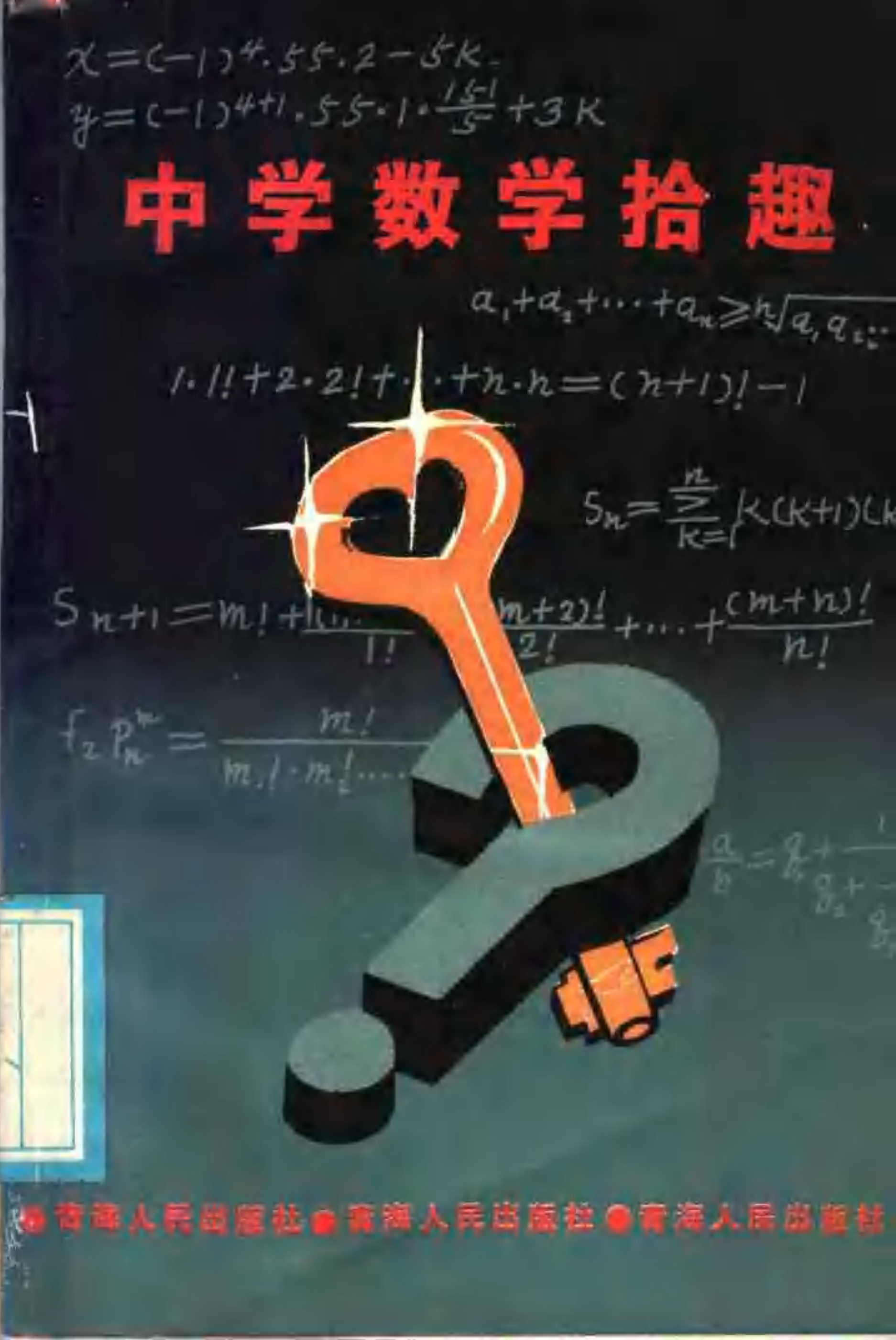

中学数学拾趣
青海人民出版社 青海人民出版社 青海人民出版社

中学数学拾趣

董复昌　王文　编

青海人民出版社

责任编辑　　张文选　米玉峰
封面设计　　任素贤

中学数学拾趣　　　　董复昌　王　文

青海人民出版社出版
（西宁市西关大街96号）
青海省新华书店发行　　青海西宁印刷厂印刷
开本：787×1092毫米　1/32　印张：4.5　字数：100,000
1986年3月第1版　　1986年3月第1次印刷
印数：1—5,000

