初中平面几何解题方法与技巧

pingmianjihe
jieti
fangfayujiqiao

明天出版社

内 容 提 要

本书是以国家教委1987年新教学大纲为依据，针对学生学习平面几何经常遇到的困难而编写的。作者根据多年的教学经验，从学生的实际水平出发，深入浅出地分析问题，简明扼要地归纳出解题方法和技巧。书中文字叙述通俗流畅，解题步骤清晰条理，使学生能从中掌握平面几何解题的基本规律，收到事半功倍的效果。这本书可供初中学生学习平面几何用，也可作为平面几何知识的综合练习和课外读物，同时可供教师在教学中参考。

前　言

平面几何教学的主要任务是使学生掌握基础知识，培养学生的逻辑思维能力和论证能力，从而提高分析问题和解决问题的能力．因此，做一定数量的高质量的习题，是实现这一目标的主要途径．但是，倘若盲目追求数量便会陷入题海，或一味追求偏题、难题难免造成时间的浪费．

本书以国家教委1987年颁布的《全日制中学数学教学大纲》为依据，力图通过对题目已知和未知的内在联系的分析，揭示命题的论证途径，总结解题的一般方法，探索解题的规律性，并注意解题技巧的训练，以期达到新大纲提出的“减轻负担，降低难度”的要求．

从初中学生的实际水平出发，书中文字叙述力求通俗流畅，问题的分析深入浅出，方法、技巧的归纳简明扼要，使一般程度的学生都能看懂，易于掌握其解题规律和解题技巧，收到事半功倍的效果．对程度较高的学生也可从中受到启发，学到一些新东西，开阔思路，举一反三．每一专题后面都设有一定数量的习题，用以巩固、熟练这些方法和技巧，并附有习题的答案和提示作为参考，以便于自学．

这本书主要供初中二、三年级的学生学习平面几何时用，也可作为平面几何知识的综合练习和课外读物，同时可供教师在教学中作参考．

在编写过程中，得到淄博市教研室李维民、张安禄同志

的热情帮助和支持，在此表示感谢。

由于水平有限，缺点、错误在所难免，恳切希望读者批评指正。

编者

目　　录

一、三角形中线问题的辅助线添作

中线是三角形中的主要线段之一．利用中线及三条中线的交点——重心的性质，在解题中有两种常用的添作辅助线的方法．

1．延长中线的全长（倍中线法）

如图 1－1，AD为BC边上的中线，延长至E，使$DE=AD$，连BE，此时有$\triangle BDE\cong\triangle ADC$，这往往可集已知与未知于同一个三角形中，使问题容易得到解决．

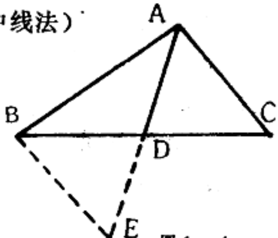

图 1－1

例1 已知$\triangle ABC$中，AD为BC边上的中线，且$BC>2AD$．

求证：$\angle A>90°$．

证明：延长中线AD到E，使

$$\left.\begin{array}{l}AD=DE\text{（如图 1－1）}\\ BD=DC\\ \angle ADC=\angle BDE\end{array}\right\}\Longrightarrow\triangle ADC\cong\triangle BED$$

$$\Longrightarrow\left.\begin{array}{l}BE=AC\\ AB=AB\\ BC>2AD=AE\end{array}\right\}\Longrightarrow\angle A>\angle ABE=180°-\angle A$$

$\Longrightarrow 2\angle A>180^\circ \Longrightarrow \angle A>90^\circ$.

类似地还可证明：若 D是 $\triangle ABC$ 中BC边上的 中 点，则$AB+AC>2AD$。

例 2　已知$\triangle ABC$中，$\angle A=60^\circ$，$AB+AC=10$　求BC边上的中线AD的最小值。

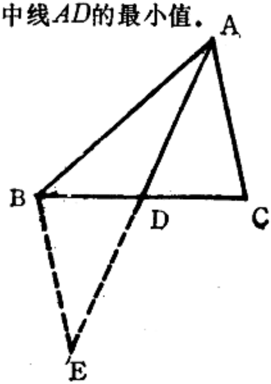

图 1—2

解：如图 1—2，设$AC=x$，延长AD至E，使$DE=AD$，则$\angle ABE=180^\circ-\angle A=180^\circ-60^\circ=120^\circ$，$BE=AC=x$，$AB=10-x$，在$\triangle ABE$中，由余弦定理：$(2AD)^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cdot\cos ABE$

