高等学校21世纪计算机教材

高等数学

程海棠　刘伟巍　编著

冶金工业出版社

高等学校21世纪计算机教材

高 等 数 学

程海棠　刘伟巍　编著

北　　京
冶 金 工 业 出 版 社
2005

内 容 简 介

高等数学是理工类院校一门十分重要的必修基础课程。本书主要介绍了函数与极限、异数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、级数、广义积分、Fourier 级数、欧式空间与多元函数、多元函数微分学、重积分、曲线和曲面积分及场论。

本书结构合理、内容丰富、例题典型，不仅可作为高等学校理工科各专业本科生高等数学课程的教材，也可作为全国高等教育自学考试和硕士研究生入学考试理工科考生的复习参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 程海棠，刘伟巍编著. —北京：冶金工业出版社，2004.12
ISBN 7-5024-3655-3

I. 高… II. ①程…②刘… III. 高等数学—高等学校—教材 IV.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 121836 号

出版人 曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009）
责任编辑 程志宏
佛山市新粤中印刷有限公司印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
2005 年 2 月第 1 版，2005 年 2 月第 1 次印刷
787mm × 1092mm 1/16； 19.75 印张； 453 千字； 306 页
30.00 元
冶金工业出版社发行部 电话：（010）64044283 传真：（010）64027893
冶金书店 地址：北京东四西大街 46 号（100711） 电话：（010）65289081
（本社图书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

前　言

一、本书背景

高等数学是理工类院校一门十分重要的必修基础课程，也是理工类硕士研究生入学考试的一门必考科目。

本书结合全国高等教育创建示范专业数学教学改革的经验，并根据全日制大学高等数学教学大纲和原国家教委于 1996 年修订的高等学校《高等数学教学基本要求》编写的。

在本书编写的过程中，作者始终致力于本书的质量，反复进行修改、校对、调整与完善。本书既结合了编者在高等数学的教学与研究实践中积累的一些有益的经验，也采纳了同类教学参考书的某些技巧与方法，同时考虑到读者对象的特点，最后经过较长时间的酝酿，编写了此书。

二、本书结构

本书内容和结构组织如下：

第 1 章：介绍了函数、极限的概念以及相应的运算法则。

第 2 章：介绍了导数的定义、几何意义及求解，还介绍了微分的概念、运算法则和基本公式等。

第 3 章：介绍了微分中值定理、洛必达法则、函数的极值、函数的单调性与函数的凸凹性以及函数的拐点。

第 4 章：介绍了原函数的定义与不定积分的概念、不定积分的性质、换元积分法、分部积分法及不定积分的举例和积分表的使用。

第 5 章：介绍了定积分的概念和性质、定积分的计算及其应用。

第 6 章：介绍了级数的概念与收敛性及基本性质、正项级数、一般项级数、无穷级数及代数运算、函数项级数及幂级数。

第 7 章：介绍了无穷区间的广义积分及其收敛性判别法、无界函数的广义积分及无界函数积分收敛性的判别法。

第 8 章：介绍了三角级数与 Fourier 级数、Fourier 级数的收敛性、正弦级数与余弦级数、任意区间上的 Fourier 级数及傅氏积分与傅氏变换。

第 9 章：介绍了 R^n 中的点集及其性质、多元函数的极限和连续性。

第 10 章：介绍了偏导数与全微分、由方程（组）确定的隐函数及其求导法、泰勒公式、多元函数微分学的应用及含参变量的积分。

第 11 章：介绍了重积分的概念和性质、化重积分为累次积分、重积分的变量替换、重积分的应用及广义多重积分。

第 12 章：介绍了曲线和曲面积分、积分间的联系与场论基础。

三、本书特点

本书对于基本概念的叙述深入浅出、清晰准确、重点突出；对于基本方法的介绍从分

析、比较切入，力求阐明数学思维方法的本质及其应用技巧，做到条例清晰、文字准确、通俗易懂、便于自学。本书注重基本运算能力的培养，为此在教材中配有适量的例题，对于例题的选取力求典型充实，内容覆盖面广，题型种类多，同时强调内容的融汇贯通，以启迪思维。通过这些例题的讲解与分析，能加深读者对基本内容的理解，提高解决问题的能力，培养读者的严谨与创新能力。本书在每章的最后还附有小结，包括重点、难点与疑点，使读者能更明确章节的内容和结构，以做到学习目的明确、心中有数。本书在各章节的后面配置了一定数量的习题，这些习题都是根据章节的重点、难点与疑点而编写的，由浅入深，具有典型性和综合性。