统一书号：7097·1069　　定价：0.70元

目　录

思路活证法多

一、从几何学的历史看一题多解的作用

几何学的发生发展，源远流长。远在四千年以前，人们在测量农田，观察天象，建筑房舍时，就要用到许多几何学的知识。相传在古代埃及，尼罗河水经常泛滥，冲毁农田。在灾后就需要丈量田亩，进行测量。我国古代夏禹治水时也已用到测量学的知识，从而使河流就道，制服洪水。现在所用几何学一词的原意即为测地学。从我国出土的甲骨文中，就已经有了“规”、“矩”两个字。在公元前四百年的《周髀算经》里，已记载了周公旦（公元前一千一百年）与数学家商高的一段对话：“昔者周公问于商高曰：请问数将安出？商高曰：数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，……。”大意是：周公问商高数学是怎样产生的？商高说：“数学方法是在研究圆与方形的东西时产生的。圆是由方形产生的，方形又是由矩尺产生的”。他所说的矩尺就是木工用的曲尺。商高还讲了利用矩尺量距测高，成方作圆的道理。还有许多历史事实说明：早在几千年以前，人们从实践中已经积累了丰富的几何知识。

对于这些知识的归纳整理，首先发展了实验几何学。在这个基础上，数学家们把几何学推到了推理几何学的高度。数学这门科学，除研究对象不同于其它科学外，最突出的就

是研究对象的内部规律的真实性，必须用逻辑推理的形式来证明。几何学也不例外。作为研究图形性质的数学分科，靠直观、经验、实验都是不行的。这从下面两个例子可以看出。

图1中的正方形ABCD由于同心圆组的干扰，看上去不象是一个正方形。这就是直观错觉的例子。

古希腊著名的数学家毕达哥拉斯曾认为“任意两条直线段总是可以公度的”．就是说任意两条线段a和b，总存在线段l，使a与b均为l的整数倍。正是他的学生希派斯发现这是一条错误的经验，证明了不可公度线段的存在。

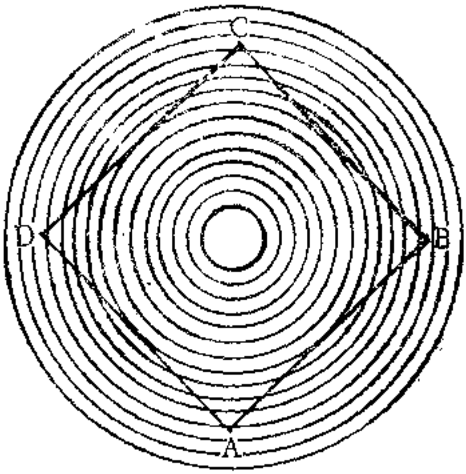


图1

逻辑学的创始人，希腊的亚里士多德说：“任何一种严密科学是从一些不能证明的原理开始的，不然所需要的证明将要无止境地继续下去，形成无穷无尽的步骤”。古希腊著名数学家欧几里德依照亚里士多德所说的意见，对原有几何学的知识进行了系统的归纳整理，并把几何学建立在少量的几个公理和逻辑推理的基础上，写出了世界名著《几何原本》．《几何原本》在世界各国都有译本，在我国是由明代大学士徐光启于公元1607年介绍给我们的。

所谓公理化体系，是先提出一些原始概念，这些概念是人们在长期实践中抽象出来的，如点、线、面、体。再规定这些概念间的一些基本关系，这些关系也是经过长期实践检验而公认是真确的。如“过不同两点可以作一条直线，而且只可作一条直线”。这些基本关系叫做公理。要求公理体系具有相容性、独立性和完备性。相容就是要求公理之间不能矛盾；独立就是要求公理之间不能互相推出；完备就是要求公理体系不用另加公理即可推出全部理论。虽然欧几里德公理体系是不完备的，但绝不能低估欧几里德伟大的业绩。

