群论及其在物理学中的应用

李子平　廖理几　编著

新疆人民出版社

群论及其在物理学中的应用

李子平　廖理几　编著

新　疆　人　民　出　版　社

群论及其在物理学中的应用
李子平 廖理几 编著

新疆人民出版社出版
（乌鲁木齐市建中路54号）
新疆新华书店发行 湖南省新华印刷二厂排版
新疆乌苏县印刷厂印刷
850×1168毫米 32开本 13.75印张 2插页
1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷
印数：1—2,200

ISBN7-228-00332-2/N·14 定价：3.65元

序

群论是研究物理问题的重要数学工具。用群论方法处理许多物理问题，有其突出的优点，有些问题可以简捷地得到结果，另一些用其他方法不能解决的问题，也可以用群论来处理。群论是物理系有关专业研究生的必修课程（学位课)，也是物理系本科生的选修课程。目前国内现有的群论书（包括译著)，似乎不能完全适应这一教学需要。我们在多次教学实践的基础上，本着简明、实用的原则，编写了《群论及其在物理学中的应用》一书，以供教学的需要，并供物理学工作者应用。在编写中试图用较短的篇幅比较系统而又简明扼要地介绍物理学中常用的有关群论的基础知识和群论在物理学中的某些初步应用。在叙述时尽可能地结合物理内容和例子来阐明群论的基本概念、理论和方法，在数学上力求直观形象，对一些基本定理，书中也给予了证明。本书另一个特点是，和流行的方法不同，在讨论对称性和守恒律时，我们是从对称变换保持动力学方程不变出发来导出其所产生的守恒定律的，这样就更能恰当地体现对称性的含义。此外，书中每章均附有一定数量的习题，以供读者练习并检查掌握有关内容的情况。

本书第一章至第九章由李子平编写，第十章和第十一章由廖理几编写，附录由王雷编写。由于作者的水平所限，本书难免存在一些错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

我们衷心感谢清华大学张礼教授和新疆大学刘育亭教授对本书的关心和对书稿提出的宝贵意见。

作　者

1986年8月1日

目 录

第一章　群的基础知识

本章介绍抽象群的一些基本知识。主要说明群、子群、同构和同态、不变子群和商群等概念，以及它们的基本性质，并结合一些例子来予以讨论。

§1·1　集合与代数运算

有限个或无限个具有固定属性事物的总体叫做一个集合，集合中的事物叫做它的元素。全体实数构成的集合用R来表示，全体复数构成的集合用C来表示。元素a属于集合A时，记为$a\in A$，如果a不属于A，则记为$a\overline{\in}A$。作为集合的元素，它可以代表具有某种属性的事物，如数、点、矩阵和变换等等。

设有两个集合A，B，如果$a\in A\Longleftrightarrow a\in B$，即$A$中的元素与$B$中的元素完全一致，那么记为$A=B$。一个元素也没有的集合，称为空集，记为0。具有某种性质$p(x)$的集合S，记作$S=\{x:p(x)\}$。对于集合A、B，如果$a\in A\Rightarrow a\in B$，则称A是B的子集，记作$A\subseteq B$。集合C是A、B两个集合的并集，是指C是由属于A或属于B的所有元素组成的集合，即$x\in C\Longleftrightarrow x\in A$或$x\in B$，记作$C=A\cup B$。集合$A$与$B$的交集$C$为：$C=A\cap B=\{x:x\in A且x\in B\}$。集合$A$与$B$的差集$C=A-B=\{x:x\in C\Longleftrightarrow x\in A且\overline{x\in}B\}$。

设G是一个非空集合，如果有一个规则使G中任意两个元素a，b恒对应于G中唯一确定的元素c，则称此对应规则为G的一个代数运算。例如，实数域R中的加法、乘法都是R的代数运算。又如，设G为所有n阶非奇异矩阵的集合，矩阵的乘法可在G内确定

一个代数运算，因为非奇异矩阵之积仍为非奇异矩阵。但矩阵的加法却不能在G内确定一个代数运算，因为非奇异矩阵之和未必仍为非奇异矩阵。

各种不同的集合，可以存在各种不同的代数运算，它们不仅仅元素各不相同，而且其代数运算规则亦可能各异。可是这些代数运算的基本性质却往往有许多共同之处，例如，加法运算往往适合结合律和交换律；而乘法运算往往适合结合律。因此，当我们只研究这些集合的代数运算时，就不必顾及集合的元素是什么具体事物，也不必一个一个集合来研究，而只需研究其中某些有代表性的集合及其代数运算就够了，只要集合的代数运算性质相同，则在此共同性质的基础上推演出来的结论就具有普遍性，能够适用于各种具体集合。