四、本书适用对象

本书既可作为高等学校理工科各专业本科生高等数学课程的教材，也可作为全国高等教育自学考试和硕士研究生入学考试理工科考生的复习参考用书。

书中标有*号的内容一般不作要求，读者可结合实际情况选用。

本书在编写的过程中得到冶金工业出版社的大力支持，在此表示衷心地感谢。

由于作者时间仓促，水平有限，书中的缺点和不足之处在所难免，恳请各位专家和读者批评指正。

虽然经过严格的审核、精细的编辑，本书在质量上有了一定的保障，但我们的目标是力求尽善尽美，欢迎广大读者和专家对我们的工作提出宝贵建议，联系方法如下：

电子邮件：service@cnbook.net

网址：www.cnbook.net

此外，**本书附送的电子教案和每章习题的参考答案也可从该网站免费下载**，该网站还有一些其他相关书籍的介绍，可以方便读者选购参考。

编　者

2004 年 10 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　函数与极限

函数是被广泛应用的数学概念之一，在各种科学中都有着重要的意义与地位。函数同时是高等数学研究的主要对象，也是高等数学中重要的概念之一。函数的概念与求极限的运算可以说是贯穿了高等数学的始终，因此，全面掌握函数与求极限的方法及技巧是学好高等数学的基本要求。本章将全面地介绍函数、极限及函数的连续性等基本概念，并重点介绍极限这个基础理论。

1.1　函数

1.1.1　函数概念

1.　函数定义

在自然现象与技术工程中，往往同时遇到几个或更多个的在某过程中变化的量，即可取不同的数值的量，这种量称为变量。这些变量不是孤立的变化，而是相互联系着、遵循着一定的规律变化。下面列举几个变量相互联系着的例子：

【例 1-1】球的半径 r 与球的面积间的关系，由公式 $S=4\pi r^2$ 确定，半径 r 与球的面积相互联系着。

【例 1-2】初速度为 0 的自由落体运动中，物体的速度 v 与时间 t 是两个变量，当时间 t 变化时，物体的速度也相应的变化，这两个变量之间有下列关系：$v=gt$。

【例 1-3】 $\forall x\in[a,b]$ 都对应一个数 $y=6x^4-3x^{\frac{2}{3}}+7$，即 x 与 y 之间的对应关系是：

$$y=6x^4-3x^{\frac{2}{3}}+7$$

以上三个例子拥有共同的特征：两个变量之间相互依赖，当其中一个变量在某一范围内取定一个数值时，另一个变量就有一个确定的值与它对应。于是有如下的函数定义：

定义 1-1：设 A 是非空数集。若存在对应关系 f，对 A 中任意数，按照对应关系 f，对应惟一一个 $y\in R$，则称 f 是定义在 A 上的函数，记为：

$$f:\ A\to R$$

数 x 对应的 y 称为 x 的函数值，表示为 $f(x)$。x 称为自变数，y 称为因变数。数集 A 称为 f 的定义域，函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数的值域。

注意：

① 函数的定义表明函数是由定义域和对应规律所确定的，对两个变量只要给出定义域和对应规律就构成了一个函数关系。因此，又把函数的定义域和对应关系称为函数的两个要素。

② 函数的定义域就是使函数有定义的实数的全体。因为如果自变量取某一数值 x_0 时，函数有一个确定的值和它对应，那么就称函数在 x_0 处有定义。

函数的定义域是函数定义的一个重要元素，那么，如何确定函数的定义域呢？通常函数的定义域的确定是按照函数的实际意义和问题的实际意义具体确定的。如例 1-3，函数

由公式给出时，不考虑函数的实际意义，这时函数的定义域就是使式子有意义的自变量的全体。对于实际意义的函数，它的定义域是要受实际意义的约束，如上述的例 1-1，半径 r 的球的面积这个函数，从抽象的函数来说，r 可取任意实数；从它的实际意义来说，半径 r 不能取负数，因此，它的定义域是区间 $[0,+\infty)$。

