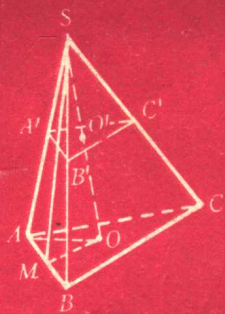


中学数学课本辅导丛书

高中立体几何学习指导

邢恩德 张伯俞 编



辽宁教育出版社

中学数学课本辅导丛书

高中立体几何学习指导

邢恩德 张伯瑜 编

辽宁教育出版社

1987年·沈阳

高中立体几何学习指导

邢恩德 张伯瑜 编

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 沈阳新华印刷厂印刷

字数：170,000 开本：787×1092¹/₃₂印张：7³/₄

印数：1—32,700

1987年7月第1版

1987年7月第1次印刷

责任编辑：杨力

责任校对：李晓晶

封面设计：周咏红

插图：潘智倩 韩梅梅

统一书号：7371·142

定价：1.00 元

出版说明

提高学生的自学能力，是时代对人才培养的要求。中学生在求知阶段，主要是从课本中汲取知识营养。长期以来，广大中学生迫切要求出版一套能够帮助他们学好课本的辅导读物，作为良师益友。为了满足这个要求，我们组织了一些执教多年、经验丰富的中学数学教师和专门从事数学教学研究的人员，编写了这套《中学数学课本辅导丛书》。

辽宁教育学院邢清泉、关成志同志担任了本丛书的主编工作，并同钱永耀同志一起审阅了全部初稿。

这套辅导丛书紧扣中学数学教学大纲，按照现行数学课本的知识顺序，逐章逐节逐问题进行剖析解疑，力求起到提醒注意、开阔思路、指导解题、介绍学习方法的作用。每个单元都配有巩固基本知识的思考与练习，每章后面配有少量典型的综合练习题，帮助学生更好地理解 and 消化课本内容，提高自学能力。

目 录

第一章 直线和平面	1
一 平面	3
(一) 内容简介.....	3
(二) 学习指导.....	3
(三) 解题指导.....	18
思考与练习题	25
二 空间两条直线	27
(一) 内容简介.....	27
(二) 学习指导.....	28
(三) 解题指导.....	37
思考与练习题	40
三 空间直线和平面	42
(一) 内容简介.....	42
(二) 学习指导.....	43
(三) 解题指导.....	58
思考与练习题	63
四 空间两个平面	65
(一) 内容简介.....	65
(二) 学习指导.....	65

(三) 解题指导	76
思考与练习题	79
综合练习题	80
第二章 多面体和旋转体	84
一 多面体	84
(一) 内容简介	84
(二) 学习指导	86
(三) 解题指导	112
思考与练习题	132
二 旋转体	136
(一) 内容简介	136
(二) 学习指导	137
(三) 解题指导	156
思考与练习题	179
三 多面体和旋转体的体积	191
(一) 内容简介	181
(二) 学习指导	181
(三) 解题指导	194
思考与练习题	215
立体几何综合题的几个例题	218
综合练习题	232
提示及答案	234

