21st CENTURY
规划教材

面向21世纪高职高专基础课程规划教材

COURSES FOR VOCATIONAL HIGHER EDUCATION: BASIC COURSES

高等数学（下册）

ADVANCED MATHEMATICS

王秀梅　杨旭岩　主编

科学出版社
www.sciencep.com

规划教材

面向21世纪高职高专基础课程规划教材

COURSES FOR VOCATIONAL HIGHER EDUCATION: BASIC COURSES

高　等　数　学

（下册）

——线性代数　概率论与数理统计

王秀梅　杨旭岩　主编

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书是根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的。内容包括线性代数、概率论和数理统计三部分，共十二章，分别是行列式、矩阵、n维向量和线性方程组、矩阵的对角化、二次型、随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、样本与抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等。此外，本书还给出了各章习题的参考答案。

本书语言简洁，内容深浅适度，容量适当，可作为高职高专学生用书，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/王秀梅，杨旭岩主编. —北京：科学出版社，2005
（面向21世纪高职高专基础课程规划教材）

ISBN 7-03-016319-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①王…②杨… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第111804号

责任编辑：吕建忠 陈砺川 / 责任校对：刘彦妮

责任印制：吕春珉 / 封面设计：飞天创意

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新誉印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年9月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2005年9月第一次印刷 印张：14

印数：1—5 000 字数：273 000

定价：46.00元（上、下册）

（如有印装质量问题，我社负责调换<环伟>）

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62138978-8001（HI01）

编者的话

本书是作者根据编者多年的教学实践，按照教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的。在选材和叙述上尽量做到与专科学生的水平相适应，概念清晰易懂，内容深浅适度，容量适当，并结合工科专业的特点，注重实践应用。同时，在例题和习题的选择上也下了功夫，不少题目既具有启发性、趣味性，又具有挑战性和广泛的应用性。

线性方程组的求解是线性代数部分的核心，贯穿于线性代数的始终。线性代数以行列式、矩阵、向量为工具，以初等变换将矩阵化为阶梯型矩阵为主要方法来解决线性方程组的求解这一核心问题，并由此引出矩阵的对角化、二次型等内容。

数理统计在专业课及现实生活中有着广泛的应用。概率论是数理统计的理论基础，重点讲述随机变量及其分布，该部分着重介绍在各个领域被广泛运用的参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等统计推断方法。

本书分上、下两册，上册定价 27.00 元，下册定价 19.00 元。下册由王秀梅、杨旭岩任主编。第一章、第五章、第七章由杨旭岩编写；第二章、第四章由王秀梅编写；第三章、第六章由段振辉编写；第八~ 十章由秦体恒编写；第十一章、第十二章由贾积身编写。全书由河南科技大学杨万才教授主审。

本书是高职高专工科专业基础课教材之一，也可供工程技术人员参考。由于编者水平有限，同时编写时间比较仓促，书中一定存在不妥之处，敬请广大读者批评和指正。

编　者

2005 年 8 月

目 录

第一章 行 列 式

行列式是线性代数中重要的基本概念之一.本章介绍行列式的概念,讨论行列式的性质、计算方法以及用行列式来求解线性方组的克莱姆(Cramer)法则等.

第一节 行列式的定义、性质及概念

一、二阶和三阶行列式

在中学解二元线性方程组时,曾见过符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,这个符号被称为二阶行列式,它由 2^2 个数组成,代表一个算式,等于数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,即$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.其中,$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$被称为行列式的元素,第一个下标 i 表示元素 a_{ij} 位于第 i 行,第二个下标 j 表示元素 a_{ij} 位于第 j 列.

在"向量代数与空间解析几何"一章中,曾见过符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,这个符号称为三阶行列式,它由 3^2 个数组成,代表算式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$,记为 D,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \quad (1.1)$$

行列式的横排称为行,竖排称为列,数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$称为行列式的元素,元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示该元素在第 i 行,第二个下标 j 表示该元素在第 j 列,如元素 a_{21} 是位于行列式的第 2 行第 1 列的元素.