下面给出函数定义域的几个求解例子：

【例 1-4】 求函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 的定义域。

解：显然只有分母 $1-x^2\neq 0$，即 $x\neq\pm 1$ 时，表达式才有意义，因此，函数的定义域为 $x\neq\pm 1$ 的全体实数，即 $\{x\mid x\neq\pm 1\}$。

【例 1-5】 求函数 $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}(b>a>0)$ 的定义域。

解：因为根式内的 $(x-a)(b-x)$ 不能为负，即 x 满足不等式。

$(x-a)(b-x)\geqslant 0$ 它可分为两种情况，x 适合不等式组：

$$\begin{cases}x-a\geqslant 0\\ b-x\geqslant 0\end{cases}\qquad (1)$$

或者适合不等式组：

$$\begin{cases}x-a\leqslant 0\\ b-x\leqslant 0\end{cases}\qquad (2)$$

由（1）式可以解出：$a\leqslant x\leqslant b$，而（2）式无解，因此函数的定义域为 $a\leqslant x\leqslant b$，或写成 $[a,b]$。

2. 函数的表示法

函数通常有三种表示法：表格法、图示法和公式法（或解析法）。

1）表格法

表格法就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格的方法列出。表格法的优点是使用方便。

2）图示法

把自变量 x 与因变量 y 当作平面直角坐标系中点的横坐标与纵坐标，y 是 x 的函数可用直角坐标系中的平面曲线表示。

图示法表示函数的优点是直观性强，函数的变化一目了然，并且便于研究函数的几何性质，缺点是不便于作理论上的推导运算。

3）公式法（解析法）

把两个变量之间的函数关系用数学公式表示出，对数学公式的运算就可以由自变量的值得到对应的函数值。高等数学所涉及的函数大多是用此法表出。

如例 1-1 中的 S 与 r，例 1-2 中的 v 与 t，例 1-3 中的 y 与 x。

用公式法表示函数的优点是便于函数进行理论上的研究，简单明确，便于计算。缺点是不够直观。为了克服这个缺点，有时将函数同时用公式法与图示法表示，这样对函数既利于理论上的研究，又具有直观性强、一目了然的优点。

用公式法表示函数时，如果函数在不同的范围内用不同的式子表示，这样的函数称为分段函数。对分段函数求函数值时，不同点的函数值应带入相应范围的式子中去。

【例 1-6】已知函数：$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$，试求：$f(-3), f(0), f(3)$。

解：因为 $x=-3<0$，所以 $f(-3)=-1$；当 $x=0$ 时，$f(0)=0$；因为 $x=3>0$，所以 $f(3)=3^2+1=10$。

1.1.2 函数的性质

1. 函数的四则运算

函数的定义包含两个要素：对应关系与定义域。因此，定义两个函数相等和四则运算需要同时考虑这两个要素。

定义 1-2：设两个函数 f 与 g 分别定义在数集 A 与 B 上。

（1）若 $A=B$，且 $\forall\ x\in A$，有 $f(x)=g(x)$，则称函数 f 与 g 相等，表示为 $f=g$。

（2）若 $A\cap B\neq\Phi$，则称函数 f 与 g 的和 $f+g$、差 $f-g$、积 $f\ g$ 分别定义为：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\qquad x\in A\cap B,$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\qquad x\in A\cap B,$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)\qquad x\in A\cap B。$$

（3）若 $A\cap B-\{x\mid g(x)=0\}\neq\Phi$，则称函数 f 与 g 的商 $\dfrac{f}{g}$ 定义为：

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\qquad x\in A\cap B-\{x\mid g(x)=0\}$$

2. 函数的几种特性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D。

1）有界性

设数集 $X\in D$，存在正常数 M，任意 $x\in X$，相应的函数值满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界；如果不存在这样的正常数 M，则称 $f(x)$ 在 X 上无界。

如果 $f(x)$ 在 D 上有界，则称 $f(x)$ 为有界函数。例如函数 $\cos x$ 是有界函数，函数 $\dfrac{1}{1-x}$ 在 $[-1,2]$ 内是无界的，但它在 $[2,3]$ 上是有界的。

2）单调性

设区间 $I\subseteq D$，任意 $x_1,x_2\in I, x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果任意 $x_1,x_2\in I, x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的。