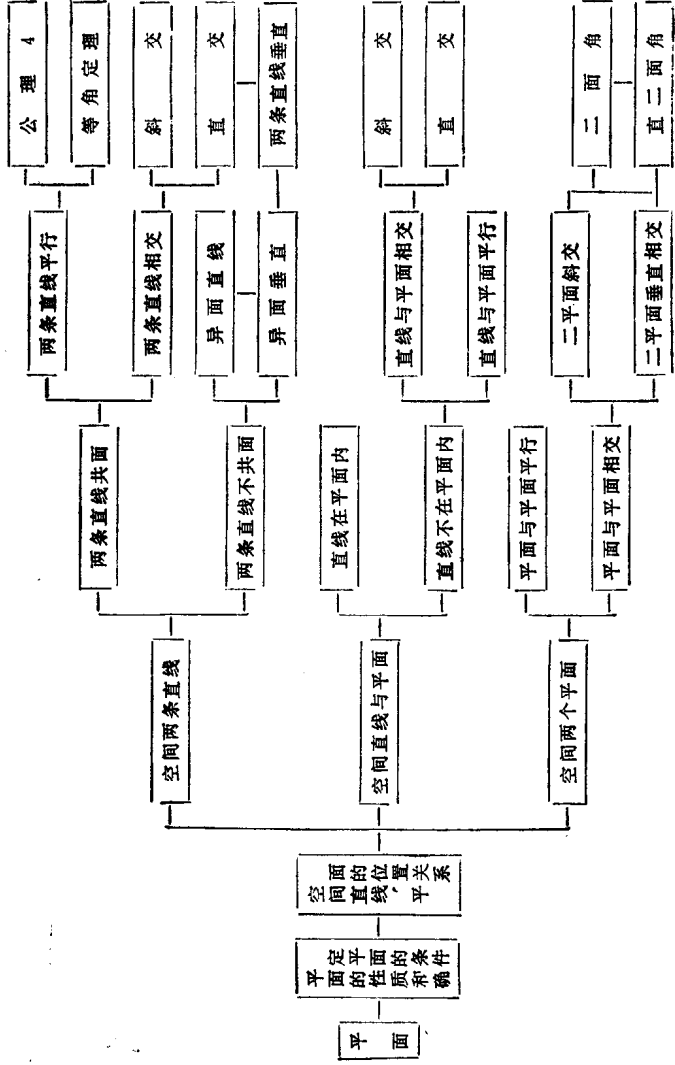
第一章 直线和平面

这一章知识是立体几何的基础部分，是学习立体几何的入门和奠基，也是研究第二章多面体和旋转体以及第三章多面角和正多面体的基础。而且对今后进一步学习空间解析几何、机械制图、投影几何等学科都有很紧密的联系。

这一章知识内容的核心是平面的基本性质，研究的主体是直线、平面这两个元素在空间的各种不同位置关系。内容的安排依次由“平面的基本性质”、“空间二直线的位置关系”、“空间直线和平面的位置关系”、“空间两平面的位置关系”四部分组成，并重点研究其中的线线、线面、面面的平行与垂直关系。其中第一部分又是研究和认识后三部分各种位置关系的理论依据。

对本章内容掌握的情况，是关系到能否学好立体几何的关键。就总体而言，它既是重点，也是难点和关键。对此，我们从学习一开始就要引起注意并给予足够的重视，切不可等闲视之。

这一章的知识结构是：



一 平 面

(一) 内容简介

这一单元主要研究以下三方面内容：一、平面的概念和表示法；二、平面的基本性质和确定平面的条件；三、水平放置的平面图形直观图的画法。

这一单元内容是立体几何的起始知识，是学习立体几何的起步。它是在同学们学过平面几何，全面系统掌握有关平面图形性质的基础上提出来的。内容的核心是关于平面的基本性质的三个公理，这是奠定立体几何理论体系的几块基石，是研究空间直线和平面位置关系的理论基础，是推理论证的根本依据。平面的表示法和水平放置的平面图形直观图的画法是学习绘制空间图形直观图的准备和基础，所以这一部分知识的学习具有特殊重要的意义。对所学内容要真正做到透彻理解，牢固掌握，并能正确熟练地加以运用。

(二) 学习指导

同学们知道，图形可以看做是点的集合，如我们在平面几何中学过的直线、射线、线段，还有三角形、平行四边形、圆等，它们都可以看做是点的集合，只是表现形式不同而已。但这些图形都有一个共同点，那就是构成每一个图形的所有点全在同一个平面内，我们把这种图形称做平面图形，因此，平面几何是研究平面图形性质的学科。在生活中我们随时还可以看到另外一些图形，如球、正方体等，它们也可以看做是点的集合，但构成这些图形的所有点并不全在同一平面内，我们把这类图形称为空间图形。立体几何就是