德国数学家希尔伯特在研究他的公理体系的基础上，成功地建立起一套完整的公理体系，并于1899年发表了著名的《几何基础》一书。

法国数学家笛卡儿创立了解析几何学。他用坐标法把数形巧妙地结合起来，把点看作运动中的点，把数看作变化中的数。他使人们对几何学的研究出现了一个新的局面。德国数学家克莱因也是从运动变化的观点，用变换群对几何学作出分类的。他认为几何学就是研究某个变换群下图形的不变性质。我们所学过的平移、旋转、反射和相似等都是一些简单的几何变换。在几何王国里，各种几何学真 象 是 百 花开放。

在中学平面几何教材中，欧氏几何学占有主要位置。它对于培养人们逻辑思维能力有着重要的作用，这一点不可低估。但在学到一定程度后，就可以用不同于欧氏几何的观点去看待平面几何的证明，如用初等几何变换的观点去看几何的证明；就可以用不同于欧氏几何的方法去完成平面几何的证明，例如用代数的方法、三角的方法、向量的方法、解析几何的方法等。

在中学平面几何教材中，已经引入了“平移、旋转”，“位似变换”与“相似变换”等初等几何变换的内容。这是由于变换能更深刻地揭示图形间的内在联系，更便于将数与形结合起来的缘故。在中学主要学习合同（全等）变换（包括反射、平移与旋转以及它们的合成）和相似变换（包括位似变换）。合同变换的特征是两点间的距离不变，相似变换的特征是角的大小不变，在做平面几何一题多解时，从初等几何变换去考虑题解是重要的一个内容。

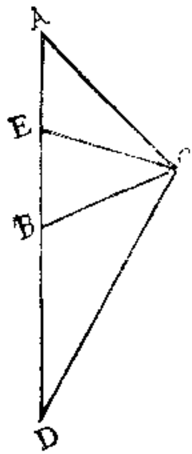
在中学里，数学以多学科设置的形式出现，这对于学好数学是有益和必要的。在做平面几何一题多解时，从代数的、三角的、解析几何的各种方法去考虑题解又是重要的一个内容。

二、平面几何中的一题多证

一题多解的目的在于开拓人们的思路，培养学生分析与解决问题的能力。它涉及的知识面广，这就要求对基础知识学得系统，学得扎实。由于它使用的基本技能技巧多，这就要求对基本技能用得娴熟。在解题时，要特别注意知识间的内在联系，不同解法上的异同变化。仅仅罗列一些不同解法是不够的，而应着重于不同解法的分析与对比。

下面所举两例，均着重于分析解题思路，而解法则不求完善，有些甚至只是略解。

例1 设△ABC中，AB＝AC，延长AB至D，使BD＝AB，E是AB的中点。求证：CD＝2CE（图2）。



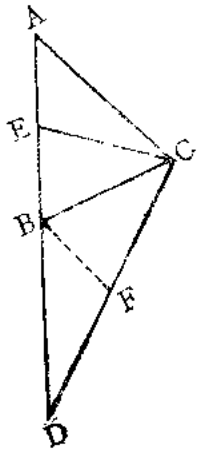


图 2　　　　　　图 3

证一　如图3，取CD的中点F，连接BF，则BF是△ADC的中位线。故BF$\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}$AC。

在△EBC和△FBC中：$BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AC=BF$。
$\angle EBC=\angle BCA=\angle FBC$。BC公用。
$\therefore \triangle EBC\cong\triangle FBC$。$\therefore CE=CF=\frac{1}{2}CD$。$\therefore CD=2CE$。

分析一　这是一道证线段相等的题目．主要证明两个三角形的全等．从几何变换角度看，证一主要利用合同变换完成证明的．△FBC可以看作是△EBC以BC为轴的 反 射．

当然，证这道题还用到一些别的方法，如在 证 明$CD=2CE$时，取CD的中点F，从而使问题转化为证明$CE=CF$。

我们着重分析解题的主要方法，并不是说基础知识不重要，如在证明△EBC≌△FBC时，E、F、B这三个中点的作用，中位线定理，三角形全等判定定理等都是十分重要的基础知识。

就合同变换这一主要方法而言，证一也不是唯一的．如

果延长CE至G,使EG＝CE,如图4,则证△GBC≌△DBC即可。如果延长AC至F，使CF＝AC，如图5，则证△DBC≌△FCB即可。如果过A引AF∥EC交BC的延长线于F点，如图6，则证△DBC≌△ACF即可。如果取AC的中点F，连接BF延长至G,使FG＝BF，如图7，则证△DBC≌△GCB即可。