在区间 I 上单调增加或是单调减少的函数统称为区间 I 上的单调函数。从集合直观上看，区间 I 上的单调增加（减少）的函数，其图像自左向右是上升（下降）的。

3）奇偶性

设 D 关于原点对称，任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数。

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称。

4）周期性

设存在一个不为零的常数 T，任意 $x\in D$，都有 $x\pm T\in D$ 且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称函数

$f(x)$为周期函数，T为$f(x)$的周期。当周期函数存在最小正周期时，通常所说的周期指的是最小正周期。

周期函数若以$T(0)$为周期，则在每个长度为T的区间$[nT,(n+1)T](n\in Z)$上函数的图像是相同的。

【例 1-7】 函数$y=\{x\}$是以1为周期的周期函数。

事实上，$\forall x\in R$，有$x\pm 1\in R$，且：

$$\{x-1\}=(x-1)-[x-1]=x-1-[x]+1=x-[x]=\{x\}$$
$$\{x+1\}=(x+1)-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=\{x\}$$

1.1.3 初等函数

1. 基本初等函数

在数学的发展过程中，形成了最简单的六类函数，即常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数，这六类函数称为基本初等函数。这些函数我们在中学的时候都接触过，这儿就不再重复。

2. 复合函数

定义 1-3：设函数$z=f(y)$的定义域为B，函数$y=\Phi(x)$定义在数集A，G是A中使$y=\Phi(x)\in B$的x的非空子集，对$\forall x\in G$，按照对应关系Φ，对应惟一一个$y\in B$，再按照对应关系f对应惟一一个z，即$\forall x\in G$都对应惟一一个z，于是在G上定义了一个函数，表示为$f\cdot\Phi$，称为函数$y=\Phi(x)$与$z=f(y)$的复合函数，即：

$$(f\cdot\Phi)(x)=f[\Phi(x)],x\in G$$

y称为中间函数，今后经常将函数$y=\Phi(x)$与$z=f(y)$的复合函数表示为：

$$z=f[\Phi(x)],x\in G$$

复合函数还可以有两个以上的函数的复合。“复合”是由简单函数构造复杂函数的重要方法；反之，许多复杂函数又可以把他们“分解”成简单函数的复合，这是复合的相反过程。以后我们常用这种“分解”的方法简化对函数的讨论。因此，能够熟练的分析复杂函数的构造并化成简单函数的复合是非常重要的。

注意：$f\cdot\Phi$是函数Φ与f的一种运算 — 复合运算。一般来说，$f\cdot\Phi\neq\Phi\cdot f$（尽管个别点的函数值可能相等，但是作为函数不相等）。例如，设$f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$，则：

$$(f\cdot g)(x)=\sin x^2\neq(\sin x)^2=(g\cdot f)(x),\forall x\neq 0$$

这说明函数的复合运算与加、乘运算不同，它不满足交换律。容易证明它满足结合律：

$$f\cdot(g\cdot h)=(f\cdot g)\cdot h$$

【例 1-8】 函数$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0\\ 2-x, & x<0\end{cases}$，求$f[f(3)]$。

解：$f[f(3)]=f(1-3)=f(-2)=2-(-2)=4$

【例 1-9】 设函数$f(x)=x^3$，$\Phi(x)=\sin\sqrt{x}$，求$f[\Phi(x)],\Phi[f(x)]$。

解：由Φ（x）的表达式我们有：

$$f[\Phi(x)]=[\Phi(x)]^3=\sin\sqrt[3]{x},\Phi[f(x)]=\sin\sqrt{f(x)}=\sin(x^{\frac{3}{2}})$$

【例 1-10】分别指出函数 $y=\sin 5x, y=e^{\cos x}$ 是由哪些简单函数复合而成的。

解：$y=\sin 5x$ 是由 $y=\sin u, u=5x$ 复合而成的；$y=e^{\cos x}$ 是由 $y=e^u, u=\cos x$ 复合而成的。

3.　初等函数

定义 1-4： 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合构成的 $f(x)$，可用一个式子表示的函数，称为初等函数。

例如，$y=x^5+4x-5, y=\tan x^2$ 等等都是初等函数。高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数。

1.2　极限

高等数学研究的主要对象之一就是函数，而我们研究函数的主要方法就是极限，这也是高等数学区别于初等数学的显著标志。因此，极限概念是高等数学的重要概念，极限理论是高等数学的基础理论。