群论是近世代数的一个重要分支，代数的主要问题之一就是研究代数运算的基本性质。群论这一代数分支目前已具有丰富的内容，并且在数学的其他分支中，在物理、化学以及其他自然科学诸领域中，都有非常广泛的应用。

§1·2 置 换

现在我们来介绍一种具体的代数运算——置换。置换在物理学中有许多应用。例如，在量子力学中，描述由n个全同粒子组成的多粒子系统时，需要讨论系统的总波函数在交换粒子时的对称性，这就需要先把n个粒子的坐标编上号码$1,2,\cdots\cdots n$,然后研究波函数在粒子号码置换下的对称性。

设有n个物体，我们将它们编号，用号码来标记它们，可以认为它们就是$1,2,\cdots n$。这n个数构成的排列共有$n!$种，取其中一种排列

$$p_1 p_2 \cdots p_n \tag{2·1}$$

将这个排列与基本排列

$$1\ 2 \cdots n \tag{2·2}$$

作比较，就看出：从基本排列（2·2）到排列（2·1）是将1换成 p_1，2换成p_2，…n换成p_n。我们把这种变换称为置换，并用符号

$$P \equiv \begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \tag{2·3}$$

来表示这个置换．置换这个代数运算就是n个元素的集合到自身的一个1—1映射．例如$n=5$的下列置换

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \tag{2·4}$$

代表数字1换为3，2换为2，3换为5，4换为1，5换为4。我们约定，变动置换记号中各列数对的位置对置换不发生影响。

（2·3）表示的置换P的逆置换P^{-1}是把排列（2·1）变成基本排列（2·2），即是将p_1换成1，p_2换成2，…p_n换成n。上述例子(2·4)的逆置换为

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \tag{2·5}$$

显然，

$$(P^{-1})^{-1} = P。 \tag{2·6}$$

下面我们引入置换乘积的概念。设P_1,P_2为两个置换，这两个置换的乘积P_2P_1是这样一个置换，它是首先施行置换P_1,然后再施行置换P_2所得到的结果，例如

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2·7}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \tag{2·8}$$

它们的乘积

$$P_2P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}。 \tag{2·9}$$

类似地，

$$P_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}。 \tag{2·10}$$

由此可见，置换的乘积是不可交换的。

置换$\begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix}$的逆置换为 $\begin{pmatrix} p_i \\ i \end{pmatrix}$，显然

$$\begin{pmatrix} p_i \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 p_2 \cdots p_n \\ 1\ 2 \cdots n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots n \\ p_1 p_2 \cdots p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots n \\ 1\ 2 \cdots n \end{pmatrix}, \tag{2·11}$$

设记e代表恒等置换，（2·11）式可简写为

$$PP^{-1} = P^{-1}P = e. \tag{2·12}$$

§1·3　群的定义和例子

设在一个非空集合G上规定了一种代数运算，通常称为乘法，它使G中任意两个元素a、b都有 G 中一个元素与它们对应，记作$ab = c$。如果它适合下列四个条件，那么称集合G构成一个群：

（1）封闭性。如果$a \in G$，$b \in G$，则$ab = c \in G$。

（2）结合律成立。对于G中任意元素a，b，c，有

$$a(bc) = (ab)c. \tag{3·1}$$

（3）单位元存在。设a为G中的任意元素，在 G中有一元素e存在，使

$$ea = ae = a. \tag{3·2}$$

（4）逆元存在。对G中的每一元素a，都有一元素$a^{-1} \in G$,使

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e. \tag{3·3}$$

群元素的乘法满足结合律，并不表示乘法满足交换律，即一般来说$ab \neq ba$（a，$b \in G$）。如果群G的乘法还适合交换律，即$ab = ba$，那么称群G为交换群或阿贝耳(Abel)群。