计算三阶行列式有多种方法,常见的方法是对角线法,即将行列式 D 中的第一列与第二列重写置于 D 的右侧,然后求对角线上元素乘积的代数和,即得行列式的值.方法如下:

$$\begin{array}{ccccc} & & (-) & (-) & (-) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & (+) & (+) & (+) \end{array}$$

其中,位于三条实线上三个元素的乘积都带正的符号(从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线),位于三条虚线上三个元素的乘积都带负的符号(从左下角到右上角的对角线称为行列式的副对角线).

例 1.1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法有

$$D=1\times(-1)\times4+(-2)\times2\times3+3\times2\times2-3\times(-1)\times3-1\times2\times2-(-2)\times2\times4=17$$

二、行列式的性质

把行列式 D 的行换成同序号的列得到的行列式称为行列式 D 的转置行列式,记作 D^{T}. 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

行列式具有以下性质.

性质 1 行列式 D 与其转置行列式 D^{T} 相等.

由性质 1 知,行列式的行与列所处的地位是对等的,故对行列式的行成立的性质,对列也成立;反之,对列成立的性质,对行也成立.

性质 2 互换行列式的某两行(列),行列式仅改变符号.

推论 若行列式有两行(列)的对应元素相同,则此行列式等于零.

性质 3 若行列式的某一行(列)的元素全为零,则此行列式等于零.

性质 4 行列式的某一行(列)的各个元素同乘以数 k,等于行列式乘以数 k. 例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 若行列式两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的各个元素都是两数之和,则此行列式等

于两个行列式的和，这两个行列式的这一行(列)的元素分别为相应的两数中的一个，其余元素与原来行列式的对应元素相同. 例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 以数 k 乘行列式某行(列)的所有元素，然后加到行列式的另一行(列)的对应元素上去，则行列式的值不变. 例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将数 k 乘第 i 行(列)，加到第 j 行(列)记作 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

三、行列式的按行(列)展开

为便于讲述，先引进余子式和代数余子式的概念. 在三阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的所有元素，剩下的 4 个元素按原次序构成的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 乘上 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. 例如，设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，将元素 a_{21} 所在的第 2 行和第 1 列划去后剩下的 4 个元素按原来的次序构成的二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 就是元素 a_{21} 的余子式，即 $M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，而元素 a_{21} 的代数余子式为

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

定理 1.1 行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 即若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,3) \tag{1.2}$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3} a_{kj}A_{kj} \quad (j=1,2,3) \tag{1.3}$$

证 只就第一个等式中 $i=1$ 的情况加以证明,其余证法相同.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

此定理表明,行列式可按某行(列)展开,这个定理称为拉普拉斯(Laplace)定理,式(1.2)、式(1.3)称为拉普拉斯展开式.

例 1.2 将行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 分别按第一行、第二列展开.

解 注意到行列式 D 的各元素的代数余子式的符号有如下规律

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

故按第一行展开,得

$$D=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+0\cdot A_{12}+4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=2$$

按第二列展开,得

$$D=0\cdot A_{12}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2$$

推论 行列式的某一行(列)各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+a_{i3}A_{k3}=0 \quad (i\neq k,i,k=1,2,3) \tag{1.4}$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+a_{3j}A_{3k}=0 \quad (j\neq k,j,k=1,2,3) \tag{1.5}$$

证 仅证式(1.4)中 $i=1,k=2$ 的情形,其余证明相同.

根据定理 1.1,将行列式 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 按第二行展开,得

$$D_1=a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$$

由行列式的性质 2 的推论得 $D_1=0$,证毕.

例 1.3 设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$,验证 $a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0$.