1.2.1　数列极限

1.　数列极限概念

定义 1-5： 设有数列 $\{a_n\}$，a 是常数，若对任意 $\varepsilon>0$，总存在自然数 N，对任意自然数 $n>N$，有：

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

则称数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a（或 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限）或数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a（$\{a_n\}$ 是收敛数列），表示为：

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \text{ 或 } a_n\to a,(n\to\infty)$$

若数列 $\{a_n\}$ 不存在极限，则称数列 $\{a_n\}$ 发散。

由此可见，数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a，是指数列的项数无限增大时，通项的值的是无限逼近常数 a，即通项 a_n 与 a 的距离 $|a_n-a|\to 0$。

数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a，用逻辑符号表示为：

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N\in \mathrm{N}_+,\forall n>N$$

有 $|a_n-a|<\varepsilon$

这就是数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义，以后将经常使用这个定义。

注意： 此定义中的正数 ε 的任意性，因为只有这样不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 a_n 与 a 无限接近的意思，且定义中的正整数 N 与任意给定的正数 ε 是有关的，它是随着 ε 的给定而选定的。

下面给出数列极限的几何解释：a_n 以 a 为极限就是对任意给定的开区间 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$，第 N 项以后的一切数 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 全部落在这个区间内。

【例 1-11】利用数列极限的定义，讨论下列数列的极限：

（1）$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$；

（2）$1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{4},\cdots,1,\frac{1}{2n},\cdots$。

解：

（1）该数列的通项 $a_n=\frac{1}{2^n}$，通项 a_n 与 0 的距离，当项数 n 无限增大时，$|a_n-0|=\frac{1}{2^n}$ 无限逼近于零。即通项 a_n 无限逼近 0，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$。

（2）在数列 $1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{4},\cdots,1,\frac{1}{2n},\cdots$ 中，$a_{2n-1}=1,a_{2n}=\frac{1}{2n}$ =1，当项数 n 无限增大时，奇数项 a_{2n-1} 无限逼近 1，而偶数项 a_{2n} 无限逼近于零，因此一般项 a_n 不可能无限逼近一个常数，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在。

【例 1-12】用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{2n+1}=0$。

证明：$\forall\varepsilon>0$，要使不等式 $\left|\frac{7}{2n+1}-0\right|=\frac{7}{2n+1}<\frac{7}{2n}<\varepsilon$ 成立，从不等式 $\frac{7}{2n}<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{7}{2\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{7}{2\varepsilon}\right]$，于是：

$$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\frac{7}{2\varepsilon}\right],\forall n>N，有\left|\frac{7}{2n+1}-0\right|<\varepsilon$$

即：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{2n+1}=0$。

【例 1-13】用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0,\alpha>0$。

证明：$\forall\varepsilon>0$，要使不等式 $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$ 成立，解得 $n>\frac{1}{\varepsilon^\alpha}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\right]$ 于是 $\forall\varepsilon>0,\ \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon^a}\right],\ \forall n>N$ 有 $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon$。

即：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$。

【例 1-14】证明数列 $\{(-1)^n\}$ 发散。

证明：$\exists\varepsilon_0=1$，分两种情况：

当 $a\geqslant0,\forall N\in N_0,\exists n_0\geqslant$ 0（奇数）$>N$，有：

$$|(-1)^{n_0}-a|=|-1-a|=1+a\geqslant\varepsilon_0$$

当 $a<0,\forall N\in N_0,\exists n_0\geqslant$ 0（偶数）$>N$，有：

$$|(-1)^{n_0}-a|=|1-a|=1+(-a)>\varepsilon_0$$

即：数列 $\{(-1)^n\}$ 发散。

2. 收敛数列的性质与运算

收敛数列有几个重要的性质，下面我们以定理的方式给出。

定理 1-1（惟一性）：若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它的极限是惟一的。

证明：设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$。根据数列极限的定义，即对于 $\forall\varepsilon>0$，有：

$\exists N_1\in N_+,\forall n>N_1$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，

$\exists N_2\in N_+,\forall n>N_2$，有 $|a_n-b|<\varepsilon$，

取 $N=\max\{N_1,N_2\}.\forall n>N$，同时有：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com