即　$4AD^2=(10-x)^2+x^2-2(10-x)x\cdot(-\frac{1}{2})$

整理，得　$AD=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-10x+100}=\frac{1}{2}\sqrt{(x-5)^2+75}$，

$\therefore$当$x=5$时，即$AB=AC=5$时，AD有最小值，AD的最小值是$\frac{1}{2}\sqrt{75}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$．

例3　设PA为圆的切线，A为切点，PCB为任一割线，M为AC的中点，PM的延长线交AB于D，

求证：$PB^2:PA^2=BD:AD$

分析：先利用切割线定理：

$PA^2=PB\cdot PC$。 将欲证之式化简为$\frac{PB}{PC}=\frac{BD}{AD}$ 考虑到M为AC的中点，PM为$\triangle PAC$的中线，将PM延长一倍到N（即$MN=PM$），则$AN=PC$，且$AN\parallel PC$。因此，只需证：$\frac{PB}{AN}=\frac{BD}{AD}$，

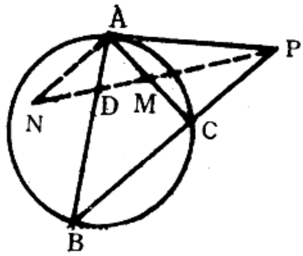

图 1—8

这只需证$\triangle AND\backsim\triangle PBD$，由$PC\parallel AN$便可得到。

（证明略）

例 4 如图 1—4，设H是$\triangle ABC$的垂心。M是BC的中点，延长中线AM交$\triangle BHC$的外接圆于D。

求证：M是AD的中点。

分析：直接证法不易奏效。现将AM延长一倍到D'，使$MD'=AM$。证明D'在$\triangle BHC$的外接圆上，用同一法完成证明。

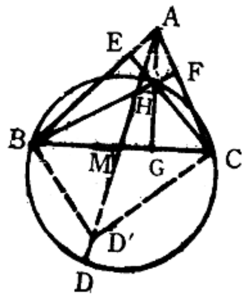

图 1—4

证明：延长AM到D'，使$MD'=AM$ 连BD'、CD' 由$ABD'C$是平行四边形$\Longrightarrow\angle BD'C=\angle A\Longrightarrow\angle A+\angle BHC=\angle A+\angle EHF=180^\circ\Longrightarrow\angle BD'C+\angle BHC=180^\circ\Longrightarrow B$、$H$、$C$、$D'$四点共圆$\Longrightarrow D'$在$\triangle BHC$的外接圆上。但$AM$的延长线与此圆的交点只有一个，故$D$与$D'$点重合，$\therefore M$为$AD$的中点。

2. 利用重心的性质添作辅助线.

若已知条件中涉及到三角形的重心，常用的解题方法有两种：

（1）直接利用重心的性质.

如图1－5，AD、BE、CF分别为BC、AC、AB边上的中线，G为重心，则$AG=\frac{2}{3}AD$，$BG=\frac{2}{3}BE$，$CG=\frac{2}{3}CF$，$DG=\frac{1}{3}AD$，$EG=\frac{1}{3}BE$，$FG=\frac{1}{3}CF$.

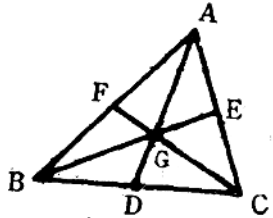

图1－5

例1 如图1－6，在▱$ABCD$中，M、N分别为AB、CD的中点，BD为对角线，CM、AN交BD于H、G.

求证：$BH=HG=GD$

分析：连结AC，交BD于O，则O点为AC的中点.因此H为$\triangle ABC$的重心，

$\therefore BH=\frac{2}{3}BO=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}BD)=\frac{1}{3}BD$.

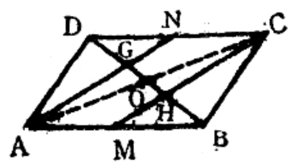

图1－6

同理：$DG=\frac{1}{3}BD$，从而$GH=\frac{1}{3}BD$，

$\therefore BH=HG=GD$.