证 因为 $A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 4\\1 & 3\end{vmatrix}=-4, A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{vmatrix}=2$,所以

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=2\times(-4)+0\times A_{32}+4\times 2=0$$

四、n 阶行列式

利用拉普拉斯展开式给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{matrix} \tag{1.6}$$

将 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列划去后留下的数表所对应的行列式记为 M_{ij},且令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. 定义数值 $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$ 为对应于数表(1.6)的 n 阶行列式,记为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k} \tag{1.7}$$

行列式一般用 D 来表示,并将 M_{ij} 和 A_{ij} 称为此行列式的元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式.

n 阶行列式的定义给出了计算 n 阶行列式的方法. 由定义可知,n 阶行列式的计算需转化为 n 个 $(n-1)$ 阶行列式(余子式)的计算,一直这样继续下去,最终可归结为三阶行列式的计算.

运用数学归纳法可证明 n 阶行列式全部展开后共有 $n!$ 项,其中 $n!/2$ 项符号为正,$n!/2$ 项符号为负,此外还可证明每项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积. 因此如果利用定义来计算行列式,计算量相当大.

n 阶行列式具有与三阶行列式完全相同的性质,而对于 n 阶行列式,拉普拉

斯展开式仍然成立，即对 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

有拉普拉斯展开式

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik} \tag{1.8}$$

（按第 i 行展开，$i=1,2,\cdots,n$）

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj} \tag{1.9}$$

（按第 j 列展开，$j=1,2,\cdots,n$）

其中，A_{ij} 是行列式 D 的元素 a_{ij} 的代数余子式. n 阶行列式 D 相应于拉普拉斯展开式的推论为

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0 \quad (i\neq k,i,k=1,2,\cdots,n) \tag{1.10}$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0 \quad (j\neq k,j,k=1,2,\cdots,n) \tag{1.11}$$

这里需要特别提醒：对角线法仅适用于二阶、三阶行列式.

为了便于计算高阶行列式，将拉普拉斯展开定律与行列式的性质结合起来，使行列式的某一行(列)的元素尽可能多地化为零(一般情况下，要么化成仅剩一个非零元素，要么化成全为零元素)，就可以很方便地将行列式降阶或求解.

例 1.4 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

解 将 D 的第 3 行第 4 行各元素分别加到第 2 行的对应元素上去，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

例 1.5 计算 $D=\begin{vmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix}$.

解 $D \xlongequal[r_1+r_4]{\substack{r_1+r_2\\ r_1+r_3}} \begin{vmatrix} 3a+b & 3a+b & 3a+b & 3a+b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix}$

$$=(3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_2-c_4\\ c_1-c_4}]{c_3-c_4} (3a+b)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b-a & a \\ 0 & b-a & 0 & a \\ b-a & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=(3a+b)(b-a)^3$$

第二节　克莱姆法则

在初等代数中，二元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$若有唯一解，则其解可表示为

$$\begin{cases} x=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ y=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0)$$

若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则 $x=\dfrac{D_x}{D}$，$y=\dfrac{D_y}{D}$，其中 $D\neq 0$.

这个用行列式来表示线性方程组的解的法则可以推广到含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的情形.

含 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个方程的线性方程组表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.12}$$

其中，系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$及常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为已知数. 令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

D 称为方程组(1.12)的系数行列式，$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把 D 中的第 j 列(即 x_j 的系数)替换为方程组右端的常数项而得到的行列式，此时有如下的法则.

定理 1.2 (克莱姆法则) 若线性方程组(1.12)的系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

证 用 D 中第 j 列各元素的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}(j=1,2,\cdots,n)$依次乘方程组(1.12)的第一、第二、…、第 n 个方程，并将等式两端分别相加、整理得

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})x_1+\cdots+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj})x_j \\ +\cdots+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\cdots+a_{nn}A_{nj})x_n=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$$

根据第一节 n 阶行列式的拉普拉斯展开式及其推论，得

$$0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{j-1}+D\cdot x_j+0\cdot x_{j+1}+\cdots+0\cdot x_n=D_j$$

当 $D\neq 0$ 时，有 $x_j=\dfrac{D_j}{D}\quad(j=1,2,\cdots,n)$.