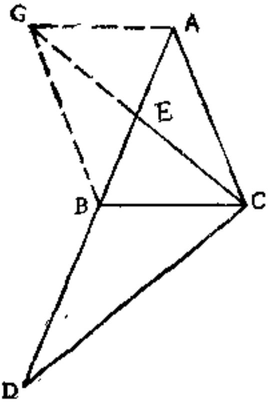


图 4

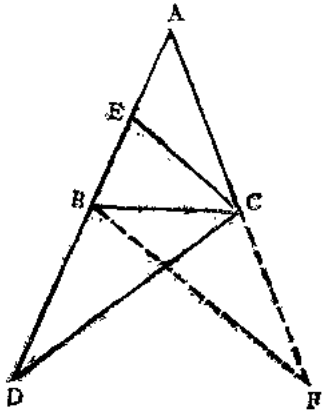


图 5

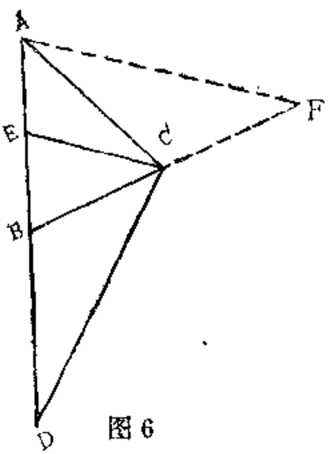


图 6

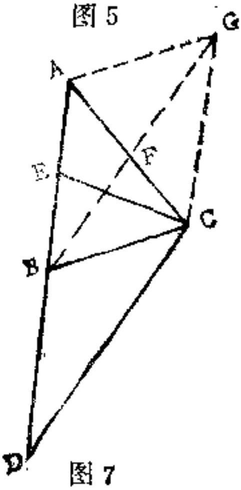


图 7

图 4 中，$\triangle GBC$可看作是$\triangle DBC$关于BC的反射；图5中，$\triangle FCB$可看作是$\triangle DBC$关于BC的中垂线的反射；图6中，$\triangle ACF$则可看作是$\triangle DBC$向右平移$|BC|$，再以CF为轴的反射；图 7 中，$\triangle GCB$则可看作是$\triangle DBC$向右平移$|BC|$，再以C为中心旋转180°所得。

合同(全等)变换当然不一定限于证两个三角形的合同。如图 8，取AC的中点F，连接BF，BF为$\triangle ADC$的中位线，故$CD=2BF$，BF可看作是CE关于BC中垂线的反射。又如图 9，过E作DC的平行线，与CB的延长线相交于G，则需证明$EG=EC$，而EG可看作是EC关于GC中垂线的反射。图 8 与图 9 均不是证两个三角形的合同，而是证两线段的合同。

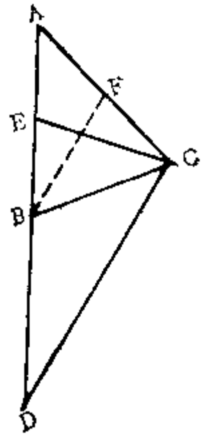


图 8

证二 如图 2，在$\triangle AEC$和$\triangle ACD$中：$\angle A$公用，

$AE:AC=1:2$，

$AC:AD=1:2$。

$\therefore \triangle AEC \backsim \triangle ACD$。

$\therefore CE:CD=1:2$。

$\therefore CD=2CE$。

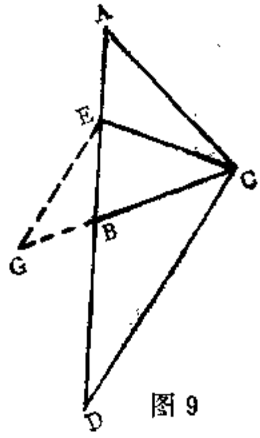


图 9

分析二 证二主要证明了两个三角形的相似。从几何变换角度看，是利用相似变换完成这一

证明的。相似变换可以看成是合同变换与位似变换的合成。$\triangle ACD$可看作是$\triangle AEC$经过平移、旋转和位似变换而得到。虽然相似变换中，两点间的距离发生了变化，但它们的相似比却是一个定值，故仍可以利用相似证明线段的相等。