研究空间图形性质的科学——研究空间图形的性质、画法、计算，以及它们的应用。

平面图形是由同一个平面内的点、线所构成的图形，是同一平面内点的集合。空间图形是由空间的点、线、面所构成，可看成是空间点的集合。平面图形是空间图形的一部分。这就是平面图形和空间图形的区别和内在联系。因此，立体几何在研究的内容、方法和思维方式上既与平面几何有着紧密的联系，同时又有很大的不同，它具有自己的个性和特点。这一点从学习一开始就要引起注意，既要善于运用以前的知识与方法，又要善于研究新情况，掌握新方法。为此，就要有意识地克服在平面几何学习中所形成的某些习惯和方法的束缚与影响，注意新观念的树立和新习惯的养成，尤其要注意掌握空间图形直观图的识图和画法的原理和规律，并注意不断发展自己的空间想象力，努力探索思考空间图形问题的规律。

1.1 平面

通过前面的介绍同学们可以知道，立体几何是以空间图形作为研究对象的。就事物的内在联系，研究的对象、内容和方法而言，平面几何可以看做是立体几何的基础，立体几何可以看做是平面几何的扩展，和平面几何相比较，平面是新增加的元素，它也是最简单最常见的面。所以立体几何的第一小节就从平面的概念开始研究，首先在我们的认识中确立平面的概念，然后再研究它的表示方法，为进一步学习平面的基本性质做好准备。

1. 平面的概念

点、直线和平面这是构成空间图形的基本元素，如同点和直线一样，平面也是个原始的不予定义的最基本的概念。

因此书中关于这个概念是通过若干具体事物形象地描述来给出的。如容器内平静的水面，平滑的玻璃面，刨平的木板面等这些都给我们以平面的形象。众多的这类事物形象在人们头脑中的长期反复，从而就形成了关于平面的概念。

【研究】 我们在数学学习与研究中所说的平面的概念，由于它是一类事物的抽象与概括，因此它既相同于又有别于现实生活中的那些平的面。都是“平的”，这是它们的共同之处。不同之处在于生活中所接触的那些平的面都仅仅是平面的一部分，它们都有确定的范围和边界，在大小上都是有限的部分；而数学中所提的平面，则是宽广无涯的，没有边界的，具有无限延展性。这一点和我们对直线概念的理解是有相类似之处的。直线是没有确定长度的，向两方无限伸展的，一条直线把整个平面分为两部分。立体几何中的平面是没有边界的，沿着它所在的位置无限伸展的，由于平面具有这种性质，所以一个平面把整个空间分为两部分。

2. 平面的表示法

立体几何学习中要研究空间点、直线、平面间的位置关系。在研究中不能总依靠模型，尽管这样有时是必要的、有益的、直观性强，又有助于思考，但一般来说这样作法既不方便，又效率低，而且研究的过程和结果也不便于表达出来。因此，就要解决在纸面上或黑板面上，用什么来表示平面的问题。在立体中通常用平行四边形来表示平面。对此，要着重理解以下两点：

1) 为什么通常用平行四边形来表示平面？这是因为在现实生活中，我们所接触到的实际物体的表面很多都是平面的一部分，形状也常常呈矩形，而当我们从适当的角度和距离来观察它们的时候，感到它们又都很象平行四边形，在画

空间图形时也有这样的规律和要求。见图 1—1，如把一本书的书面如实地画成矩形，把方桌面如实地画成正方形，反而不如把它们画成平行四边形更形象更逼真，更符合视觉的直观性要求。所以通常用平行四边形来表示平面。