例 1.6 解方程组$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad =2 \\ \qquad x_2+x_3=0 \\ x_1 \qquad +x_3=0 \end{cases}$

解 因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$，所以可用克莱姆法则. 经计算有

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2,D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2,D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-2$$

得 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1,x_2=\dfrac{D_2}{D}=1,x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1$.

当 n 元线性方程组(1.12)的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时，方程组可化为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{1.13}$$

方程组(1.13)称为 n 元齐次线性方程组. 当方程组(1.12)中的常数项不全为零时，称为 n 元非齐次线性方程组.

如果齐次性方程组(1.13)的系数行列式 $D\neq0$，则由克莱姆法则知齐次线性方程组(1.13)有唯一解 $x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$(这种未知数全等于零的解称为方程组的零解). 换句话说，如果齐次线性方程组(1.13)除零解外还有未知数不全为零的解(这种解称为方程组的非零解)，那么该齐次线性方程组(1.13)的系数行列式 D 等于零.

推论 若齐次线性方程(1.13)的系数行列式 $D\neq0$，则该方程组仅有零解；若齐次线方程组(1.13)有非零解，则系数行列式 D 等于零.

最后需要说明的是，用克莱姆法则解线性方程组，需具备两个前提条件：一是方程个数与未知数个数相等；二是系数行列式 D 不等于零. 克莱姆法则的优点是它不仅指出了解的存在，而且还具体给出了解的表达式，给出了方程组的解与系数、常数项的关系. 它有助于分析问题，在理论上具有重要的意义，但是解的表达式用 $(n+1)$ 个 n 阶行列式表示，如果 n 很大，则计算量非常大，所以实际求解高阶数字线性方程组时，一般不用克莱姆法则. 另外，在实际问题中遇到的线性方程组，往往是方程个数与未知数个数不等. 即使相等，系数行列式有可能等于零，这样的问题用克莱姆法则无法解决，在第三章中，这类问题将得到彻底解决.

习 题 一

1. 填空

(1)若行列式各行(列)数字之和均为零，则此行列式为________.

(2)设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}=$________.

(3)方程 $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ x & b & b \end{vmatrix}=0$ 的解为________.

(4)行列式中$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$的第二行第一列的元素 1 的余子式 $M_{21}=$ ________.

(5)设 A_{ij} 是元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式,那么 $a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=$ ________,$(i\neq s,i,s=1,2,\cdots,n)$.

(6)含有 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组,当系数行列式 D ________时,方程组仅有零解;当 D ________时,方程组有非零解.

2.利用行列式的展开式计算下列行列式.

(1)$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & c & b & a \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$　　(2)$\begin{vmatrix} a & b & 0 & c \\ 0 & a & 0 & 0 \\ d & c & a & f \\ 0 & a & 0 & a \end{vmatrix}$

3.计算行列式.

(1)$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}$　　(2)$\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$

(3)$\begin{vmatrix} 1 & 1+\cos\theta & 1+\sin\theta \\ 1 & 1-\sin\theta & 1+\cos\theta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　　(4)$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4.已知$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$,求下列行列式.

(1)$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 3x & 6y & 3z \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$　　(2)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$

(3)$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a+1 & \frac{1}{2}b+1 & \frac{1}{2}c+1 \\ x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

5.计算下列高阶行列式.

(1)$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$　　(2)$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & 1+x_1y_4 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & 1+x_2y_4 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & 1+x_3y_4 \\ 1+x_4y_1 & 1+x_4y_2 & 1+x_4y_3 & 1+x_4y_4 \end{vmatrix}$

6. 用克莱姆法则解方程组.

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=10 \\ x_2+2x_3+3x_4=6 \\ x_3+2x_4=3 \\ x_1+2x_2+3x_3+5x_4=11 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2 \\ bcx+acy+abz=3abc \end{cases}$

(a,b,c 为互不相等的实数)