（2） 延长中线的三分之一长，这样可得到由各中线

的$\frac{2}{3}$长的线段组成的三角形，实质上是把三角形的重心的性质集中于同一个三角形中加以应用，如图1—7，延长GD至M，使$DM=GD$，连接BM，得到由各中线$\frac{2}{3}$长组成的$\triangle BGM$。

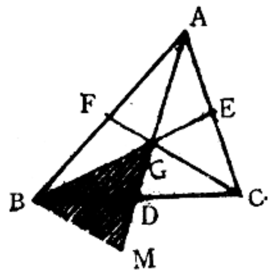

图1—7

例 2 求证：三角形中任意两边上的中线之和大于第三边上的中线。

分析：如图1—7添作辅助线后，$\triangle BGM$的三边GM、GB、BM分别为三中线长的$\frac{2}{3}$，利用三角形任意两边之和大于第三边，便可得证。

例 3 如图1—5，求证：

（1） $S_{\triangle BGC}=S_{\triangle CGA}=S_{\triangle AGB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$；

（2） 以AD、BE、CF的长为三边的三角形的面积等于$\triangle ABC$面积的$\frac{3}{4}$。

此例题读者自证，提示：（1）直接用重心的性质；（2）如图1—7的方法添作辅助线后，再用重心的性质证之。

说明：以上两种添作辅助线的方法是相互联系的，解题时要灵活运用。如题目条件中有重心，则必有中线，可使用第一种方法；如只有一条中线，也可添作另一条中线得重

心，再用重心的性质．

练 习 一

1．在$\triangle ABC$外作正方形$ABEF$和$ACGH$，M是BC的中点，求证：$FH=2AM$．（图1—8）

2．AB为$\odot O$的直径，割线CD交$\odot O$于A、C两点，且$AB=AD$，$CE\perp DB$，垂足为E，CE交DO于P点，求证：$CP:EP=2:1$．（图1—9）

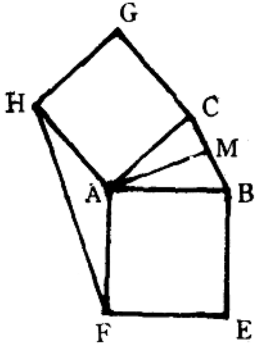

图1—8

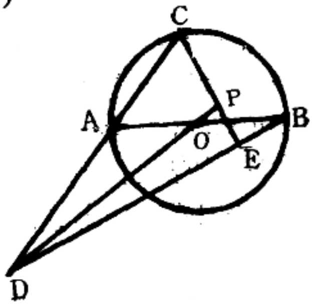

图1—9

3．已知G、I分别为$\triangle ABC$的重心和内心，且$AB+AC=2BC$，求证：$GI\parallel BC$．（如图1—10）

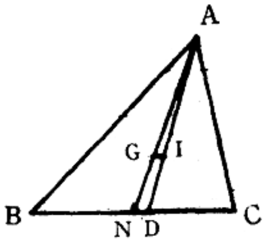

图1—10

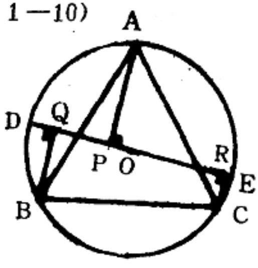

图1—11

4. $\odot O$的直径DE与内接正三角形ABC的边AB、AC相交，自A、B、C各作DE的垂线AP、BQ、CR(P、Q、R为垂足)，求证：$AP=BQ+CR$。(图1—11)

5. 如图1—12，$\odot O$半径为R，$\triangle ABC$内接于$\odot O$，$AB=BC$，E为AB的中点，$BD\perp AC$，垂足为D，过B、E、C作圆交BD于G，求证：$BG=\frac{3}{2}R$。

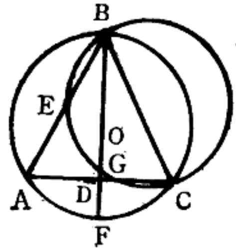

图1—12

解答或提示

1. 如图1—13，延长AM到D，连BD、CD，则$ABDC$为平行四边形，$AC=BD$在，$\triangle AFH$与$\triangle ABD$中，$\because ABEF$、$ACGH$为正方形

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}AH=BD\\AF=AB\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$\angle 1=\angle 2=90°$