当然，利用相似变换证明例1，也远不只这一种。如图10，过E、D分别作CB的垂线EF、DG交CB或其延长线于F、G，则只需证明$Rt\triangle DGC \backsim Rt\triangle EFC$即可。

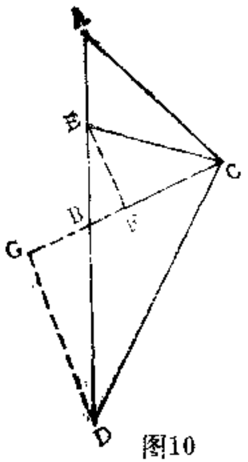


图10

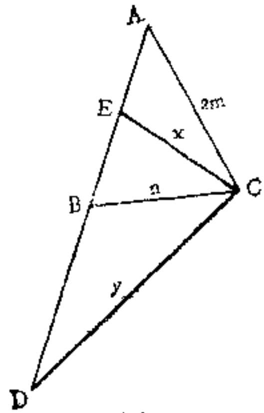


图 11

证三 设$CE = x$，$CD = y$，$AB = AC = 2m$，$BC = n$，CE、CB分别为$\triangle ABC$、$\triangle ACD$上AB边与AD边的中线（图11）。故有

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2(2m)^2 + 2n^2 - (2m)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2 + 2n^2},$$

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{2(2m)^2 + 2y^2 - (4m)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2y^2 - 8m^2}.$$

将第二个等式两边平方，整理得 $y^2 = 4m^2 + 2n^2$。

两边开平方，并取算术根，有 $y = \sqrt{4m^2 + 2n^2}$。

$\therefore y = 2x$。即$CD = 2CE$。

分析三 证三是用代数法证明的。用字母表示几何元

素，再利用已知条件列出方程或不等式，通过解这些方程或不等式，再完成几何命题的证明．在设元时，要恰当选择，以便使计算较为简便．

证四　如图11，设$AB=AC=2m$，则$AE=m$，$AD=4m$．在△AEC中，由余弦定理知

$$CE^2=m^2+(2m)^2-2m\cdot 2m\cos\angle A=5m^2-4m^2\cos\angle A.$$

在△ACD中，由余弦定理知

$$\begin{aligned}CD^2&=(4m)^2+(2m)^2-2\cdot 4m\cdot 2m\cos\angle A\\&=20m^2-16m^2\cos\angle A=4(5m^2-4m^2\cos\angle A).\end{aligned}$$

比较以上两式，得

$$CD^2=4CE^2.\quad\therefore CD=2CE.$$

分析四　证四是用三角法完成证明的．用三角法解题，思路简单，方法简便．关键是引入参数（角、线段等），消去参数．证四是引入m和∠A．三角函数、正弦定理与余弦定理等是经常使用的基础知识．

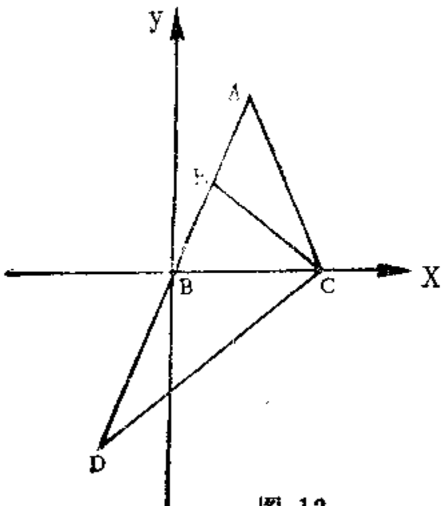


图 12

证五　如图12，以B为原点，以BC所在直线为X轴建立平面直角坐标系．

设$A(2a,\ 2h)$，则$C(4a,\ 0)$，$D(-2a,\ -2h)$，$E(a,\ h)$．由两点间距离公式，知

$$|CE|=\sqrt{(a-4a)^2+(h-0)^2}=\sqrt{9a^2+h^2},$$

$|CD| = \sqrt{(-2a-4a)^2+(-2h-0)^2} = 2\sqrt{9a^2+h^2}$.

$\therefore |CD| = 2|CE|$，即 $CD = 2CE$.

