B\cap\overline{A})$;

iv) $n(A)=n(I)-n(\overline{A})$.

这是最主要的和常用的几个公式．在这些公式中，i)又是最主要的一个．对于 $A\cap B=\varnothing$ 的情形 i)显然是成立的．而对于 $A\cap B\neq\varnothing$ 的情形，可借助于 Venn 图给出一个证明．

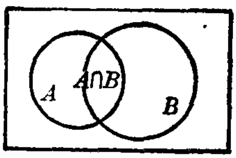


图 3

如图3所示，设 A 中含有 s 个元素，B 中含有 r 个元素，而 $A\cap B$ 中含有 t 个元素．

显然，s 中含有 $A\cap B$ 中的 t 个元素，r 中也含有 $A\cap B$ 中的 t 个元素．由集合中元素的互异性可知：

$$n(A\cup B)=(s-t)+(r-t)+t$$
$$=s+r-t=n(A)+n(B)-n(A\cap B),$$

这就是i)的证明．

很容易看出 ii)是 i)的推论，并且可推广到有限个集合

的并. 由 $A=A\cap I=A\cap(B\cup\bar{B})=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$ 可推得iii); 而 iv)只要在 iii) 中令 $I=A$ 即可. 以下举一个简单的例子说明其应用.

例 1 100 以内能被 3 或 7 整除的数一共有多少个?

解 设: $A=\{100$ 以内被 3 整除的数$\}$, 则

$$n(A)=\left[\frac{100}{3}\right]^{*}=33;$$

$B=\{100$ 以内被 7 整除的数$\}$, 则

$$n(B)=\left[\frac{100}{7}\right]=14.$$

由集合的意义可知 $A\cap B=\{100$ 以内能被 $3\times7=21$ 整除的数$\}$, 而 $A\cup B=\{100$ 以内能被 3 或 7 整除的数$\}$.

同理
$$n(A\cap B)=\left[\frac{100}{21}\right]=4.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=33+14-4=43(\text{个}).\end{aligned}$$

5. 映射

集合 A、B 之间有一个对应关系 f, 使得任一 $a\in A$, 通过 f 在 B 中有唯一确定的元素 b 与它对应, 则称 f 为从 A 到 B 的一个映射. 记作 f: $A\to B$. 其中 b 称为 a 的象, 记作 $b=f(a)$. 而 a 称为 b 的原象.

以上的定义与同学们所熟悉的函数概念是十分相象的. 但应注意到这里的 A、B 是两个抽象的集合, 并没有限定为数集, 因而元素 a、b 也不一定是数.

借助于 Venn 图(图 4), 我们可以很直观地表示出 f: $A\to B$.

---

* $\left[\frac{100}{3}\right]=33$, 表示 $\frac{100}{3}$ 的最大整数部分为 33.

为加深对抽象的集合间映射的理解，我们举一些例子加以说明.

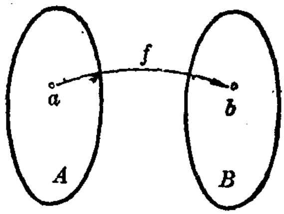


图 4

例2 (1) $A=\{$本班全体同学$\}$, $B=\{$男、女$\}$.

f: A 中每个元素(同学)的性别.

$\because$ 本班任一个同学的性别是唯一确定的,

$\therefore$ f: $A\to B$.

(2) $L=\{ax+b\,|\,a,\ b\in Z\}$, $P=\{P(a,\ b)\,|\,a,\ b\in Z\}$.

f: L 中任一个一次式与其系数为坐标的平面上点 P 相对应.

显然, L 中任一元素 $ax+b\to P(a,\ b)$ 是唯一确定的.

$\therefore$ f: $L\to P$.

(3) $S=\{$兔、茶杯、火炉、铅笔、小猫$\}$,

$$B=\{\text{动物、用具}\}.$$

f: S 中任一元素与 B 中唯一元素相对应.

显然 f: $S\to B$.

如: f(茶杯)=用具, f(铅笔)=用具, f(小猫)=动物, ….

由上可知, 茶杯的象是用具, 而动物的原象有两个, 一个是小猫一个是兔.