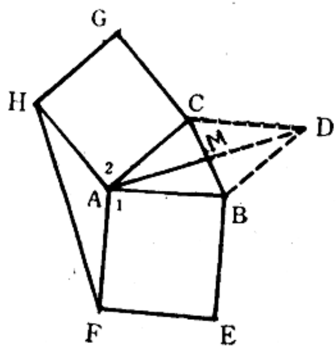

图 1—13

$$\left.\begin{cases}\angle HAF+\angle CAB=180^\circ\\ \angle CAB+\angle ABD=180^\circ\end{cases}\right\}\Longrightarrow \angle HAF=\angle ABD,$$

$$\therefore \triangle AHF\cong\triangle ABD\Longrightarrow \left.\begin{matrix}HF=AD\\ AD=2AM\end{matrix}\right\}\Longrightarrow FH=2AM.$$

2. 如图 1—14设 BD交$\odot O$于F，连 AF

则$\left.\begin{matrix}\angle AFB=90^\circ\\ AB=AD\end{matrix}\right\}\Longrightarrow$

$\left.\begin{matrix}AF\text{为}BD\text{边上中线}\\ OD\text{为}AB\text{边上中线}\end{matrix}\right\}$

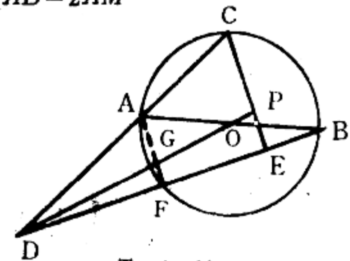

图 1—14

$\Longrightarrow AF$与OD交点G为$\triangle ABD$的重心，$\Longrightarrow AG:GF=2:1$，又$AF/\!/CE\Longrightarrow CP:PE=AG:GF=2:1$。

3. $\because I$为内心，则$\dfrac{AI}{ID}=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{AB+AC}{BD+DC}=\dfrac{2BC}{BC}=2$

又G为重心，$\therefore AG:GN=2:1$，$\therefore AI:ID=AG:GN=2:1$。

故$GI/\!/BC$。

4. 如图 1—15连接AO延长交BC于M，作$MN\perp DE$

$\because\triangle ABC$为圆内接正三角形，$\therefore O$为$\triangle ABC$的重心，M为BC之中点.又$\because BQ\perp DE$，$CR\perp DE$，$MN\perp DE$，$\therefore N$为QR的中点，则$MN \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}(BQ+CR)$。

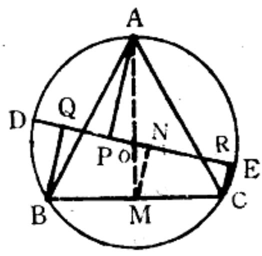

图 1—15

又$AP\perp DE$，$\therefore\triangle APO\backsim\triangle MNO$，则 $\frac{AP}{MN}=\frac{AO}{OM}=\frac{2}{1}$.

$\therefore AP=2MN$.故$AP=BQ+CR$.

5. 如图 1—16连接EG、AG、CG，$\because AB=BC\therefore BD\perp AC$，$\therefore\angle 1=\angle 2$，$EG=CG$. 又$CG=AG$，$\therefore EG=AG$. 取$AO$中点$M$，连接$MG$、$ME$，$\because E$为$AB$中点，于是$EM$

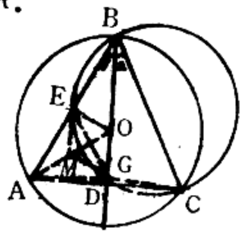

图 1—16

$=\frac{1}{2}AO=AM=\frac{1}{2}R$.

$\therefore GM$为AE的中垂线，那么$OE\parallel MG$

又$\because OG\parallel EM$，故$EOGM$为平行四边形，

$\therefore OG=EM=\frac{1}{2}R$. $\therefore BG=\frac{3}{2}R$.

二、三角形角平分线问题的辅助线添作

因为角的平分线是角的对称轴，因此，当题目的条件里有三角形的角平分线时，通常采用以下几种方法添作辅助线。

1． 将角的一边以角的平分线为轴翻转180°后与另一边重合．用这种方法可制作全等三角形，使条件与结论的联系明朗化．

如图 2－1，AB为$\angle MAN$的平分线，将$\triangle ABC$沿AB翻转180°，使C点落在C'（即在AN上截取$AC'=AC$）便得到$\triangle ABC'\cong\triangle ABC$