如果群G的元素的个数为有限，G就称为有限群，有限群G所包含元素的个数称为群 G的阶，元素的数目为无穷的群称为无限群。

上述群的定义包括了两个部份，一部份是它的元素的集合，

另一部份是代数运算．同一个集合，如果所定义的代数运算不同，就构成不同的群。

下面看几个例子。

例1．考虑由普通的数构成的集合

（1）全体整数Z对于加法成一个群；同样，全体实数R，全体复数C对于加法也成群．它们都是无限群。

（2）全体正、负整数，按普通的乘法不构成群，因为$1/n$可能不在整数集合中。

例2．使一平面图形保持不变操作（变换）的集合记为G，变换的乘积定义为相继施行两次变换的结果。显然，G对变换的乘法封闭且乘法适合结合律，G成为一群。这种图形对称群的典型例子是晶体的对称性。

例如，保持平面上正三角形不变的变换（操作）有E,A,B,C,D,F。E为恒等变换，A,B,C分别为绕图1·1中的轴旋转180°，D和F分别为绕垂直于三角形平面的O轴顺时针旋转120°和逆时针旋转120°。全部六个变换的集合$G=\{E,A,B,C,D,F\}$按变换的乘法构成三点对称群。这六个变换的乘法关系列于下表1·1中。此表称为群表。

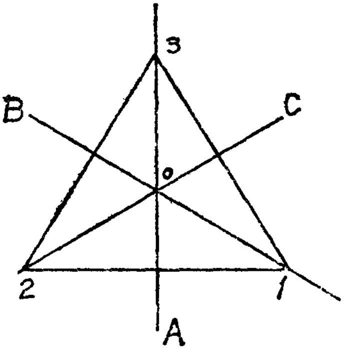

图1·1　等边三角形的对称轴

表1.1　　　　　一个6阶群的群表

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

在这群表中，从标有C的行和标有D的列的交叉点上的元素就是乘积CD，即$CD=A$，由这个表给出的乘法规则，不难验证G构成一群。但这个群不是阿贝耳群，例如$CD=A\neq DC=B$。

例3.三个数字的所有置换的总体共有6个元素：

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ R_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ R_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},$$
$$R_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ R_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ R_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}.\qquad(3\cdot4)$$

它们按置换的乘法构成置换群S_3。

例4.三个满足下列关系

$$\sigma_k\sigma_l=i\sum_m\varepsilon_{klm}\sigma_m,\ \sigma_k^2=1.\quad(k,\ l,\ m=1,\ 2,\ 3)\qquad(3\cdot5)$$

的矩阵称为σ_k矩阵，其中ε_{klm}是三阶完全反对称张量，

$$\varepsilon_{klm}=\begin{cases}0,\ \text{当}k,\ l,\ m\text{中有两个指标相同时；}\\+1,\text{当}klm\text{可以从123经偶次排列得到时；}\\-1,\ \text{当}klm\text{可以从123经奇次排列得到时，}\end{cases}$$

量子力学中三个二阶泡利(pauli)矩阵

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\qquad(3\cdot6)$$

是这种σ_k矩阵的一组常用的形式。

考虑8个元素±1，$\pm i\sigma_k$的集合Σ，集合Σ中元素的乘法规则，

已由上的σ_k矩阵的定义所给出，集合Σ构成一个群。

例5.设L是数域K上的一线性空间，L的全体可逆线性变换对于变换的乘法构成一个群，当L是n维欧氏空间时，L中全体正交变换也构成一个群。这个群记为$O(n)$。

例6.考虑矩阵集合

(1) 全体元素在数域K中的n阶非奇异矩阵对于矩阵的乘法构成一群，记为$GL(n,K)$。

(2) 元素在数域K中的n阶矩阵的总体，按矩阵乘法不构成群，因为奇异矩阵没有逆矩阵。

(3) 满足$detA=\pm 1$的n阶矩阵A的总体按矩阵乘法构成一群；满足$detA=+1$的n阶矩阵A的总体也构成一群。但满足$aetA=-1$的n阶矩阵A的总体并不构成一群，因为

$$det(AB)=detA\cdot detB=(-1)\cdot(-1)=+1, \qquad (3\cdot 7)$$

这时不满足封闭性要求。

(4) 三维空间中的坐标变换。恒等变换和空间反演用矩阵表示为

$$e=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \qquad \sigma=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}. \qquad (3\cdot 8)$$