分析五 证五是用解析法完成证明的．解析法使关于形的问题转化成有关点的坐标的数量关系的问题．一般平面几何问题都可用解析法解决．许多其它解法不易解决的问题，坐标法往往可以奏效．计算的繁简则与选择坐标系很有关系．

若与其它知识结合起来，则更为简便．如证五中，设CD中点为F，则由中点公式，知$F(a,-h)$，又E关于BC的对称点$E'(a,-h)$，$\therefore E'$与F重合．$\therefore CD = 2CF = 2CE' = 2CE$.

证六 如图13，设$A(2a,2h)$，则$C(4a,0)$，$D(-2a,-2h)$，$E(a,h)$．由复数知识可知：

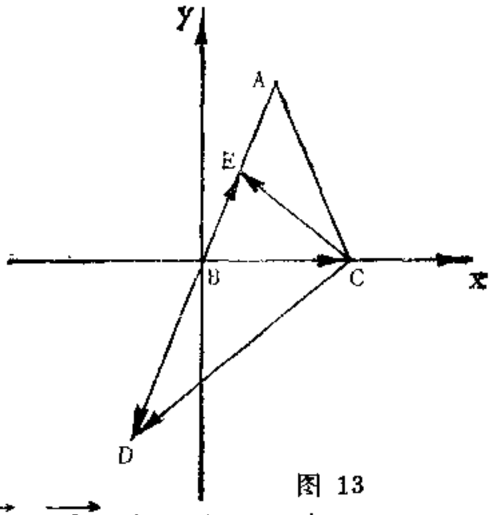


图 13

$|\overrightarrow{CE}| = |\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC}| = |(a+hi) - 4a|$

$= |-3a+hi| = \sqrt{(-3a)^2+h^2} = \sqrt{9a^2+h^2}$

$|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}| = |(-2a-2hi) - 4a| = |-6a-2hi|$

$$= \sqrt{(-6a)^2 + (-2h)^2} = 2\sqrt{9a^2 + h^2}.$$

$\therefore 2|\overrightarrow{CE}| = |\overrightarrow{CD}|$. 即 $CD = 2CE$。

分析六 这里用复数的向量表示，将证明线段相等转变成计算复数的模数相等的问题。

证七 如图 3，取CD的中点F，在$\triangle DCB$和$\triangle ECB$中，$BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BD$。又两三角形中DB、BE边上的高相等，故$S_{\triangle DCB} = 2S_{\triangle ECB}$。$\because$ F为CD的中点.
$\therefore S_{\triangle FBC} = \frac{1}{2}S_{\triangle DCB} = S_{\triangle ECB}$。

在$\triangle EBC$与$\triangle FBC$中，$BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC = BF$，BC公用。$S_{\triangle FBC} = S_{\triangle ECB}$。

$\therefore \frac{1}{2}\cdot BF\cdot BC\sin\angle FBC = \frac{1}{2}BE\cdot BC\sin\angle EBC$。
$\therefore \sin\angle FBC = \sin\angle EBC$。由于$\angle FBC$与$\angle EBC$不互补，故而$\angle FBC = \angle EBC$，进而推得$EC = FC = \frac{1}{2}CD$。
$\therefore CD = 2CE$。

分析七 利用三角形面积相等证明两线段相等，是证七的一个特点。这里还用了三角中三角形面积公式。

证八 作$\triangle CDE$的外接圆⊙O，如图14。$AC^2 = AB^2 = \frac{1}{2}AB\cdot 2AB = AE\cdot AD$。$\therefore AC$为⊙O的切线。
$\therefore \angle ACE = \angle ADC$。
$\therefore \angle ECB = \angle ACB - \angle ACE = \angle ABC - \angle ADC = \angle DCB$。

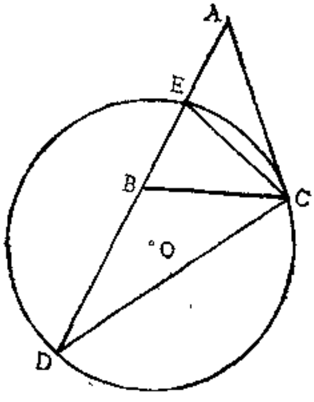


图 14

$\therefore$ CB为$\triangle CDE$中$\angle DCE$的角平分线.

$$\therefore \frac{CE}{CD}=\frac{BE}{DB}=\frac{1}{2}. \quad \therefore CD=2CE.$$

分析八 证八用到切线割线定理的逆定理和三角形内角角平分线的重要性质. 关键是证明CB为$\angle DCE$的角平分线.