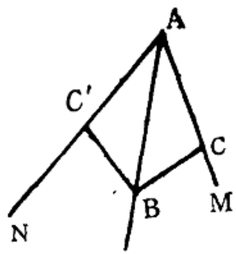

图 2－1

例 1 已知$\triangle ABC$中，$\angle C=2\angle B$．AD平分$\angle A$．（如图 2－2）

求证：$AB-AC=CD$．

证明：$\angle C=2\angle B>\angle B$
$\Longrightarrow AB>AC$

$\therefore$在AB上截取$AC'=AC$．连接$C'D$，则

$\triangle ADC\cong\triangle ADC'\Longrightarrow\angle AC'D$

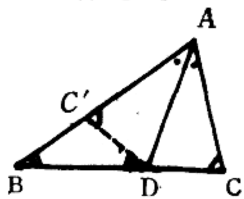

图 2－2

$=\angle C=2\angle B$

$\Longrightarrow\angle B=\angle C'DB\Longrightarrow C'B=C'D=CD$

$\Longrightarrow AB-AC=AB-AC'=C'B=CD.$

2. 从角的一边上的一点作角平分线的垂线，使之与另一边相交，则截得一个等腰三角形，垂足为底边上的中点，该角平分线又成为底边上的中线和高，以利用中位线的性质与等腰三角形三线合一的性质（若题目条件中有垂直于角平分线的线段，则延长该线段止于角的另一边）如图 2—3

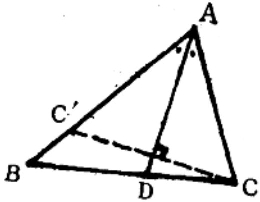

图 2—3

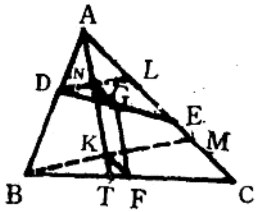

图 2—4

例 2 如图 2—4 在△ABC的两边BA与CA上分别取$BD=CE$，F、G分别是BC和DE的中点．求证：FG平行于$\angle A$的平分线AT．

证明：设B、D关于AT的对称点为M、L，BM、DL、分别交AT于K、N，则K、N分别为BM、DL的中点，连接KF、NG．

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}BF=FC\\ BK=KM\end{array}\right\}\Longrightarrow KF\underline{\parallel}\frac{1}{2}MC\\ \text{同理}\qquad NG\underline{\parallel}\frac{1}{2}LE\end{array}\right\}\Longrightarrow KF\parallel GN\\ CM=CE-ME=BD-ME=LM-ME\\ \qquad\qquad=LE\Longrightarrow KF=GN\end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow$四边形$KFGN$为平行四边形

$\Longrightarrow FG /\!/ NK \Longrightarrow FG /\!/ AT$。

例 3　在$\triangle ABC$中，BD、CE为$\angle B$、$\angle C$的平分线，$AF\perp CE$，$AG\perp BD$，垂足为F、G，求证：（1）$FG /\!/ BC$；（2）若$\angle A=90°$，则$FG=r$。（r为$\triangle ABC$的内切圆半径）

证明：（1）延长AF、AG分别交BC于M、N两点，则F为AM之中点，G为AN之中点．在$\triangle AMN$中，由中位线性质知：$FG /\!/ BC$。

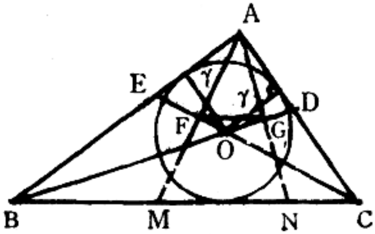

图 2—5

（2）　由（1）知：

$$\left.\begin{aligned} &FG=\frac{1}{2}MN \\ &2(r+BC)=AB+AC+BC \\ &AB=BN \\ &AC=CM \end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$AB+BC+AC=BN+CM+BC=2BC+MN$

$=2BC+2FG=2(FG+BC)$

$\Longrightarrow 2(r+BC)=2(FG+BC)$

$\Longrightarrow r=FG$。

例 4　已知$Rt\triangle ABC$，$\angle A=90°$，BD为$\angle B$的平分线，$AE\perp BC$交BD于F，过F作$FG /\!/ BC$交AC于G。

求证：$AD=GC$。

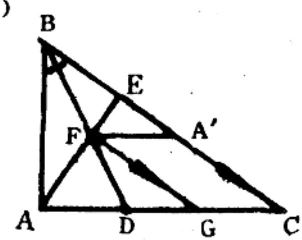

图　2—6

证明：在BC上截取$BA'=$