表1.2　二阶群的群表

	e	σ
e	e	σ
σ	σ	e

e代表对坐标不改变的变换，σ代表坐标轴指向相反的变换。显然，由e，σ两个元素组成的集合，按矩阵乘法构成一个群，称二阶反射群V_2.群元素的乘法如群表1.2所示。

以上的例2、例3和例4都是有限群，有限群中所含的群元素数目称为群的阶，例2中的三点对称群的阶$g=6$，例3中的S_3群的阶$g=3!=6$，例4中的Σ群的阶$g=8$，而例5中的$O(n)$群的群元素的数目是无穷的，$O(n)$群为无限群。同样，例6中的$GL(n,K)$也

是无限群。

§1·4 群的基本性质

现在我们从群的定义出发来讨论群的一些基本性质。

定理1. 群G中任意n个元素无论按哪种组合办法相乘，其结果均相同。

例如，$n=4$，按群元素的乘法适合结合律，就有

$$[(ab)c]d=[a(bc)]d=(ab)(cd)=\cdots\cdots, \qquad (4\cdot1)$$

因此，群中n个元素a，b，$\cdots f$的乘积这句话有着确定的意义，这个乘积可记为$abcd$。并且在交换群中，这个积与元素的次序无关。

定理2. 群G中的单位元e是唯一的。

证。假定G中还有单位元e'，而它对于所有的群元a均有

$$e'a=ae', \qquad (4\cdot2)$$

取$a=e$，则有

$$e'e=ee'=e. \qquad (4\cdot3)$$

但已知e为单位，故又有

$$ee'=e'e=e'. \qquad (4\cdot4)$$

比较以上两式的结果，可见$e'=e$。

定理3. 群G中每个元素a的逆元a^{-1}是唯一的。

证。假定a'也是a的逆元，即$aa'=a'a=e$，那么

$$a'=ea'=(a^{-1}a)a'=a^{-1}(aa')=a^{-1}e=a^{-1} \qquad (4\cdot5)$$

因此a的逆元a^{-1}是唯一的。

此外，由$aa^{-1}=a^{-1}a=e$，可知a与a^{-1}互为逆元。

定理4. 单位元e的逆元仍为单位元自身。

证。设e的逆元为e^{-1}，由逆元的定义，有

$$ee^{-1}=e^{-1}e=e. \qquad (4\cdot6)$$

又根据单位元的定义，有

$$ea=ae=a, \qquad (4\cdot7)$$

取$a=e^{-1}$，比较上面两式，可知$e^{-1}=e$。

定理5.设u为群G中的一个固定元素，则序列

$$ug_a \qquad (g_a\in G, a=1, 2\cdots) \qquad (4\cdot8)$$

包含群G中的每一个元素，而且只包含一次。

证。(1) 群G中任意元素g_β属于序列(4·8)。

设u的逆元为u^{-1}，则$u^{-1}g_\beta=g_\gamma\in G$，而序列(4·8)中必含$ug_\gamma$，但$ug_\gamma=u(u^{-1}g_\beta)=(uu^{-1})g_\beta=g_\beta$，所以$g_\beta$属于序列(4·8)。

(2) 序列(4·8)中只包含群G的元素一次。

设g_β在序列(4·8)中出现二次，即$ug_\gamma=g_\beta$，$ug_\delta=g_\beta$，而$g_\gamma\neq g_\delta$，则必引出矛盾。事实上，用u^{-1}分别左乘后，得$g_\gamma=u^{-1}g_\beta$，$g_\delta=u^{-1}g_\beta$，即$g_\gamma=g_\delta$，这与假设矛盾，故g_β只能在序列(4·8)中出现一次。

由此可见，用群中任一元素左乘群的所有元素所形成的新集合，除元素次序不同外，与原来的群相同。(右乘也是一样)。定理5又称为群的重排列定理（或群表定理）。从群表我们已经看到：一个群的全部群元，在群表的每一行和每一列都出现，而且只出现一次，仅次序不同而已。

根据群的定义，我们还可以得到，群元乘积的逆元有$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$。也可以证明：对于群G中的任二元素a，b，方程$ax=b$与方程$ya=b$在群G中有唯一的解。这个性质也可以用来作为群的另一种定义。

§1·5 循环群 子群

对群G中的任一元素a，作序列

$$e,\ a,\ a^2,\ \cdots a^m,\ \cdots a^n,\ \cdots\cdots, \qquad (5\cdot1)$$

由群的封闭性可知，序列(5·1)中的每一个元素都属于G，如果G为有限群，则序列(5·1)中必有重覆元素，设两个最靠近的重覆元素的幂次相差为n，即