从例1的各种证法与分析里, 我们可以看出, 古老的欧氏几何, 对于培养人们的逻辑推理的能力, 空间想象的能力都有十分重要的作用. 但是用几何变换的思想, 用多种解题的方法去学习平面几何, 也是十分必要的. 从改造传统教材结构, 从发展角度看, 后者就更为重要.

例2证两个角相等, 着重于分析证题的思路, 间或作一些简单的证明.

例2 如图15, 四边形ABCD中, BC=DA. E、F分别是AB和CD的中点, 直线EF分别与BC、AD的延长线交于G、H点. 求证:

$\angle AHE=\angle BGE$.

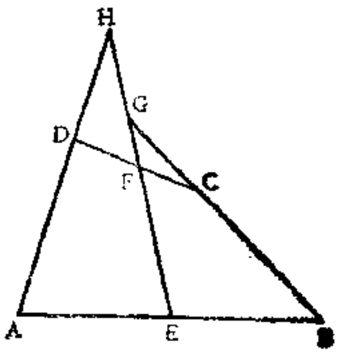


图 15

思路一 如图16, 取AC的中点M, 利用三角形中位线定理知FM∥DA, EM∥BC. 故$\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$. 又知$FM=\frac{1}{2}DA=\frac{1}{2}BC=EM$. $\therefore \angle 3=\angle 4$. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

思路二 如图17, 连接BF且延长至K, 使FK=BF, 利用平行四边形的判定定理和性质定理知DK=BC=DA, 利用中位线定理和等角定理知AK∥EF, 故$\angle 3=\angle 4$,

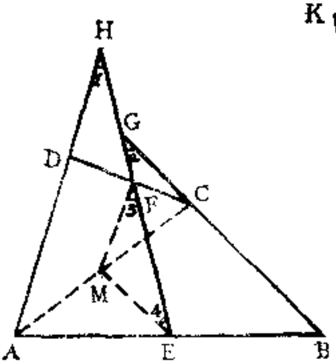


图 16

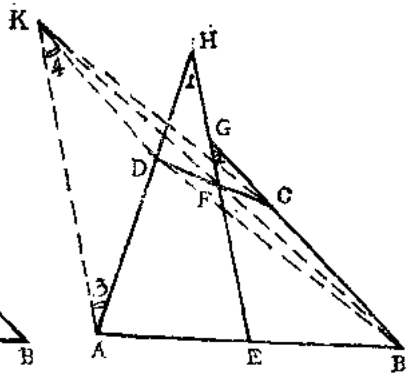


图 17

$\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$。　　$\therefore \angle 1 = \angle 2$。

思路三　如图18，过D引$DK \parallel CB$，过B引$BK \parallel CD$，DK与BK相交于K点，M为AK的中点，连接ME，利用平行四边形的判定定理和性质定理知$DK = CB = DA$。利用等腰三角形的轴对称性质知$\angle 3 = \angle 4$。又利用中位线定理知$ME \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2} KB \mathrel{\underline{\parallel}} DF$。进而推出$DM \parallel FE$。

$\therefore \angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$。

$\therefore \angle 1 = \angle 2$。

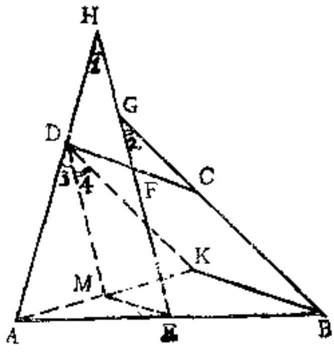


图18

思路四　如图19，作平行四边形AMFD和NBCF。利用平行四边形的性质定理知$FM = DA = CB = FN$。又$AM \mathrel{\underline{\parallel}} DF$，$BN \mathrel{\underline{\parallel}} CF$，而$DF = CF$，$\therefore AM \mathrel{\underline{\parallel}} BN$。$\therefore$ AMBN也为平行四边形。$\therefore ME = EN$。$\therefore FE$为等腰三角形MFN的底边上之中线。$\therefore \angle 3 = \angle 4$。　又$\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$。