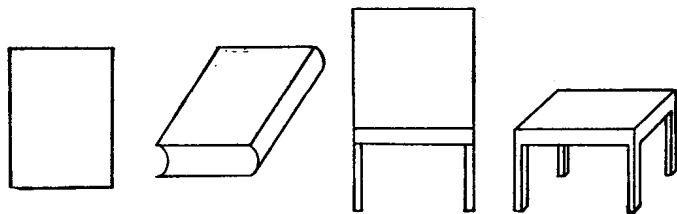


图 1—1

另外，这里强调“通常”二字是指画图时有时根据需要也可以用其它的平面图形，如三角形、封闭的平面曲线图形等来表示，这要视题目的具体情况而定。

2) 对立体几何的研究，经常的要通过在一定的平面上，如纸面或黑板面上描绘出一些直观图形来进行。考虑到图形的直观性要求和画法的简易性要求，所以在用平行四边形表示平面时，就要遵循一定的规则。这里主要指当平面水平放置的时候，或直立的时候的画法。当平面是水平放置的时候，如图 1—2 所示，常把用来表示平面的平行四边形的一组对边画成水平，邻边之间的比例关系取 1:2（横边长为邻边长的两倍），锐角画成 45° 。画侧立的平面时如图 1—3 所示，要把一组对边画成铅垂线，而当画正立的平面时，如图 1—4 所示，则常用矩形来表示（一组对边画成水平，另一组对边画成铅直）。另外，当图形涉及平面和平面的相互关系时，为了增强立体感要注意如图 1—5 所示那样，把

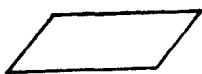


图 1-2

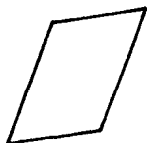


图 1-3



图 1-4

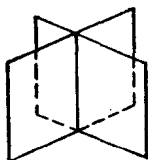


图 1-5

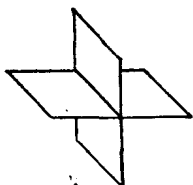


图 1-6

被遮住部分的线段画成虚线或不画。记法如课本所述。

【注意】 ①所画的平行四边形是表示这个平行四边形所在的整个平面，需要时随时可以把它扩展开来。

②画相交平面时要注意一定要在画出平面的同时把它们的交线也画出来，而不应画成如图 1-6 所示的那样。

③在标记时要注意，当用一个字母表示平面时，字母要写在表示平面的平行四边形的一个锐角内且不被其它平面遮住的地方，用语言叙述时，在字母前要加上“平面”两字。

1.2 平面的基本性质

学习课本这节时同学们要注意深刻理解并牢固掌握三个关于平面的基本性质和四个确定平面位置的条件。关于平面基本性质的三个公理是研究空间图形性质的理论基础，是推理论证的根本依据。公理 3 及其三个推论是在空间确定平面

位置的条件，具备这四个条件中的任何一条都可以确定一个平面。研究它的意义在于解答立体几何问题时，往往要归结为关于平面图形的问题来解决。掌握确定平面位置的条件，这是将空间图形问题转化为平面图形问题来处理的关键环节，否则就不能实行这种转化，而问题也就无从解决。

1. 关于平面基本性质的三个公理

我们知道平面是原始的不定义的概念，因此关于平面的性质是通过一些公理来揭示的，这就是立体几何中的前三个公理，它们是人们经过长期的实践，观察、分析而总结出来的。它们反映现实空间的性质，这也正是立体几何能够应用实践的根据。我们总结实践经验把它们提取出来作为公理，作为进一步推理的依据和基础。

公理1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内（1—7）。

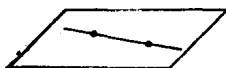


图 1—7

【研究】 ①公理1指出了直线和平面的一种基本关系。在逻辑推证上有很多重要的应用。

②由公理1我们可以得出直线在平面内的概念的定义。即：若一直线上的所有点都在同一个平面内时，我们就把直线与平面的这种位置关系叫做直线在平面内，或者说平面过这条直线。

③作为直线在平面内的概念的定义，要求直线上的所有点都在这个平面内，但作为判定的方法和依据，依公理1就可得出结论。所以公理1也可以作为判定直线在平面内的依据。

④公理1也可以用来检验一个面是否是平面。这是因为公理1是应用直线的性质来描述平面的平展性的，因为平面

具有平展性，所以，在满足公理1的条件下，才能使直线上的所有点都在这个平面内，而曲面就不具备这一点。如图1-8所示，直线上虽有两个点在面内，但其它的点并不在这个曲面内。由此可以得出检验一个面是否是平面的方法：

“若连接一个面内任何两点的一条直线上的所有点都在这个面内，那么，这个面就是平面。”但要注意所取的这两点不能是特殊位置上的，而要是任意的，这条直线要全部而不是部分的落在这个平面内。如图1-9所示的情况就说明了这样的问题。