(4) $L=\{ax+b\,|\,a,\ b\in Z\}$, $P=\{P(a,\ b)\,|\,a,\ b\in R\}$.

f: L 中任一元素 $ax+b$ 与其系数为坐标的点 $P(a,\ b)$ 相对应. 显然 P 是唯一确定的.

$\therefore$ f: $L\to P$.

6. 映射的分类

设: f: $A\to B$, 并记:

$$R_f=\{f(a)\,|\,a\in A\}.$$

若 B 中任一元素 b 都是A中元素的象.就是说,任一 $b\in B$,存在 $a\in A$ 使 $f(a)=b$,则称 f 为 A 到 B 上的映射,记作 $f: A\xrightarrow{\text{上}}B$. 如例2(1)、(2)、(8)的情形是 $R_f=B$.

若 B 中至少有一个元素 b_0 不是 A 中元素的象. 即 $b_0\notin R_f$, 有 $R_f\subset B$, 则称 f 为 A 到 B 内的一个映射, 记作 $f: A\xrightarrow{\text{内}}B$. 如前面的例2(4).

对于映射 $f: A\xrightarrow{\text{上}}B$, 一般地说, 只要求 B 中每个元素都有原象,并没有要求原象唯一确定,如例 2(1)与(8)那样. 如果再加强些, 要求 B 中任一元素的原象也唯一确定, 则称这类映射是从 A 到 B 上的一一映射, 记作 $f: A\xrightarrow{1-1}B$. 如例 2 (2)那样.

例 3 试判断下列映射的类型:

(1) $A=[-1, 1]$, $B=\{P(x, y)\,|\,x^2+y^2=1, y\geqslant 0\}$,

f: 任一 $a\in A\to f(a)=P=l_{x=a}\cap B$($P$ 表示直线 $x=a$ 与上半个单位圆的交点).

(2) $A=[0, 1]$, $B=\{P(x, y)\,|\,x^2+y^2=1, y\geqslant 0\}$,

f: 同(1).

(3) $A=R$, $B=\{P(x, y)\,|\,x^2+y^2=1\}$,

f: 同(1).

(4) $A=[-1, 1]$, $B=\{P(x, y)\,|\,x^2+y^2=1\}$,

f: 同(1).

(5) $A=[-1, 1]$, $B=\{y\,|\,x^2+y^2=1, y\geqslant 0\}$,

f: 任一 $a\in A\to f(a)$ 表示直线 $x=a$ 与单位圆交点的纵坐标为正的值.

(6) $A=[0,\ 1]$, $B=\{y\,|\,x^2+y^2=1,\ y\geqslant 0\}$,

f：同上题.

(7) $A=Z$, $B=\{n^2\,|\,n\in N\}$,

f：任一 $n\in Z\to f(n)=n^2$.

(8) $A=Z$, $B=\{$偶数$\}$,

f：任一 $n\in Z\to f(n)=2n$.

(9) $A=N$, $B=\{n^2\,|\,n\in N\}$,

f：任一 $n\in N\to f(n)=n^2$.

解　显然，从 A 到 B 上的一一映射有：(1)、(6)、(8)、(9)；

非一一映射但是 A 到 B 上的映射有(5)、(7)；

是 A 到 B 内的映射有(2)；

而(3)、(4)根本不是 A 到 B 的映射.

7．映射的复合

两个映射 $f: A\to B$, $g: B\to C$ 如图 5 所示.

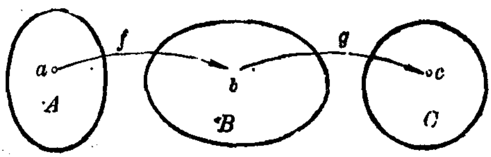


图　5

任一 $a\in A$ 通过 f 在 B 中得到一个象 $f(a)=b$，再通过 g 在 C 中得到一个 b 的象 $g(b)=c$. 这样任一 $a\in A$ 就可以通过上面的过程在集合 C 中找到它的象 c. 这里，A 到 C 的一个映射称为映射 f 和 g 的复合映射. 记作 $f\cdot g: A\to C$.

例 4　已知：$A=\{$三角形的面积$\}$, $B=R^+$, $C=\{$正方形的面积$\}$，且 $f: A\to B$, $g: B\to C$. 求 $f\cdot g$.

解　$f: A\to B$，任一 $\triangle ABC\in A\to f\{\triangle ABC\}=S_{\triangle ABC}$.