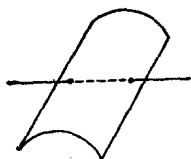


图 1-8

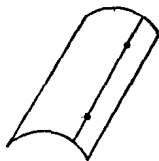


图 1-9

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线（见图 1-10）。

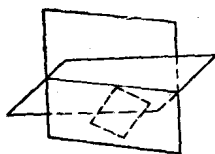


图 1-10



图 1-11

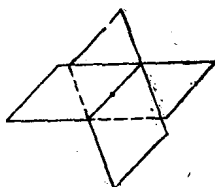


图 1-12

【研究】 公理2描述了平面的无界性，它指出了两个平面相交的基本性质，是确定两个平面如果有公共点就要相交于一条直线的依据。就是说，两个平面不可能只有一个公

共点，象图 1—11 所示的那样。这是因为平面具有无限延展性的缘故。我们不要受现实生活中的情况和画图时所产生的错觉的影响。两个平面就位置关系而言，要么没有公共点，要么有公共点，如果有公共点，那么就公共点的个数而言，不可能只有一个公共点，也不可能只有两个公共点，要有就必定有无数个公共点，这无数公共点集合在一起，构成一条过这个公共点的直线（见图 1—12），也就是这两个平面的交线。

【注意】 ①从公理 2 开始出现术语“有且只有一个”的提法，其中“有”说明图形的存在性，“只有一个”说明图形的唯一性，“有且只有”说明符合条件的图形既存在且唯一，这意味着图形是确定的。“有且只有一个”和“确定一个”是同义语。

②如果已知两个平面有两个公共点，那么这两个平面相交的情形又怎样呢？依公理 2 引申一下就可推知：如果两个平面有两个公共点的话，那么过这两点的直线就是这两个平面的交线。

③还应注意，依公理 2 今后如果已知两个相交平面，那么就等于给出了它们的交线（直线）；给出了两个相交平面的一个公共点，就等于给出了过这公共点的一条交线（直线）。所以如已知两个平面的交点，画交线时必须通过这一点。意识到这一点，对我们今后解题是非常有用的。由此，我们也可以形成这样的观念：两个相交平面的公共点一定在这两个平面的交线上。

④公理 2 在证明两平面相交、三点共线、点在直线上及探索多面体截面的形状和位置等问题中有着广泛而重要的应用。

公理3 经过不在同一直线上的三点有且只有一个平面(图1-13)

【研究】 公理3给出了确定平面条件的根本依据。本公理也可简述为：过不在一直线上的

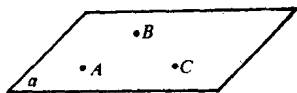


图1-13

三点确定一个平面。这一公理的含义是：过不在同一条直线上三个点的平面是存在的，而且这样的平面也是唯一的。

【注意】 ①应注意公理3中“不在同一直线”和“三点”这句话的含义和要求。“不在同一直线上”这是位置上的要求，“三点”这是数量上的要求，综合在一起，才能保证平面的确定性。显然，当这三点在同一直线上时，过这样三点的平面有无数个，从而说明平面在空间的位置也是不能确定的。同样，过空间两个点的平面也能有无数个，所以位置也是不能确定的。从这个意义上理解，公理3向我们指明了确定平面空间位置的唯一性。这个公理也说明了过一点、两点或一直线上的三个点都不能确定平面的位置。

②公理3的作用在于它是确定平面的根本依据，也常被用来证明两个平面重合。

2. 确定平面的条件

在研究空间图形问题的时候，往往是先将有关的点、线归结到一个平面内，然后再利用平面图形的性质来解决，所以掌握确定平面的条件是非常重要的。确定平面这是将空间图形问题转化为关于平面图形的问题来解决的重要条件，也是关键环节。公理3是确定平面条件的最根本的依据，在此基础上结合公理1和公理2我们又推出了其它三个确定平面的条件。公理3和它的三个推论是在空间确定平面位置的主要方法和根据。公理3是其中更为主要的，带根本性的。